

同変岩澤理論における Fitting 不変量 (研究報告)

Fitting invariants in equivariant Iwasawa theory (research announcement)

By

片岡 武典*
Takenori KATAOKA

Abstract

In this paper, we explain the results of the author's article "Fitting invariants in equivariant Iwasawa theory." We develop an algebraic theory to compute "Fitting invariants" (a generalization of Fitting ideals), and apply it to equivariant Iwasawa theory. This generalizes a result of Greither and Kurihara.

§ 1. はじめに

本稿では筆者の論文 [11] の主な内容を解説する.

岩澤理論における主予想は、岩澤加群という代数的な対象と p 進 L 関数という解析的な対象が密接に結びついているという哲学である. 古典的な (同変ではない) 岩澤理論では, Wiles [20] の結果に代表されるように, 有限群の作用に関する指標分解をした上で考察を行う. この指標分解により主予想の定式化が容易になる一方で, 作用している有限群の位数が p と素ではない場合には, この指標分解はある種の情報を失ってしまう. それに対し, より精密な情報を得るために指標分解をせずに有限群の作用を含めて考察するのが同変岩澤理論である.

同変岩澤理論においてこれまで提唱されている主予想は, たいてい, 岩澤加群を適切に修正した対象の "Fitting 不変量" を用いて定式化されている. しかるにそういった主予想の主張から, 修正前の岩澤加群自体の "Fitting 不変量" を決定することは困難であった. 論文 [11] の目的はこの問題への一つの回答を与えることである.

Received March 30, 2018. Revised October 19, 2018.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 11R23.

本研究は数物フロンティア・リーディング大学院 (FMSP) と JSPS 科研費 17J04650 の助成を受けたものである.

*慶應義塾大学理工学部 223-8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3-14-1

Keio University, Kanagawa 223-8522, Japan.

e-mail: tkataoka@math.keio.ac.jp

© 2020 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

論文 [11] は Greither-Kurihara [6] の結果を拡張したものであるから、まずは [6] の結果を概観する。 p を奇素数とし、 L/K を総実代数体の有限次アーベル拡大とする。 K_∞, L_∞ をそれぞれ K, L の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし、 K_∞ と L は K 上で線形無関連であると仮定する。 Galois 群を $\Delta = \text{Gal}(L/K), \Gamma = \text{Gal}(K_\infty/K), G = \text{Gal}(L_\infty/K)$ とおくと、制限写像による自然な同型 $G \simeq \Gamma \times \Delta$ がある。従って同変的な岩澤代数 $R = \mathbb{Z}_p[[G]]$ は自然に $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]][\Delta]$ と同型である。よく知られているように、 Γ の位相的生成元を用いて、 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ と一変数形式的冪級数環 $\mathbb{Z}_p[[T]]$ との同型が構成できる。これらの同型により、以下では R を $\mathbb{Z}_p[[T]][\Delta]$ と同一視する。

Σ を K の素点の有限集合であって、 p の上の素点と L/K で分岐する素点を全て含むものとする。このとき Σ 分岐岩澤加群 $X_\Sigma = X_\Sigma(L_\infty)$ が、 L_∞ の Σ の外で不分岐な最大アーベル pro- p 拡大の Galois 群として定義される。 X_Σ は自然に R 加群の構造を持ち、さらに有限生成ねじれ加群であることが知られている¹。簡単のために (成立すると予想されている通り)、 X_Σ の μ 不変量は 0 であると仮定する。これらの設定の下で、 [6] の目的の一つは、 X_Σ の Fitting イデアル $\text{Fitt}_R(X_\Sigma)$ を計算することである。

ここで Fitting イデアルの定義と基本的な性質を説明するとともに、いくつか記号を導入する ([4, Section 20.2] や [16, Section 3.1] を参照)。なお以下の定義は一般のネーター可換環 R に対して通用する。有限生成 R 加群 M に対し、有限表示 $R^b \xrightarrow{h} R^a \rightarrow M \rightarrow 0$ を取り、 h を $a \times b$ 行列とみなす。このとき M の Fitting イデアルを

$$\text{Fitt}_R(M) = (\det(H) \mid H \text{ は } h \text{ の } a \times a \text{ 部分行列})_R$$

によって定義する。なお $a > b$ のときは $\text{Fitt}_R(M) = 0$ と約束する。この定義は表示 h の取り方に依らないことが知られている。

$\mathcal{M}$ を有限生成ねじれ R 加群全体のなす圏とし、本節では $M \in \mathcal{M}$ に対して $\mathcal{F}(M) = \text{Fitt}_R(M)$ とおく。 $\mathcal{M}$ の部分圏 $\mathcal{P}$ を、 R 上の射影次元が 1 以下の加群たちのなすものとして定める。このとき各加群 $P \in \mathcal{P}$ に対し、 $\mathcal{F}(P)$ は単項かつ可逆なイデアルである。なぜなら、 P の射影次元が 1 以下であることから、 P の有限表示として $0 \rightarrow R^a \xrightarrow{h} R^a \rightarrow P \rightarrow 0$ なるものが取れて、 $\mathcal{F}(P) = (\det(h))_R$ となるからである。また、 $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ を $\mathcal{M}$ における短完全列であって $P \in \mathcal{P}$ なるものとする、 $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(P)\mathcal{F}(M')$ が成立する [3, Lemma 3]。

さて [6] の内容の説明に戻る。岩澤理論における主予想の哲学によると、 X_Σ の構造は p 進 L 関数 Θ_Σ と結びついている。ここで Θ_Σ の詳しい定義は述べないが、 R の全商環の元であって、 K の Hecke L 関数の特殊値を p 進補間するものである。実際に我々の状況では、 ($\mu = 0$ の仮定の下で) 次の結果が知られている ([14, Conjecture 2.1] も参照。本稿の Θ_Σ は [14] の Φ_S に相当する)。

定理 1.1 (Ritter-Weiss [18, Theorem 11]). $\mathcal{M}$ 内の完全列

$$(1.1) \quad 0 \rightarrow X_\Sigma \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

¹ねじれは $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 加群としてねじれという意味と解釈する。

であって $P_i \in \mathcal{P}(i = 1, 2)$ なるものが存在する. そして R の分数イデアルとして

$$\mathcal{F}(P_1)\mathcal{F}(P_2)^{-1} = (\Theta_\Sigma)_R$$

が成立する.

後に例 2.8 でも紹介する既知の代数的な命題を適用することで, 定理 1.1 から

$$\mathcal{F}(\alpha(X_\Sigma)) = \Theta_\Sigma \mathcal{F}(\mathbb{Z}_p)$$

が従う. ここで α は岩澤随伴を表し, $\mu = 0$ の仮定の下では $\alpha(X_\Sigma) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(X_\Sigma, \mathbb{Z}_p)$ となっている. しかしながら Fitting イデアルは岩澤随伴に対して良い振る舞いをしないため, $\mathcal{F}(\alpha(X_\Sigma))$ から目下の目的である $\mathcal{F}(X_\Sigma)$ を決定することはできない.

このような困難を背景として, Greither-Kurihara は以下の結果を得た. まず有限アーベル群 Δ の巡回群の直和への分解

$$\Delta = \bigoplus_{i=1}^s \Delta^{(i)}$$

を取り, $\Delta^{(i)}$ の生成元 δ_i を取る. 各 i に対して次数 0 で終わる複体

$$C^{(i)} : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_p[\Delta^{(i)}] \xrightarrow{\delta_i - 1} \mathbb{Z}_p[\Delta^{(i)}] \xrightarrow{\mathcal{N}^{\Delta^{(i)}}} \mathbb{Z}_p[\Delta^{(i)}] \xrightarrow{\delta_i - 1} \mathbb{Z}_p[\Delta^{(i)}] \rightarrow 0$$

を考える ($\mathcal{N}$ はノルム元を表す) と, これは次数 0 以外では完全であって $H_0(C^{(i)}) \simeq \mathbb{Z}_p$ となっている. ゆえにテンソル積 $C = C^{(1)} \otimes \cdots \otimes C^{(s)}$ は次数 0 以外では完全な複体であって $H_0(C) \simeq \mathbb{Z}_p$ が成り立つ. 明示的には

$$C : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}_p[\Delta] \xrightarrow{\frac{s(s+1)(s+2)}{6}} \mathbb{Z}_p[\Delta] \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z}_p[\Delta] \xrightarrow{\frac{s(s+1)}{2}} \mathbb{Z}_p[\Delta]^s \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}_p[\Delta] \rightarrow 0$$

という形である. B_Δ を d_2 の像として定義する.

以上の準備の下で次が成り立つ (既に述べたように $R = \mathbb{Z}_p[[T]][\Delta]$ と見なしている).

定理 1.2 ([6, Theorem 3.3(a)], [7, Theorem 4.1]). R のイデアルとして

$$\mathcal{F}(X_\Sigma) = \Theta_\Sigma T^{1-s} \mathcal{F}(B_\Delta)$$

が成立する.

ここで B_Δ は d_3 を $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ 上の有限表示に持ち, それから R 上の有限表示を構成できるから, $\mathcal{F}(B_\Delta)$ は計算できるものである. s が大きいと d_3 の行列表示が大きくなるためその計算は複雑だが, [6] の後続の論文 [8] において, 一般に $\mathcal{F}(B_\Delta)$ の生成系が書き下されている.

B_Δ の定義により, 完全列

$$(1.2) \quad 0 \rightarrow B_\Delta \rightarrow \mathbb{Z}_p[\Delta]^s \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z}_p[\Delta] \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

がある．[6]での定理 1.2 の証明は，基本的には列 (1.1) と列 (1.2) を比べることなされるものの，かなり技巧的である (命題 2.6 の直後の注意も参照)．なお本稿では先に Ritter-Weiss の定理 1.1 を紹介したが，定理 1.2 の証明はそれとは独立していることにも注意しておく．

さて [11] の結果の一つは，定理 1.2 が定理 1.1 と次の代数的な命題から得られるというものである．

定理 1.3 ([11, Theorem 1.2]). 加群 $M \in \mathcal{M}$ に対し， $\mathcal{M}$ における二つの完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow M \rightarrow 0$ と $0 \rightarrow N' \rightarrow P'_1 \rightarrow P'_2 \rightarrow M \rightarrow 0$ であって $P_i, P'_i \in \mathcal{P} (i = 1, 2)$ なるものを取る．このとき

$$\mathcal{F}(P_1)^{-1}\mathcal{F}(P_2)\mathcal{F}(N) = \mathcal{F}(P'_1)^{-1}\mathcal{F}(P'_2)\mathcal{F}(N')$$

が成り立つ．

定理 1.3 を列 (1.1) と列 (1.2) に適用し，定理 1.1 を利用することで，定理 1.2 が直ちに得られる．

注意．定理 1.2 は定理 1.1 の代わりに Greither-Popescu による同変主予想 [9, Theorem 5.6] を利用しても示すことができる．なおこれらの同変主予想は同値であることが知られている [14, Theorem 3.3, Remark 3.5]．

論文 [11] では，代数的な理論として定理 1.3 のさらなる拡張をして (本稿第 2 節)，それを岩澤理論に応用することで定理 1.2 の拡張をしている (本稿第 3 節)．

拡張の一つの方向は， L/K が非可換な Galois 拡大である場合への一般化である．Fitting イデアルは可換環上でしか定義されないが，今我々が考察している $R = \mathbb{Z}_p[[T]][\Delta]$ のような形の環上では，Nickel [13] により非可換 Fitting 不変量が定義されている．この不変量についても定理 1.3 の類似が成り立つことを示し，さらに主予想を用いて定理 1.2 の類似を与える．また拡張の別の方向としては，虚二次体上の二変数拡大の場合がある．この場合にも定理 1.3 及び定理 1.2 の類似を与える．

§ 2. 代数的な理論

一般に Δ を (可換とは限らない) 有限群とし， Γ をある非負整数 d について $\mathbb{Z}_p^d$ と同型な位相群とする． $G = \Gamma \times \Delta$ とおき， $R = \mathbb{Z}_p[[G]]$ とおく．

注意． G が直積分解されていることは本質的ではなく，より一般に G がコンパクト群であって $\mathbb{Z}_p^d$ と同型な群 Γ を中心的正規開部分群にもつならば，本節の内容は軽微な修正の下で成立する．さらに論文 [11] では ([2] への応用を視野に入れて)，環 R をコンパクト p 進 Lie 群 G の岩澤代数 $\mathbb{Z}_p[[G]]$ とした場合にも適用できるような，より一般的な代数的な理論を構築している．

圏 $\mathcal{M} \supset \mathcal{P}$ を第 1 節と同様に定義する. すなわち, $\mathcal{M}$ は有限生成ねじれ R 加群全体のなす圏であり, $\mathcal{P}$ は R 上の射影次元が 1 以下のものたちのなす部分圏である.

次の公理的な不変量を導入する (単に Fitting 不変量と呼ぶことにする). これは, 第 1 節の終わりに記述したような, 非可換拡大や二変数拡大を同時に扱えるようにするためである. さらに後の定理 2.3 の証明においても, この公理的な扱いが巧みに機能する.

定義 2.1. Ω を可換モノイドとし, その可逆元全体のなす可換群を $\Omega^\times$ とおく. 各加群 $M \in \mathcal{M}$ に元 $\mathcal{F}(M) \in \Omega$ を対応させる $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \Omega$ が次を満たすとき, $\mathcal{F}$ を Fitting 不変量と呼ぶ.

- 各 $P \in \mathcal{P}$ に対して $\mathcal{F}(P) \in \Omega^\times$.
- $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ が $\mathcal{M}$ における完全列であって $P \in \mathcal{P}$ ならば, $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(P)\mathcal{F}(M')$.

例 2.2. (1) Δ が可換であるとする. Ω を R の分数イデアル全体のなす可換モノイドとし, $\mathcal{F}(M) = \text{Fitt}_R(M)$ と定める. このとき第 1 節で説明したように, $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \Omega$ は Fitting 不変量となる.

(2) Δ が非可換であるときは Nickel [13] によって非可換 Fitting 不変量が定義されている ([10], [15] も参照). その定義を用いて (いくつかの僅かに異なる定式化が提唱されているが適切に) $\mathcal{F}$ を定めることで, 我々の意味での Fitting 不変量となることが確かめられる [11, Section 2.3].

注意. $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \Omega$ を Fitting 不変量とする. 公理により, $\mathcal{F}$ の $\mathcal{P}$ への制限 $\mathcal{F}|_{\mathcal{P}}$ は完全列に対して加法的な $\Omega^\times$ への対応になっている. ゆえに $\mathcal{F}|_{\mathcal{P}}$ は完全圏 $\mathcal{P}$ の Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{P})$ を経由する. この観察は第 3 節において同変岩澤理論に応用する際に重要となる.

次の定理は定理 1.3 の一般化である.

定理 2.3 ([11, Theorem 2.6]). $\mathcal{F}$ を Fitting 不変量とする. 加群 $M \in \mathcal{M}$ と非負整数 n に対し, $\mathcal{M}$ 内での完全列

$$0 \rightarrow N \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \cdots \rightarrow P_n \rightarrow M \rightarrow 0$$

であって $P_i \in \mathcal{P} (i = 1, \dots, n)$ なるものを取り,

$$\mathcal{F}^{[n]}(M) = \left(\prod_{i=1}^n \mathcal{F}(P_i)^{(-1)^i} \right) \mathcal{F}(N)$$

とおくと, $\mathcal{F}^{[n]}(M)$ は *well-defined* である. さらに $\mathcal{F}^{[n]} : \mathcal{M} \rightarrow \Omega$ は再び Fitting 不変量となる.

証明. $n = 0$ の場合には自明である.

$n = 1$ とする. $\mathcal{M}$ 内での二つの完全列 $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ と $0 \rightarrow N' \rightarrow P' \rightarrow M \rightarrow 0$ であって $P, P' \in \mathcal{P}$ なるものを取る. 次のような行と列がそれぞれ完全列であるような可換図式を構成できる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & P' \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & N' & \xlongequal{\quad} & N'
 \end{array}$$

ここで L は P と P' の M 上の引き戻しである (例えば [12, §VIII.4, Proposition 2] 参照).
すると Fitting 不変量の公理から

$$\mathcal{F}(P)^{-1}\mathcal{F}(N) = \mathcal{F}(P)^{-1}\mathcal{F}(P')^{-1}\mathcal{F}(L) = \mathcal{F}(P')^{-1}\mathcal{F}(N')$$

と計算できるので, $\mathcal{F}^{[1]}(M)$ は well-defined である. また $\mathcal{F}^{[1]}$ が Fitting 不変量の公理を満たすことも確かめられる (証明は略す).

$n \geq 2$ とする. n に関する帰納法により $\mathcal{F}^{[n-1]}$ は Fitting 不変量と仮定してよい. すると $n = 1$ の場合から $(\mathcal{F}^{[n-1]})^{[1]}$ は well-defined であり, かつ Fitting 不変量となる. この $(\mathcal{F}^{[n-1]})^{[1]}$ が $\mathcal{F}^{[n]}$ に他ならない. $\square$

例 2.4. 第3節で見るように, 岩澤理論への応用では $\mathcal{F}^{[2]}(\mathbb{Z}_p)$ が重要である (系 3.1, 系 3.4). ここでは, 有限アーベル群 Δ に対し, $R = \mathbb{Z}_p[[T_1, T_2]][\Delta]$, $\mathcal{F} = \text{Fitt}_R$ とした場合の $\mathcal{F}^{[2]}(\mathbb{Z}_p)$ の計算例を紹介する. この計算は, 定理 1.2 の前で行ったように, $\mathbb{Z}_p$ の分解を具体的に構成することで行なわれる [11, Subsection 4.3].

(1) Δ が位数 m の巡回群だとして, δ をその生成元とする. このとき

$$\mathcal{F}^{[2]}(\mathbb{Z}_p) = (T_1, T_2, \delta - 1, m)$$

となる. $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_p) = (T_1, T_2, \delta - 1)$ なので, $\mathcal{F}^{[2]}(\mathbb{Z}_p)$ は $\mathcal{F}(\mathbb{Z}_p)$ より真に大きいイデアルである.

(2) Δ が位数 m_1, m_2 の巡回群の直積だとして, δ_1, δ_2 をそれぞれの生成元とする. このとき

$$\mathcal{F}^{[2]}(\mathbb{Z}_p) = (T_1, T_2, \delta_1 - 1, \delta_2 - 1)(T_1, T_2, \delta_1 - 1, \delta_2 - 1, m_1, m_2)^2 + (m_1, m_2)\mathcal{N}_\Delta$$

となる.

次に n が負整数の場合にも同様の新たな不変量を定義する.

そのための準備として, $\mathcal{M}$ の部分圏 $\mathcal{C}$ を, $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 上の射影次元が 1 以下であるもの全体のなすものとして定義する. R は $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 上の自由加群であるから, $\mathcal{P}$ は $\mathcal{C}$ に含まれている. $\mathcal{C}$ の上には次のような双対性がある. 各加群 $M \in \mathcal{C}$ に対し, $M^* = \text{Ext}_R^1(M, R)$ とおくと, これは自然に R 加群の構造をもつ². このとき $(-)^*$ は $\mathcal{C}$ 上で反変な圏同値を与えており, 自然な同型 $M^{**} \simeq M$ がある [11, Proposition 3.11].

例 2.5. (1) $d = 0$, すなわち $R = \mathbb{Z}_p[\Delta]$ とする. このとき $\mathcal{M} = \mathcal{C}$, すなわち $\mathcal{C}$ は位数有限な R 加群全体からなる. M^* は M の Pontryagin 双対に他ならない.

(2) $d = 1$ とする. このとき $\mathcal{C}$ は, 加群 $M \in \mathcal{M}$ であって非自明な有限部分加群を持たないものの全体からなる. M^* は M の岩澤随伴に他ならない.

この $\mathcal{C}$ における双対性を用いて次の命題が示される.

命題 2.6 ([11, Proposition 3.17]). $\mathcal{F}$ を Fitting 不変量とする. $\mathcal{C}$ における短完全列 $0 \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0$ であって $P \in \mathcal{P}$ なるものがあるとき, $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(P)\mathcal{F}(M')$ が成立する.

証明. M を零化する $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ の非零元 f を取る. 双対性を用いることで, $\mathcal{P}$ 内での短完全列 $0 \rightarrow P \rightarrow P' \rightarrow P'' \rightarrow 0$ であって, P' が R/fR のいくつかの直和であるようなものを構成できる. 次のような行と列がそれぞれ完全列であるような $\mathcal{C}$ 内の可換図式を構成する.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & P'' & \xlongequal{\quad} & P'' & &
 \end{array}$$

ここで N は M と P' の P 上の押し出しである ([12, §VIII.4, Proposition 2] の双対). この図式に現れる加群は全て R/fR 加群であり, P' は R/fR 上の自由加群である. ゆえに双対性を用いることで真ん中の横の行は分裂することがわかり, 特に Fitting 不変量の公理から加法性が成り立つ. 縦の二列についても Fitting 不変量の公理から加法性が成り立つので, 上の横の行についても加法性が成り立つ. $\square$

注意. 命題 2.6 は, [6] による定理 1.2 の証明に重要な役割を果たす, [6, Proposition 2.3] の一般化である. ただしこれまで見てきた通り, [11] による定理 1.2 の証明には命題 2.6 は不要である.

負整数 n に対する定理 2.3 の類似は次のものである.

²より詳しくは, M が左 (右) 加群ならば M^* は右 (左) 加群であるが, 右と左の区別は本質的ではないから本稿では無視することにする.

定理 2.7 ([11, Theorem 3.19]). $\mathcal{F}$ を *Fitting* 不変量とする. 加群 $M \in \mathcal{C}$ と負整数 n に対し, $\mathcal{C}$ 内での完全列

$$0 \rightarrow M \rightarrow P_{-n} \rightarrow \cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow N \rightarrow 0$$

であって $P_i \in \mathcal{P}(i = 1, \dots, -n)$ なるものを取り,

$$\mathcal{F}^{(n)}(M) = \left(\prod_{i=1}^{-n} \mathcal{F}(P_i)^{(-1)^i} \right) \mathcal{F}(N)$$

とおくと, $\mathcal{F}^{(n)}(M)$ は *well-defined* である.

証明. 命題 2.6 を利用して定理 2.3 の証明の双対を辿ることで示される. より詳しくは, 命題 2.6 により $\mathcal{F}|_{\mathcal{C}}$ は [11, Definition 3.16] の意味での quasi-Fitting 不変量となっており, $\mathcal{F}^{(n)} : \mathcal{C} \rightarrow \Omega$ が再び quasi-Fitting 不変量であるという主張も込めて帰納法が進む. $\square$

例 2.8. Fitting 不変量 $\mathcal{F}$ を, 例 2.2 のように可換の場合の Fitting イデアルあるいは非可換の場合の Nickel の意味での非可換 Fitting 不変量とする. このとき各 $M \in \mathcal{C}$ に対して

$$\mathcal{F}^{(-2)}(M) = \mathcal{F}(M^*)$$

が成立する [11, Proposition 4.7 and Proposition 4.12]. すなわち, $\mathcal{C}$ 内の完全列 $0 \rightarrow M \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow N \rightarrow 0$ であって $P_i \in \mathcal{P}(i = 1, 2)$ なるものがあるとき,

$$\mathcal{F}(P_1)^{-1} \mathcal{F}(P_2) \mathcal{F}(N) = \mathcal{F}(M^*)$$

が成立する. この事実は $d = 0, 1$ の場合は (例 2.5 の解釈の下で) 既知のものである (可換の場合は [1, Lemma 5] や [9, Proposition 7.3], 非可換の場合は [13, Proposition 5.3.2 and Proposition 6.3.2] を参照). そのため, $d = 0, 1$ かつ例 2.2 の $\mathcal{F}$ の場合に限れば $\mathcal{F}^{(-2)}$ の well-defined 性は先行研究により既知であり, 本論文での $\mathcal{F}^{(n)}$ はその一般化である, と捉えることもできる.

注意. 定理 2.7 では $\mathcal{F}^{(n)}(M)$ を $M \in \mathcal{C}$ と負整数 n に対して定義したが, より一般に $M \in \mathcal{M}$ と整数 n に対しても自然な拡張を定義することができる [11, Theorem 3.20]. そして $M \in \mathcal{C}$ と非負整数 n に対しては $\mathcal{F}^{(n)}(M) = \mathcal{F}^{[n]}(M)$ が成立する. しかしながら一般の $M \in \mathcal{M}$ と非負整数 n に対しては, $\mathcal{F}^{(n)}(M)$ と $\mathcal{F}^{[n]}(M)$ は必ずしも一致しない [11, Remark 3.25]. そのため論文 [11] では $\mathcal{F}^{(n)}$ と $\mathcal{F}^{[n]}$ と記号を使い分けており, 本稿でもそれを踏襲する.

§ 3. 岩澤理論への応用

§ 3.1. 非可換類似

本小節では定理 1.2 の非可換類似を導く. 第 1 節で L/K がアーベル拡大であるという仮定のみを外した状況を考える. 正確には以下の通りである. p を奇素数, L/K を総実代数体の (アーベルとは限らない) 有限次 Galois 拡大とする. 円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K_∞ と L は K 上で線形無関連であると仮定し, $G \simeq \Gamma \times \Delta$ を同様に定め, $R = \mathbb{Z}_p[[G]]$ とおく. Σ を K の素点の有限集合であって, p の上の素点と L/K で分岐する素点を全て含むものとする. Σ 分岐岩澤加群 $X_\Sigma = X_\Sigma(L_\infty)$ について $\mu = 0$ を仮定する.

定理 1.1 の非可換類似は次のようになっている. 完全列 (1.1) と同様に $\mathcal{M}$ 内 (詳しくは $\mathcal{C}$ 内) の完全列

$$0 \rightarrow X_\Sigma \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

であって $P_i \in \mathcal{P}$ ($i = 1, 2$) なるものが存在する. Grothendieck 群の元 Φ_Σ を $\Phi_\Sigma = [P_1] - [P_2] \in K_0(\mathcal{P})$ と定める. このとき Ritter-Weiss [19] によって ($\mu = 0$ の仮定の下で) 示された主予想により, Φ_Σ は同変 p 進 L 関数とみなせる.

既に注意したように, 一般に Fitting 不変量 $\mathcal{F}$ の制限 $\mathcal{F}|_p$ は $K_0(\mathcal{P})$ を経由するので, それによる Φ_Σ の像を単に $\mathcal{F}(\Phi_\Sigma)$ と書くことにする. このとき定理 2.3 により, 定理 1.2 の非可換類似である以下が成り立つ.

系 3.1. $\mathcal{F}$ を Fitting 不変量とすると,

$$\mathcal{F}(X_\Sigma) = \mathcal{F}(\Phi_\Sigma) \mathcal{F}^{[2]}(\mathbb{Z}_p)$$

が成り立つ.

§ 3.2. Σ_p 分岐岩澤加群

第 1 節と同じ状況を考える (L/K はアーベル拡大である). 第 3.1 節と同様に $\Phi_\Sigma \in K_0(\mathcal{P})$ が定義される. Σ_p を p の上にある K の素点全体の集合とし, 本小節では Σ_p 分岐岩澤加群 $X_{\Sigma_p} = X_{\Sigma_p}(L_\infty)$ を考察する.

$v \in \Sigma \setminus \Sigma_p$ に対し, $\mathcal{U}_v = \varprojlim_F \mathcal{U}_v(F)$ と定める. ここで F は L_∞/K の中間にある代数体を動き, $\mathcal{U}_v(F)$ は F の v 上の局所単数群の p 部分とする. すると類体論により, $\mathcal{C}$ 内の短完全列

$$(3.1) \quad 0 \rightarrow \bigoplus_{v \in \Sigma \setminus \Sigma_p} \mathcal{U}_v \rightarrow X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma_p} \rightarrow 0$$

がある. ここで $\bigoplus_{v \in \Sigma \setminus \Sigma_p} \mathcal{U}_v$ での完全性は, 弱 Leopoldt 予想が成立することによる.

可換群 Δ を, p 群 Δ_p と位数が p と素な群 $\Delta_{p'}$ の直積 $\Delta = \Delta_p \times \Delta_{p'}$ に分解する. $\Delta_{p'}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 値の指標 ψ に対し, $\mathcal{O}_\psi$ を $\mathbb{Z}_p$ に ψ の像を添加した環とし, 一般に $\mathbb{Z}_p[\Delta_{p'}]$ 加群 M の ψ 部分を

$$M_\psi = M \otimes_{\mathbb{Z}_p[\Delta_{p'}]} \mathcal{O}_\psi$$

と定める. この関手 $(-)_\psi$ は完全関手であり, M は ψ 部分たちの直和に分解される. この分解に応じて, 自然な意味で圏 $\mathcal{P}$ の ψ 部分 $\mathcal{P}_\psi$, 及び Φ_Σ の ψ 部分 $(\Phi_\Sigma)_\psi \in K_0(\mathcal{P}_\psi)$ も定義できる.

さて一般には列 (3.1) の三つの加群はどれも $\mathcal{P}$ に入っておらず, そのとき第2節で得た結果はいずれも適用できない. そこで $\Delta_{p'}$ の非自明な指標 ψ を取り, ψ 部分のみを見ることにする. ψ が非自明であることから $(\mathbb{Z}_p)_\psi = 0$ となり, 完全列 (1.1) より $(X_\Sigma)_\psi \in \mathcal{P}_\psi$, 及び Fitting 不変量 $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}((X_\Sigma)_\psi) = \mathcal{F}((\Phi_\Sigma)_\psi)$ を得る. そこで完全列 (3.1) の ψ 部分を見ることにより, 定理 2.7 から次を得る.

系 3.2. ψ を $\Delta_{p'}$ の非自明な指標とする. $\mathcal{F}$ を Fitting 不変量とすると,

$$\mathcal{F}((X_{\Sigma_p})_\psi) = \mathcal{F}((\Phi_\Sigma)_\psi) \mathcal{F}^{(-1)} \left(\bigoplus_{v \in \Sigma \setminus \Sigma_p} (\mathcal{U}_v)_\psi \right)$$

が成り立つ.

注意. $\mathcal{U}_v$ の R 加群としての構造は (記号が煩雑になるので本稿では省略するが) 記述できて, 特に $\mathcal{F}$ が Fitting イデアルである場合には, $\mathcal{F}^{(-1)}(\bigoplus_{v \in \Sigma \setminus \Sigma_p} (\mathcal{U}_v)_\psi)$ は計算できる. その結果得られる公式自体は既知のようである (Greither [5, Theorem 3]) が, 本論文の方法は従来の方法よりも体系的であり機械的に計算できるという利点がある.

§ 3.3. 二変数類似

本小節では定理 1.2 の二変数類似を導く.

p を奇素数, K を虚二次体とし, L/K を有限次アーベル拡大とする. K_∞ を K の唯一の $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大とし, $L_\infty = K_\infty L$ とおく. L と K_∞ は K 上で線形無関連であると仮定し, $\Delta = \text{Gal}(L/K)$, $\Gamma = \text{Gal}(K_\infty/K)$, $G = \text{Gal}(L_\infty/K)$ とおくと, 制限写像による自然な同型 $G \simeq \Gamma \times \Delta$ がある. 岩澤代数を $R = \mathbb{Z}_p[[G]] \simeq \mathbb{Z}_p[[\Gamma]][\Delta]$ とおく. Σ を K の素点の有限集合であって, p の上の素点と L/K で分岐する素点を全て含むものとする.

このとき Σ 分岐岩澤加群 $X_\Sigma = X_\Sigma(L_\infty)$ を考察するのが自然であるが, これは R 加群として (有限生成だが) ねじれ加群ではないことが知られており, このままでは第2節の結果を用いることができない. そこで p が K で二つの素点 $\mathfrak{p}, \bar{\mathfrak{p}}$ に分解すると仮定して $\Sigma_0 = \Sigma \setminus \{\bar{\mathfrak{p}}\}$ とおき, Σ_0 分岐岩澤加群 $X_{\Sigma_0} = X_{\Sigma_0}(L_\infty)$ を考察することにする.

L_∞/K の中間にある代数体 F に対して $\mathcal{U}_{\bar{\mathfrak{p}}}(F)$ を F の $\bar{\mathfrak{p}}$ 上の局所単数群の p 部分とし, $\mathcal{U}_{\bar{\mathfrak{p}}} = \varprojlim_F \mathcal{U}_{\bar{\mathfrak{p}}}(F)$ と定める. すると類体論により, 有限生成 R 加群の短完全列

$$(3.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{U}_{\bar{\mathfrak{p}}} \rightarrow X_\Sigma \rightarrow X_{\Sigma_0} \rightarrow 0$$

がある. ここで $\mathcal{U}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ での完全性は, $\mathfrak{p}$ 進 Leopoldt 予想が成立することによる. $\mathcal{U}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ と X_Σ の $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 階数が等しいこと及び完全列 (3.2) により, X_{Σ_0} は有限生成ねじれ R 加群である.

命題 3.3. $X_{\Sigma_0} \in \mathcal{C}$ である. さらに $\mathcal{M}$ 内の完全列

$$(3.3) \quad 0 \rightarrow X_{\Sigma_0} \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

であって $P_i \in \mathcal{P} (i = 1, 2)$ なるものが存在する. (なお $\mathbb{Z}_p$ の $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 上の射影次元は 2 なので $\mathbb{Z}_p$ は $\mathcal{C}$ に入らないことに注意する.)

証明. 既に記したように $X_{\Sigma_0} \in \mathcal{M}$ は知られている. $X_{\Sigma_0} \in \mathcal{C}$ であることは, [17, Theorem 23] の結果を用いて示される.

列 (1.1) と同様の方法により, 有限生成 R 加群の完全列

$$0 \rightarrow X_{\Sigma} \rightarrow P'_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$$

であって, P'_1 は射影次元が 1 以下 (だがねじれ加群ではない) かつ $P_2 \in \mathcal{P}$ であるようなものが構成できる. 列 (3.2) を用いて合成写像 $\mathcal{U}_{\bar{\mathfrak{p}}} \hookrightarrow X_{\Sigma} \hookrightarrow P'_1$ の余核を P_1 と定めることで, 完全列 (3.3) が得られる.

あとは $P_1 \in \mathcal{P}$ を示せばよい. $\mathcal{U}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ の R 上の射影次元は有限であることが, $\bar{\mathfrak{p}}$ の L_{∞}/K における分解群に位数が p の元が存在しないことから示される. ゆえに P_1 の射影次元も有限である. 一方で完全列 (3.3) 及び $X_{\Sigma_0} \in \mathcal{C}$ により $P_1 \in \mathcal{C}$ がわかる. 一般に射影次元が有限な $\mathcal{C}$ 内の加群は $\mathcal{P}$ に入るので, 以上により $P_1 \in \mathcal{P}$ が得られる. $\square$

命題 3.3 の P_1, P_2 を用いて, $\Phi_{\Sigma_0} = [P_1] - [P_2] \in K_0(\mathcal{P})$ とおく. 主予想の哲学によると Φ_{Σ_0} は p 進 L 関数とみなせると期待される. このとき定理 2.3 により以下が成り立つ.

系 3.4. $\mathcal{F}$ を *Fitting* 不変量とすると,

$$\mathcal{F}(X_{\Sigma_0}) = \mathcal{F}(\Phi_{\Sigma_0})\mathcal{F}^{[2]}(\mathbb{Z}_p)$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] Burns, D. and Greither, C., Equivariant Weierstrass preparation and values of L -functions at negative integers, *Doc. Math.*, (*Extra Vol.*), *Kazuya Kato's fiftieth birthday*, (2003), 157–185.
- [2] Coates, J., Fukaya, T., Kato, K., Sujatha, R., and Venjakob, O., The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **101** (2005), 163–208.
- [3] Cornacchia, P. and Greither, C., Fitting ideals of class groups of real fields with prime power conductor, *J. Number Theory*, **73(2)** (1998), 459–471.
- [4] Eisenbud, D., *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry.*, Springer-Verlag, 1995.

- [5] Greither, C., Computing Fitting ideals of Iwasawa modules, *Math. Z.*, **246**(4) (2004), 733–767.
- [6] Greither, C. and Kurihara, M., Tate sequences and Fitting ideals of Iwasawa modules, *Algebra i Analiz*, **27**(6) (2015), 117–149.
- [7] Greither, C. and Kurihara, M., Fitting ideals of Iwasawa modules and of the dual of class groups, *Tokyo J. Math.*, **39**(3) (2017), 619–642.
- [8] Greither, C., Kurihara, M., and Tokio, H., The second syzygy of the trivial G -module, and an equivariant main conjecture, to appear in *Development of Iwasawa Theory — the Centennial of K. Iwasawa’s Birth, Advanced Studies in Pure Mathematics*.
- [9] Greither, C. and Popescu, C. D., An equivariant main conjecture in Iwasawa theory and applications, *J. Algebraic Geom.*, **24**(4) (2015), 629–692.
- [10] Johnston, H. and Nickel, A., Noncommutative Fitting invariants and improved annihilation results, *J. Lond. Math. Soc. (2)*, **88**(1) (2013), 137–160.
- [11] Kataoka, T., Fitting invariants in equivariant Iwasawa theory, to appear in *Development of Iwasawa Theory — the Centennial of K. Iwasawa’s Birth, Advanced Studies in Pure Mathematics*.
- [12] Mac Lane, S., *Categories for the working mathematician*, Second Edition, Springer-Verlag, 1998.
- [13] Nickel, A., Non-commutative Fitting invariants and annihilation of class groups, *J. Algebra*, **323**(10) (2010), 2756–2778.
- [14] Nickel, A., Equivariant Iwasawa theory and non-abelian Stark-type conjectures, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, **106**(6) (2013), 1223–1247.
- [15] Nickel, A. (with an appendix by Johnston, H and Nickel, A), Notes on noncommutative Fitting invariants, to appear in *Development of Iwasawa Theory — the Centennial of K. Iwasawa’s Birth, Advanced Studies in Pure Mathematics*.
- [16] Northcott, D. G., *Finite free resolutions*, Cambridge University Press, 1976.
- [17] Perrin-Riou, B., Arithmétique des courbes elliptiques et théorie d’Iwasawa, *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, **17** (1984).
- [18] Ritter, J. and Weiss, A., Toward equivariant Iwasawa theory, *Manuscripta Math.*, **109**(2) (2002), 131–146.
- [19] Ritter, J. and Weiss, A., On the “main conjecture” of equivariant Iwasawa theory, *J. Amer. Math. Soc.*, **24**(4) (2011), 1015–1050.
- [20] Wiles, A., The Iwasawa conjecture for totally real fields, *Ann. of Math. (2)*, **131**(3) (1990), 493–540.