

場の理論と量子カオスの接点

東京都立大学大学院理学研究科物理 齋藤 暁¹

場の理論の立場からカオス現象を議論した研究はこれまでいくつかあるものの、大きな流れにはなっていない。しかし、非線形問題の中の「非可積分系」を「完全可積分系」に対比させて見た時、それらを区別しているものは何か、という疑問は場の理論といえども興味あるテーマである。

古典力学における「完全可積分系」は Arnold のトーラス上の運動として明確に記述される。そしてその軌道が安定に存在し続けるか、それともカオスに崩壊するかは KAM の定理によって判定できる。KAM の定理は「完全可積分系」と「非可積分系」の境界を規定している。量子系についても、同時対角化可能な演算子が自由度の数だけ在れば、系の状態を完全に決定することが出来る。しかし量子論的な KAM の定理はあるのだろうか？それを Gallavotti 等の仕事を参照しながら考察して見たい。

1 可積分系と非可積分系の接点：KAM の定理

完全可積分な d 自由度の力学系の運動は、作用変数 $\mathbf{J} = (J_1, J_2, \dots, J_d)$ 、角変数 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$ を適当に選べば $\mathbf{J} = \boldsymbol{\omega} = \text{const.}$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega}t + \text{const.}$ となり、与えられた初期値ごとに半径 $\sqrt{2J_k}$, $k = 1, 2, \dots, d$ のトーラス T^d 上に一つの軌道を描く。

もしこの系に摂動が加わり Hamiltonian が

$$H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}) = \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \epsilon V(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{J}) = \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \epsilon \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}}(\mathbf{J}) e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\theta}} \quad (1)$$

となったとしよう。和は $\mathbf{q} \in \mathbf{Z}^d$ である。母関数

$$F(\mathbf{J}', \boldsymbol{\theta}) := \mathbf{J}' \cdot \boldsymbol{\theta} + i\epsilon \sum_{\mathbf{q}} C_{\mathbf{q}}(\mathbf{J}') e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\theta}}$$

による正準変換を考えると、新しい変数 $(\boldsymbol{\theta}', \mathbf{J}')$ で書いたハミルトニアンは

$$H'(\mathbf{J}', \boldsymbol{\theta}') = H'_0(\mathbf{J}') + \epsilon \sum_{\mathbf{q}} \left\{ (V_{\mathbf{q}}(\mathbf{J}') - (\mathbf{J}' \cdot \mathbf{q}) C_{\mathbf{q}}(\mathbf{J}') \right\} e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\theta}'} + O(\epsilon^2)$$

となり、母関数の係数を

$$C_{\mathbf{q}} = \frac{V_{\mathbf{q}}}{\mathbf{J}' \cdot \mathbf{q}} = \frac{V_{\mathbf{q}}}{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{q}}$$

¹ E-mail: saito@phys.metro-u.ac.jp

と選べば摂動による ϵ の項が消去される。このような正準変換を続けることが出来ればトーラスは多少変形されながら存在し続ける。しかし

$$|\omega \cdot q| < \epsilon V_q$$

となる q において軌道間に非線形共鳴が生じるため一般にトーラスは崩壊する。これが Poincaré の主張である。

しかし、共鳴が生じる ω の測度はゼロ！ 実際、「ある定数 K 及び $\alpha \geq 2$ に対して、Diophantine 条件

$$|\omega \cdot q| \geq \frac{K}{|q|^\alpha}, \quad q \neq 0. \quad (2)$$

が満たされる限り、トーラスは崩壊から救われる」というのが KAM の定理の内容である。

2 量子場の理論と量子カオスの接点

KAM の定理を証明するには、如何に効率的に摂動展開を収束させるかが重要である。Eliasson [1] は異なる次数の摂動項をうまく組み合わせて和を取るにより絶対収束する級数を見出した。続いて Gallavotti [2] はその級数の列は場の理論におけるくりこみ群の計算に等しいことを示した。ここではその手法を主に文献 [3] に沿って、ただし後の議論に繋がり易い形に直して紹介しよう。

2.1 トーラス上の場の古典論

Hamiltonian (1) から導かれる運動方程式

$$\frac{d\theta}{dt} = J + \epsilon \frac{\partial V(\theta, J)}{\partial J}, \quad \frac{dJ}{dt} = -\epsilon \frac{\partial V(\theta, J)}{\partial \theta},$$

は、非摂動トーラス T^d 上の点を $x = \omega t + \text{const.} \in T^d$ で表し

$$\Theta(x) := \theta(x) - x, \quad \chi(x) := J - \omega - \zeta,$$

$$\left(\zeta := -\epsilon \int_{T^d} dx \frac{\partial V(\theta, J)}{\partial J} \right)$$

により、トーラス上の場 $\varphi(x) := (\Theta(x), \chi(x))$ を定義すると、ベクトル場の方程式

$$G_0^{-1} \varphi(x) = \epsilon \frac{\partial V(x, \varphi)}{\partial \varphi(x)}, \quad G_0^{-1} := \begin{pmatrix} 0 & \omega \cdot \partial_x \\ -\omega \cdot \partial_x & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。特に $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, $\int_{T^d} \varphi(x) dx = 0$ となるように場 φ を定義した。

2.2 場の量子化

この系を量子化する為に、場の方程式 (3) を導く作用と特性関数を導入する。

$$\begin{aligned}
 S &:= - \int_{T^d} dx \left(\frac{1}{2} \varphi G_0^{-1} \varphi - \epsilon V(x, \varphi(x)) \right) \\
 Z(\eta) &:= \int \mathcal{D}\varphi(x) \exp \left[iS/\hbar + i \int_{T^d} dx \varphi(x) \eta(x) \right] \\
 &= \exp \left[\frac{i\epsilon}{\hbar} \int_{T^d} dx V \left(x, \frac{\delta}{i\delta\eta} \right) \right] \int \mathcal{D}\varphi(x) \exp \left[i \int_{T^d} dx \left(-\frac{1}{2\hbar} \varphi G_0^{-1} \varphi + \varphi \eta \right) \right] \\
 &= \exp \left[\frac{i\epsilon}{\hbar} \int_{T^d} dx V \left(x, \frac{\delta}{i\delta\eta} \right) \right] \exp \left[\frac{\hbar}{2i} \int_{T^d} dx \eta G_0 \eta \right] \\
 &= \exp [i\tilde{V}X] \exp \left[\frac{\hbar}{2i} (\tilde{\eta}, \tilde{G}_0 \tilde{\eta}) \right]
 \end{aligned}$$

ただし $\sim$ は各場の Fourier 変換を表し、vertex operator および propagator はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}X &:= \frac{\epsilon}{\hbar} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m} \tilde{V}_m(\mathbf{q}_0) \delta(\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_m) (2\pi i)^{-m} \frac{\delta^m}{\delta \tilde{\eta}(\mathbf{q}_1) \dots \delta \tilde{\eta}(\mathbf{q}_m)} \\
 (\tilde{\eta}, \tilde{G}_0 \tilde{\eta}) &:= \sum_{\mathbf{q}} \tilde{\eta}(\mathbf{q}) \begin{pmatrix} -(\omega \cdot \mathbf{q})^{-2} & i(\omega \cdot \mathbf{q})^{-1} \\ -i(\omega \cdot \mathbf{q})^{-1} & 0 \end{pmatrix} \tilde{\eta}(\mathbf{q})
 \end{aligned}$$

である。 $\tilde{V}_m(0)$, $m = 0, 1, \dots$ は無限個の '結合定数' を与える。これらから特に 1 点関数は

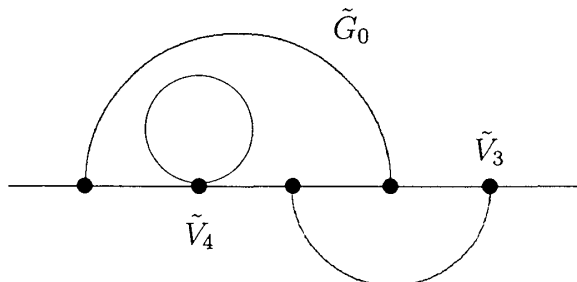
$$\langle \tilde{\varphi}(\mathbf{q}) \rangle := \frac{1}{Z(0)} \frac{\delta Z(\tilde{\eta})}{i\delta \tilde{\eta}(\mathbf{q})} \Big|_{\tilde{\eta}=0} = - \frac{\hbar}{Z(0)} e^{i\tilde{V}X} \exp \left[\hbar(\tilde{\eta}, \tilde{G}_0 \tilde{\eta})/2i \right] \tilde{G}_0(\omega \cdot \mathbf{q}) \tilde{\eta}(\mathbf{q}) \Big|_{\tilde{\eta}=0}$$

を計算して求められる。

Feynman 則を

$$\text{---} = \frac{\hbar}{i} \tilde{G}_0(\omega \cdot \mathbf{q}), \quad \begin{array}{c} \mathbf{q}_m \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ \mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \end{array} = \frac{\epsilon}{\hbar} \tilde{V}_m(\mathbf{q}_0) \delta(\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 + \dots + \mathbf{q}_m) (2\pi i)^{-m} \quad (4)$$

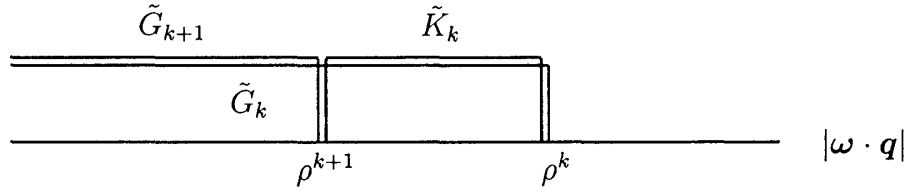
のように定めると、例えば propagator に対する摂動 5 次の Feynman 図形の 1 つは次のようになる。



2.3 くりこみ群 (resummation)

$\rho < 1$ を勝手に一つ決め、 $|\omega \cdot q|$ を領域 $\rho^{k+1} \leq |\omega \cdot q| \leq \rho^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に分けて、各領域毎に propagator を

$$\tilde{G}_{k+1} := \tilde{G}_k - \tilde{K}_k, \quad \begin{cases} \tilde{G}_k(\omega \cdot q) \neq 0, & |\omega \cdot q| \leq \rho^k, \\ \tilde{K}_k \neq 0, & \rho^{k+1} \leq |\omega \cdot q| \leq \rho^k, \end{cases}$$



により、また vertex operator $\tilde{V}^{(k)}X$ を

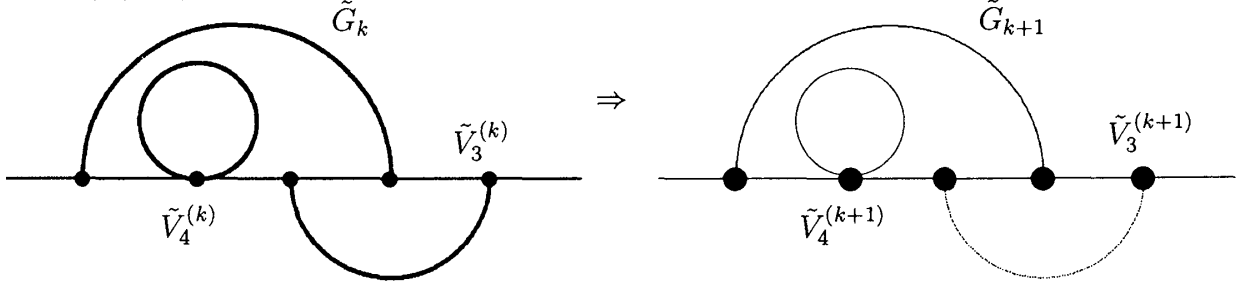
$$\begin{aligned} e^{i\tilde{V}X} \exp \left[\hbar(\tilde{\eta}, \tilde{G}_0\tilde{\eta})/2i \right] &= e^{i\tilde{V}X} \exp \left[\hbar(\tilde{\eta}, (\tilde{K}_0 + \tilde{G}_1)\tilde{\eta})/2i \right] \\ &= e^{i\tilde{V}^{(1)}X} \exp \left[\hbar(\tilde{\eta}, \tilde{G}_1\tilde{\eta})/2i \right] = \dots = e^{i\tilde{V}^{(k)}X} \exp \left[\hbar(\tilde{\eta}, (\tilde{K}_k + \tilde{G}_{k+1})\tilde{\eta})/2i \right] \\ &= e^{i\tilde{V}^{(k+1)}X} \exp \left[\hbar(\tilde{\eta}, \tilde{G}_{k+1}\tilde{\eta})/2i \right] = \dots = e^{i\tilde{V}^{(n)}X} \exp \left[\hbar(\tilde{\eta}, \tilde{G}_n\tilde{\eta})/2i \right] \end{aligned}$$

により帰納的に定義する。

この操作の各段階で、propagator のうちの或る値より大きなエネルギーの寄与は

$$e^{i\tilde{V}^{(k+1)}X} = \exp \left[\frac{\hbar}{2i} e^{i\tilde{V}^{(k)}X} (\tilde{\eta}, \tilde{K}_k\tilde{\eta}) e^{-i\tilde{V}^{(k)}X} \right] e^{i\tilde{V}^{(k)}X}$$

と云う規則で結合定数にくりこまれて新しい結合定数に置き換わる： $\tilde{V}_m^{(k)}(0) \rightarrow \tilde{V}_m^{(k+1)}(0)$, $m = 0, 1, \dots, \infty$. 従って新しいくりこみ定数には摂動の異なる次数の寄与が含まれる。



同様に場もくりこみを受けるが、大きな n について $\tilde{G}_n$ からの寄与はゼロになることを示すことが出来る [2, 3]。従って充分大きな n について

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}(q) \rangle_n &:= \frac{-\hbar}{Z_n(0)} e^{i\tilde{V}^{(n)}X} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{K}_k(\omega \cdot q) \tilde{\eta}(q) \Big|_{\tilde{\eta}=0} \\ &= -i\epsilon \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{K}_k(\omega \cdot q) V_1^{(n)}(0) \end{aligned} \quad (5)$$

が成り立つ。

3 古典極限と量子効果

Planck 定数 $\hbar$ に注目すると、与えられた Feynman 図形に対して、

各 vertex operator は因子 $\frac{\epsilon}{\hbar}$

各 propagator は因子 $\frac{\hbar}{|\omega \cdot q|^a}$, $a = 1, 2$

ずつ寄与する。従って loop があると、その数だけ $\hbar$ の次数は上がる。

1. 古典極限： 古典極限 $\hbar \rightarrow 0$ において (5) への寄与は tree 図形だけになる。



「KAM の定理に対する Eliasson の絶対収束級数は (5) の tree 極限に等しい」

ことを Gallavotti は示した。

2. WKB 近似： 各古典 tree 図形に対して one-loop 図形が加わり、因子 $\frac{\hbar}{|\omega \cdot q|^a}$ 増える。Feynman 図形としては例えば



が寄与する。各 loop の寄与を計算すると

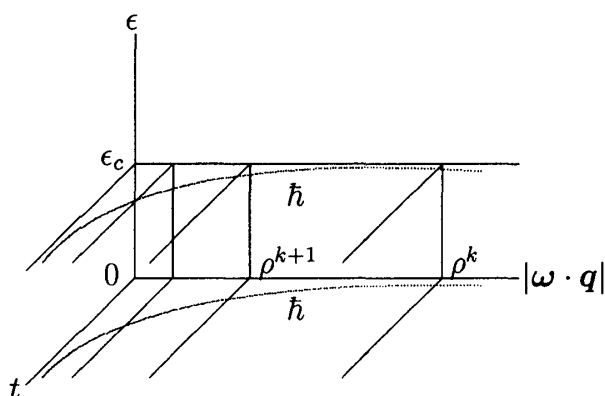
$$\begin{aligned} \text{Circular loop diagram} &= i \frac{\hbar \epsilon}{(2\pi i)^4} \tilde{V}_4(q_0) \Sigma(\omega), \\ \text{Semi-circular loop diagram} &= - \frac{\hbar \epsilon^2}{(2\pi i)^6} \tilde{V}_3^2(q_0) \frac{2}{(\omega \cdot q_0)^2} \Sigma(\omega) \end{aligned}$$

ただし

$$\Sigma(\omega) = \sum_{q \neq 0} \frac{1}{(\omega \cdot q)^2}.$$

である。

3. 量子論： multi-loop が寄与する。不確定性関係 $\Delta|\omega \cdot q| \Delta t \geq \hbar/2$ が一般に成り立つので、Diophantine 条件 (2) が満たされないのは大きな t に限られる。下図で $\epsilon = 0$ の面では全ての $|\omega \cdot q|$ で完全可積分、 $\epsilon = \epsilon_c$ より下の面では Diophantine 条件が満たされるときに可積分となる。 ϵ_c は解析接続可能な摂動パラメーターの値を表す。



4. 超弦理論との接点

摂動ポテンシャル V は $\theta = \Theta + x$ と J との関数であった。このことから β を定数ベクトルとして変換 $x \rightarrow x + \beta$, $\Theta \rightarrow \Theta - \beta$ の下で場の方程式 (3) は不変である。この対称性により成り立つ Ward-Takahashi 恒等式を用いて、Poincaré の共鳴に相殺が起こることを示すことが出来る [3]。

これをコンパクト化した時空における超弦理論のボソン場座標と比べてみよう。

$$X(\tau) = x_0 + \omega\tau + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m e^{-im\tau} + \alpha_{-m} e^{im\tau}),$$

ここで τ は弦の固有時間を意味する。

$$x = x_0 + \omega\tau, \quad \Theta(x) = X(\tau) - x$$

と置けば x は不変トーラスの座標、 $\Theta(x)$ はその摂動による変形である。摂動の大きさ ϵ は弦の張力 $1/(2\pi\alpha')$ に関係していることになる。

弦理論を、可積分な点粒子の不変トーラス上の運動に対して α' を摂動パラメーターとして解析的に変形したものと考えよう。即ち、変形ポテンシャル V は X の解析関数とする。するとこれまでの議論から弦の運動は可積分性を保ち、KAM トーラス上の運動と見なせる。

参考文献

- [1] L.H.Eliasson, Reports Department of Math., University of Stockholm, Sweden, No.2, 1-31 (1988), Math. Phys. Elect. Journ. 4 (1996) 1-33
- [2] G.Gallavotti, Comm. Math. Phys. 164 (1994) 145
G.Gallavotti, G.Gentile and V.Mastropietro, Field theory and KAM tori
- [3] J.Bricmont, K.Gawedzki and A.Kupiainen, Comm. Math. Phys. 201 (1999) 699-727.