

The Peripheral Subgroup of a Knotted Torus in S^4

大阪市立大学理学部 金信 泰造 (Kanenobu Taizo)

F を S^4 内に埋め込まれたトーラスとし, X をその exterior とする. 包含写像 $i: \partial X \rightarrow X$ から導かれた写像 i_* による $\pi_1(\partial X)$ の像を F の peripheral subgroup と呼ぶ. 従って, F の peripheral subgroup は meridian で生成された無限巡回群と $\pi_1(F) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ のある剰余群 (これを F のタイプと呼び, $\tau(F)$ で表わす.) の直和となる. これまでに, タイプが $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$, 0 ($[A]$, $[G]$, $[Lt]$, $[Lv]$), および, $\mathbb{Z}_n$ ($n = 2, 5, 10$) ($[B]$) のトーラスが知られていたが, ここでは, 次の定理を示す.

定理. 任意の自然数 p についてタイプが $\mathbb{Z}_p$ であるような S^4 内に埋め込まれたトーラスが存在する.

K を 2-knot (S^4 内の S^2 内の結び目), h を K 上の 1-handle とするとき, h を K にはりつけてできるトーラスを $K+h$ とかく. h の core は $\pi = \pi_1(S^4 - K)$ の元 g を代表すると考えられる. $g = t^n g'$, $g' \in \pi' = [\pi, \pi]$, t を K の meridian とする. $T(h) = \{ t^n g' t^{-n} \mid n \text{ は整数} \}$ を h の orbit とよぶ.

命題. $K+h$ の群, すなわち, $\pi_1(S^4 - K+h)$ は, $\pi/[t, T(h)]$ である. また, $K+h$ の peripheral subgroup は t と $T(h)$ によって生成される $\pi/[t, T(h)]$ の部分群である. 従って, p を $T(h)$ の $\pi/[t, T(h)]$ における位数とすると, $K+h$ のタイプは $\mathbb{Z}_p$ である.

以上は, Boyle[B] に述べられていることをまとめたものである. Boyle は 5-twist spun trefoil 上の 1-handle の分類をおこなって, タイプが Z_n ($n=2, 5, 10$) のトーラスを発見した. ここでは, (6-twist spun trefoil) + (1-handle) によって定理の例を構成する. 以下, K を 6-twist spun trefoil とする. $\pi = \pi_1(S^4 - K)$ は次のような表示をもつ ([Z]).

$$\langle x, y \mid xyx = yxy, [x^6, y] = 1 \rangle$$

但し, x と y は meridians である. $a = yx^{-1}$ とおくと,

$$\langle x, a \mid xax^{-1} = a (x^2ax^{-2}), x^6ax^{-6} = a \rangle$$

さらに, $a_i = x^i a x^{-i}$ とおくと, π' は次のように表示される.

$$\langle a_0, a_1, \dots, a_5 \mid a_0 = a_5 a_1, a_1 = a_0 a_2, \dots, a_5 = a_4 a_0 \rangle$$

$b = a_1$ とおくと,

$$a_2 = a^{-1}b, a_3 = b^{-1}a^{-1}b, a_4 = ab^{-1}a^{-1}, a_5 = ab^{-1}$$

となり, このことから π' は

$$\langle a, b, c \mid [a, c] = [b, c] = 1, c = [a, b] \rangle$$

という表示をもつ. $\pi'' = [\pi', \pi'] = \langle c \mid \rangle \cong Z$ は, π' の中心で, $\pi' / \pi'' = \langle a, b \mid [a, b] = 1 \rangle \cong Z + Z$ である.

Claim 1. π' の任意の元は一意的に $a^k b^l c^m$, $k, l, m \in Z$, と表わすことができる.

Claim 2. π' において次が成り立つ.

$$(b^m a^n)^k = a^{nk} b^{mk} c^{-mnk(k+1)/2}$$

$w \in \pi'$ に対応する K 上の 1-handle を $h(w)$ とかく.

Claim 3. $h(c^m)$ の orbit は長さが 1 である: $T(h(c^m)) = \{c^m\}$. また, これ以外の orbit は長さが 6 である: $T(h(w)) = \{w, w_1, \dots, w_5\}$.

但し $w = a^k b^l c^m$, $(k, l) \neq (0, 0)$, $w_i = x^i w x^{-i}$

$$w_1 = a^{-1} b^{k+1} c^{k l + 1(1-1)/2+m};$$

$$w_2 = a^{-k-1} b^k c^{(k-1)l+k(k-1)/2+m};$$

$$w_3 = a^{-k} b^{-1} c^{-k-1+m};$$

$$w_4 = a^1 b^{-k-1} c^{k l - k + 1(1-1)/2+m};$$

$$w_5 = a^{k+1} b^{-k} c^{k l + k(k-1)/2+m}.$$

$K+h(c^m)$ の群 $G(k, l, m) = \pi_1(S^4 - K+h(c^m))$ は次の表示をもつ.

$$\langle x, a, b, c \mid x a x^{-1} = b, x b x^{-1} = a^{-1} b, [a, c] = [b, c] = 1, c = [a, b],$$

$$w = w_1 = \dots = w_5 \rangle$$

この群の交換子部分群 $G'(k, l, m)$ は次の表示をもつ.

$$\langle a, b, c \mid [a, c] = [b, c] = 1, c = [a, b], w = w_1 = \dots = w_5 \rangle$$

Claim 4. $G'(k, l, m)$ において, $c^k = c^l = 1$ である.

証明. $w = w_1$ から, $b^k = a^{k+1} c^{-k l - 1(1-1)/2}$ を得るが, この元は a と可換である. 一方, Claim 2 より, $a b^k a^{-1} b^{-k} = a a^{-1} b^k c^k b^{-k} = c^k$ で, これは単位元である. 同様にして, $w_1 = w_2$ より, $c^l = 1$ を得る. $\square$

従って Claim 3 の $w_1, \dots, w_5$ は次のようになる.

$$w_1 = a^{-1} b^{k+1} c^{1(1-1)/2+m};$$

$$w_2 = a^{-k-1} b^k c^{k(k-1)/2+m};$$

$$w_3 = a^{-k} b^{-1} c^m;$$

$$w_4 = a^1 b^{-k-1} c^{1(1-1)/2+m};$$

$$w_5 = a^{k+1} b^{-k} c^{k(k-1)/2+m}.$$

$G'(k, l, m)$ において c で生成される部分群を $\langle c \rangle$ とすると, $\langle c \rangle$ は $G'(k, l, m)$ の交換子部分群で $G'(k, l, m) / \langle c \rangle$ は位数が $k^2 + k l + l^2$ のアーベル群である. 従って,

Claim 5. $(k, 1) \neq (0, 0)$ ならば, $G'(k, 1, m)$ は有限群である.

以下, $G'(k, 0, m)$ について考察する. この群は次の表示をもつ.

$$\langle a, b, c \mid [a, c] = [b, c] = 1, c = [a, b], a^k = b^k = c^{k(k-1)/2}, c^k = 1 \rangle$$

また, この群をアーベル化すると,

$$\langle a, b \mid a^k = b^k = [a, b] = 1 \rangle \cong Z_{|k|} + Z_{|k|}$$

Claim 6. もしも k が奇数ならば $G'(k, 0, m)$ は次の表示をもつ.

$$\langle a, b, c \mid [a, c] = [b, c] = 1, c = [a, b], a^k = b^k = c^k = 1 \rangle$$

この群の交換子部分群は

$$\langle c \mid c^k = 1 \rangle \cong Z_{|k|}$$

である. 従って, $G'(k, 0, m)$ の位数は $|k|^3$ で, $w = c^m$ の位数は $|k/\gcd(k, m)|$ である.

証明. $G'(k, 0, m)$ から, 次の行列の群への表現 ϕ がある:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & r & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; r, s, t \in Z_{|k|} \right\} \quad \text{但し, } \phi(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[J, Chapter 5, Exercise 4]. 従って c の位数は $|k|$ である. $\square$

Claim 7. もしも k が偶数ならば $G'(k, 0, m)$ は次の表示をもつ.

$$\langle a, b, c \mid [a, c] = [b, c] = 1, c = [a, b], a^k = b^k = c^{k/2}, c^k = 1 \rangle$$

この群の交換子部分群は

$$\langle c \mid c^k = 1 \rangle \cong Z_{|k|}$$

である. 従って, $G'(k, 0, m)$ の位数は $|k|^3$ で, $w = c^{m+k/2}$ の位数は $|k/\gcd(k, m+k/2)|$ である.

証明. $k = 2r > 0$ とする. Reidemeister-Schreier の方法 [J, Chapter 9] によって, $G'(k, 0, m)/N = \langle a \mid a^{2r} = 1 \rangle$ となる正規部分群 N が $\langle b, c \mid c^{2r} = b^{4r} = [b, c] = 1 \rangle = Z_{2r} + Z_{4r}$ となることを示す. $\square$

Claim 8. $H_2(G(k, 0, m)) = 0$

証明. $k = 2r > 0$ の場合を考える. H を $a^{2r}c^{-r}$, $b^{2r}c^{-r}$, c^{2r} で生成された π の部分群とする. H が π の正規部分群であることがわかり, $\pi/H = G'(k, 0, m)$ となる. π は2次元結び目群なので $H_2(\pi) = 0$ ([K]). また, 明らかに $H \subset \pi'$ である. [BMS, Lemma 1.4.1] により, $H_2(\pi/H) = H/[H, \pi]$ この群が自明であることはすぐにわかる. $\square$

参考文献

- [A] K. Asano: A note on surfaces in 4-spheres, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 4, 195-198, 1976.
- [BMS] A. M. Brunner, E. J. Mayland, Jr. and J. Simon: Knot groups in S^4 with nontrivial homology, Pacific J. Math., 103, 315-324, 1982.
- [B] J. Boyle: Classifying 1-handles attached to knotted surfaces, Trans. Amer. Math. Soc., 306, 475-487, 1988.
- [G] C. M. Gordon: Homology of groups of surfaces in the 4-sphere, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 89, 113-117, 1981.
- [J] D. L. Johnson: Presentations of Groups, 1990, Cambridge University Press.
- [K] M. Kervaire: Les noeuds de dimensions supérieures, Bull. Soc. Math. France, 93, 225-271, 1965.
- [Lt] R. A. Litherland: The second homology of the group of a knotted surface, Quart. J. Math. Oxford, (2), 32, 425-434, 1981.
- [Lv] C. Livingston: Stably irreducible surfaces in S^4 , Pacific J. Math., 116, 77-84, 1985.
- [Z] E. C. Zeeman: Twisting spun knots, Trans. Amer. Math. Soc., 115, 471-495, 1965.