

細位相の連結性について

阪大理 渡辺 毅

§ 0. 序

B. Fuglede [C1] は, Brelot 調和空間の細位相の連結性について興味ある研究を行い, さらにいくつかの 'Open Problems' を提出した. これらの 'Open Problems' は Fuglede [C2] によって大部分解決され, 細位相に関する Dirichlet 問題に応用された. この報告では, § 1 において標準 Markov 過程の細位相の連結性を研究し, § 2 において, § 1 の結果を用いて確率論的に Fuglede の問題を解決する. これは ^N Nguyen-Xuan-Loc と筆者の共同研究 [C3] によってえられたものである.

Ω を Brelot の調和空間 $[A1, (a)]$, ω を相対コンパクトな Ω の部分集合とする. ω における Dirichlet 問題は, ω の相対境界 $\partial\omega$ 上で与えられた連続関数 f と一致し, ω において調和な関数 u を求めることである. ω を細位相開集合におきかえた時 Dirichlet 問題がどうなるであろうかというものが, Fuglede [C2] の研究である. [C1] における連結性の研究は, 細位相 Dirichlet 問題が動機であったことを筆者は

Fuglede 氏から聞いた。そこで Dirichlet 問題について深入りすることはできないが、両者の関係を暗示する 1 つの結果を以下に説明する。

Ω において相対コンパクトな閉集合 ω について Dirichlet 問題が解けるとき、 ω は 正則である という。Brelot の調和空間では、

- 1) 正則かつ連結な閉集合が Ω の位相の基をなす、
 - 2) 正則かつ連結な閉集合 ω における調和測度 ρ_ω^ω の台は ω である、
- という性質が成り立つ。^(*) 細位相における類似としてつぎの結果を示すことができる。

定理 A. Ω の各点 x について、細位相に関する x の基本近傍系 $\mathcal{V}_x$ としてつぎの条件をみたすものが存在する。

- 1) $\forall V \in \mathcal{V}_x$ は 細位相に関して連結な x の近傍である。
- 2) 調和測度 ρ_x^V の細位相による台は V の細位相相対境界 $\partial_f V$ と一致する。

この定理および Fuglede の 'Open Problems' の大部分は次の定理から証明することができる。

(*) (1) は公理 A2 である。(2) は他の公理と合わせて容易に示される。

定理 B. A を細位相に関する連結な開集合, e を A に含まれる極集合とすれば, $A \setminus e$ も細位相に関する連結な開集合である.

最後に本稿で引用する文献をテーマ別にあげておく.

[A] 調和空間論 = 公理的 Potential 論

古典的な Newton-Green のポテンシャル論の拡張として Brelot によって導入された

1. Brelot 調和空間

- (a) M. Brelot: Lectures on Potential theory, Tata Inst. 1960.
- (b) ———: Axiomatique des fonctions harmoniques, Press Univ. Montréal, 1966.
- (c) R. M. Hervé: Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 14 (1964), 415–571.

~~Brelot~~ Brelot の公理を拡張し, 熱方程式のポテンシャル論を含む

2. Bauer 調和空間

H. Bauer: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes in Math. (Springer), vol. 22 (1966).

1, 2 より一般的な

3. Botea-Constantinescu-Cornea: Axiomatic theory of

harmonic functions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble),
15 (1965), 283-312.

上の 1, 2, 3 には連続な Markov 過程が対応するか, 不連続な Markov 過程も許すものとして,

4. W. Hansen: Potentialtheorie harmonischer Kerne, Seminar über Potentialtheorie, Lecture Notes in Math. (Springer), vol. 69 (1968), pp. 103-157.

[B] 調和空間論と Markov 過程の関係.

Bauer の総合報告

1. H. Bauer: Harmonic spaces and associated Markov processes, Potential theory, C.I.M.E. (1970), 24-67.

の中に両者のポテンシャル論的概念の関係が要領よく説明されている。特に Markov 過程の構成を論じたものとしては,

2. W. Hansen: Konstruktion von Halbgruppen und Markoffschen Prozessen, Inventiones Math. 3 (1967), 179-214.

3. P. A. Meyer: Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 13 (1963), 357-372.

がある。ここでは Brelot 調和空間に対応する Markov 過程の構成

が論じられている。ここではと異なる方法で Bauer 調和空間
の場合を扱っている。

[C] 細位相の連結性.

1. B. Fuglede: Propriétés de connexion en topologie fine,
Preprint, 1969, Copenhagen.
2. ———: Fine connectivity and finely harmonic
functions, to appear in Proc. Nice Congress.
3. Nguyen-Xuan-Loc, T. Watanabe: A probabilistic
approach to the problem of connectivity in the fine
topology, to appear.

[D] 標準 Markov 過程の一般論

1. R. M. Blumenthal - R. K. Gettoor: Markov processes and
potential theory, Academic Press (1968).
2. P. A. Meyer: Processus de Markov, Lecture Notes in
Math. (Springer), vol 26, 1967.

§ 1. 標準過程における細位相の連結性と調和測度
記号や用語は主として [D 1, 2] にしたがう。

1. E を可算基をもつ局所コンパクト Hausdorff 空間,
 $(P_t)_{t \geq 0}$ を E 上の標準半群,

$$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (X(t))_{t \geq 0}, \mathbb{P}^\mu, (P_t)_{t \geq 0})$$

を $(P_t)_{t \geq 0}$ の標準的な実現 ($= (P_t)$ を推移確率にもつ標準 Markov 過程) とする. E の無限遠点を Δ , 1 点コンパクト化を E_Δ で表わす. $\mathcal{F}, \mathcal{F}_t$ は [D1, p. 27] における見備な σ -代数を意味する.

E の部分集合 A に対し, $\bar{A}$ は $(E_\Delta$ でなく) E における A の補集合を表わす.

X の細位相に関する対象には f ($=$ fine, finely) をつけて記す. 例えば, f -閉集合は細位相閉集合, $\partial_f A$ は細位相による A の相対境界を表わす. 同様に細位相による A の閉包を f -cl A , 内部を f -int A で表わす. A の正則点の全体を A° で表わす. f -cl $A = A \cup A^\circ$ である.

E における universally 可測集合の族を $\mathcal{B}_u(E)$, $\mathcal{B}_u(E)$ -可測な非負関数の全体を $p\mathcal{B}_u(E)$ で表わす.

調和測度は E 上の測度と考える. すなわち E の nearly Borel 集合 A に対し,

$$T_A = \inf \{ t > 0; X(t) \in A \}, \text{ ただし } \inf \phi = +\infty,$$

$$H_A(x, B) = \mathbb{P}_x^X (X(T_A) \in B), \quad B \in \mathcal{B}_u(E)$$

である.

$(P_t)_{t \geq 0}$ のポテンシャル核を U とする:

$$(1.1) \quad Uf(x) := \mathbb{E}_x^X \left(\int_0^\infty f \circ X(t) dt \right) = \int_0^\infty P_t f(x) dt.$$

nearly Borel 集合 A に対し,

$$(1.2) \quad \tilde{\zeta}(\omega) = T_{E_A \setminus A}(\omega),$$

$$(1.3) \quad \tilde{X}(t, \omega) = \begin{cases} X(t, \omega), & t < \tilde{\zeta}(\omega) \\ \Delta & t \geq \tilde{\zeta}(\omega) \end{cases}$$

とおき, $(\tilde{X}(t))_{t \geq 0}$ を A 上の 局所過程 と呼ぶ.

$$(1.4) \quad M_t := I_{[0, \tilde{\zeta})}(t),$$

$$(1.5) \quad Q_t f(x) := \underline{E}^x \{ f \circ X(t) \cdot M_t \} = \underline{E}^x (f \circ \tilde{X}(t))$$

とおき, 半群 $(Q_t)_{t \geq 0}$ のポテンシャル核を V で表やす. 強 Markov 性によって

$$(1.6) \quad Uf = Vf + H_{E_A \setminus A} Uf, \quad f \in pB_u(E)$$

であるから, $(M_t)_{t \geq 0}$ は [D1, p. 117] の意味で exact な乗法汎関数である.

2. Lemma. u が (X, M) -超過関数ならば, u は nearly Borel 可測である.

証明. (i) U が有界核の場合. f が $pB_u(E)$ の有界関数であるとき, (1.6) によって Vf は 2 つの X -超過関数 (したがって nearly Borel) 関数 Uf と $H_{E_A \setminus A} Uf$ の差として表わされるから nearly Borel である. したがって, $Vf, Vf \in pB_u(E)$ も nearly Borel. u は V -ポテンシャル $\{Vf_n\}$, $f_n \in pB_u(E)$ の増加極限として表わされる^(*) から, nearly Borel である.

(*) P. A. Meyer: Probability and Potentials, p. 242.

(ii) 一般の場合. $\alpha > 0$ にたいし, u は α -(X, M)-超過的である. α -過程にたいしてはつねに(i)の仮定がみたされるから, (i)によって u は nearly Borel である.

3. Lemma. B を A に含まれる nearly Borel 集合, $\tilde{T}_B$ を $(\tilde{X}(t))_{t \geq 0}$ に関する B への最小到達時間としたとき,

$$(3.1) \quad u(x) := \underline{P}^x \{ \tilde{T}_B < \infty \} = \underline{P}^x \{ T_B < \tilde{\zeta} \}$$

は (X, M) -超過的である.

証明.

$$\begin{aligned} Q_t u(x) &= \underline{E}^x \{ u \circ X(t) \cdot M_t \} \\ &= \underline{E}^x [\underline{P}^{X(t)} \{ T_B < \tilde{\zeta} \} ; t < \tilde{\zeta}] \\ &= \underline{P}^x \{ T_B \circ \theta_t < \tilde{\zeta} \circ \theta_t, t < \tilde{\zeta} \} = (*). \end{aligned}$$

$t > \tilde{\zeta}$ ならば $\tilde{\zeta} = t + \tilde{\zeta} \circ \theta_t$ であり, 一般に $t + T_B \circ \theta_t \geq T_B$ であることに注意して,

$$\begin{aligned} (*) &= \underline{P}^x \{ t + T_B \circ \theta_t < \tilde{\zeta}, t < \tilde{\zeta} \} \\ &\leq \underline{P}^x \{ T_B < \tilde{\zeta} \} = u(x). \end{aligned}$$

$t_n \downarrow 0$ ならば, $t_n + T_B \circ \theta_{t_n} \downarrow T_B$ であるから

$$\begin{aligned} \{ t_n + T_B \circ \theta_{t_n} < \tilde{\zeta}, t_n < \tilde{\zeta} \} &\uparrow \{ T_B < \tilde{\zeta}, 0 < \tilde{\zeta} \} \\ &= \{ T_B < \tilde{\zeta} \}. \end{aligned}$$

したがって, $u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow Q_{t_n} u(x)$ である.

4. 定理. A は nearly Borel な E の f -領域 (= f -開かつ f -連結な集合) で, B は A の nearly Borel 部分集合で

$$(4.1) \quad A \cap B^c \neq \emptyset$$

をみたすとする。そのとき

$$(4.2) \quad \underline{P}^x \{ \tilde{T}_B < \infty \} > 0, \quad \forall x \in A.$$

証明. (M_t) の permanent point の集合を E_M とする. A は f -閉集合だから

$$(4.3) \quad E_M = \{ x; \underline{P}^x(\tilde{\zeta} > 0) = 1 \} \supset A.$$

いま

$$C := \{ x \in A; \underline{P}^x(\tilde{T}_B < \infty) > 0 \}$$

とおく.

$$(i) \quad C \neq \emptyset.$$

$x \in A \cap B^c$ を取れ. そのとき,

$$\underline{P}^x \{ \tilde{T}_B = 0 \} = \underline{P}^x \{ T_B = 0, 0 < \tilde{\zeta} \} = 1.$$

$$(ii) \quad C \text{ は } f\text{-閉かつ nearly Borel である.}$$

Lemma 3 によつて, $\underline{P}^x \{ \tilde{T}_B < \infty \}$ は (X, M) -超過剰である. したがつて nearly Borel であり,

$$C = A \cap \{ x \in E; \underline{P}^x(\tilde{T}_B < \infty) > 0 \}$$

も nearly Borel である. また [D1; p. 130, (5.8)] によつて, $\underline{P}^x \{ \tilde{T}_B < \infty \}$ は E_M 上で f -連続, したがつて A 上でも f -連続である. ゆえに C は A の相対 f -位相で閉, したがつて f -閉集合である.

(iii) $C = A$.

A が f -連結であるから, C が A の相対細位相に関して f -開集合であることを示せば十分である. C が A において f -開でないとするは, $x \notin C$, x は C にたいして正則であるような A の点 x が存在する. ($f\text{-cl } C \cap A = (f\text{-cl } C) \cap A = (C \cup C^c) \cap A$ による.) ゆえに $\underline{P}^x\{T_C = 0\} = 1$. したがって, C に含まれるコンパクト集合の増大列で

$$\underline{P}^x\{T_{K_n} \downarrow 0\} = 1$$

となるものを選ぶことができる. $\underline{P}^x\{\tilde{\tau} > 0\} = 1$ であるから, 十分大きな n にたいして

$$\underline{P}^x\{T_{K_n} < \tilde{\tau}\} > 0$$

である. このとき

$$\begin{aligned} \underline{P}^x\{\tilde{T}_B < \infty\} &= \underline{P}^x\{T_B < \tilde{\tau}\} \\ &\geq \underline{P}^x\{T_{K_n} + T_B \circ \theta_{T_{K_n}} < \tilde{\tau}, T_{K_n} < \tilde{\tau}\} \\ &= \underline{E}^x\{P^{X(T_{K_n})}(T_B < \tilde{\tau}); T_{K_n} < \tilde{\tau}\} > 0, \end{aligned}$$

これは $x \notin C$ に矛盾する.

5. 定理. つぎの2つの条件を仮定する.

(5.1) すべての f -開集合は nearly Borel である.

(5.2) すべての nearly Borel 集合 B とすべての $x \in f\text{-int } B$ に $(fB)^x$ にたいして, $H_B(x, \cdot)$ は $\partial_f B$ に支えられている.

A は f -開集合とする. この時, A が f -連結であるための必

要十分条件は, 全ての $x \in A$ と全ての A に含まれる f -開集合 $\overset{B}{A}$ について,

$$(5.3) \quad \mathbb{P}^x(\tilde{\tau}_B < \infty) > 0$$

が成り立つことである. ただし $\tilde{\tau}_B$ は A 上の局所過程 $(\tilde{X}(t))$ に関する B への最小到達時間である.

証明. (i) 必要. (5.1), (5.2) の条件は不要である. B が nearly Borel な A の部分 f -開集合であるとき, $B \subset B^2$ だから, $A \cap B^2 \supset B \neq \emptyset$. したがって定理 4 により (5.3) が成り立つ.

(ii) 十分. A が f -連結でないとき. このとき 2 つの f -開集合 B_1, B_2 が存在して, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = A$ である. したがって下の位相的 Lemma により $\partial_f B_1 \subset \partial_f A$.

Lemma. E は位相空間, A は E の部分集合, B_i ($i=1,2$) は A の部分集合で相対位相に関して開, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $B_1 \cup B_2 = A$ とする. この時 $\partial B_1 \cup \partial B_2 \subset \partial A$ である.

Lemma の証明. B_i' を $B_i' = B_i' \cap A$ であるような開集合とし, $B_i'' = B_i' \cap \text{int} A$ を考える.

$$B_i'' = B_i' \cap A \cap \text{int} A = B_i' \cap \text{int} A = \text{int} B_i$$

は開集合で, $B_1'' \cap B_2'' = \emptyset$, $B_1'' \cup B_2'' = \text{int} A$.

$x \in \partial B_1$ なら $x \in \partial A$ は明らか. $x \in \text{int} A$ ならば " $x \in B_1'' = \text{int} B_1$ か $x \in B_2'' \subset \text{ext} B_1$ だろうか" ではなく, "いずれも不可能である. ゆえに $x \in \partial A$." 』

$x \in B_1$ について

$$(5.4) \quad \underline{P}^x(\tilde{T}_{B_2} < \infty) = 0$$

を示せば十分である。

$$C = \bar{B}_1 \text{ とおく. } x \in B_1 = f\text{-int}(C), \quad \partial_f B_1 = \partial_f C.$$

$T_C(\omega) < \infty$ ならば, (5.2) によって P_x -測度 0 を除く

$$X(T_C, \omega) \in \partial_f C \subset \partial_f A \subset E_0 \setminus A.$$

したがって $T_C(\omega) \geq T_{E_0 \setminus A}(\omega) = \tilde{\zeta}(\omega)$. ゆえに

$$\underline{P}^x(T_C \geq \tilde{\zeta}) = 1.$$

$$0 = \underline{P}^x(T_C < \tilde{\zeta}) \geq \underline{P}^x(T_{B_2} < \tilde{\zeta}) = \underline{P}^x(\tilde{T}_{B_2} < \infty).$$

6. 定理. (5.1), (5.2) を仮定する. A が f -領域で e が極集合ならば, $A \setminus e$ も f -領域である.

証明. $e^c \neq \emptyset$ だから e は f -閉集合. したがって $A \setminus e$ も f -閉集合である. $A \setminus e$ 上の局所過程を $(\tilde{X}(t))_{t \geq 0}$ とする. B が $A \setminus e$ に含まれる f -閉集合 B で, $\tilde{T}_B$ を $(\tilde{X}(t))$ に関する B への最小到達時間とする. e が極集合だから $\tilde{T}_B = \tilde{\tilde{T}}_B$

($\underline{P}^x$ -a.s.) である. したがって (5.3) により

$$\underline{P}^x(\tilde{\tilde{T}}_B < \infty) > 0, \quad \forall x \in A \setminus e.$$

定理 5 により, $A \setminus e$ は f -領域である.

7. 注意. (a) 定理 5 の証明から明らかなように, (5.2) は f -閉集合 B についてだけ仮定すれば十分である.

(b) つぎのことはよく知られている. $(X(t))_{t \geq 0}$ ^{$(t \in [0, \zeta])$ 上} ~~が連続な道~~

をもつための必要十分条件は、すべての $\overbrace{CB}^{\text{が}}$ 相対コンパクトな閉集合 B とすべての $x \in B$ について、 $H_B(x, \cdot)$ が ∂B によって支えられていることである。^(*)

条件 (5.2) はあきらかにこの条件より強いから、(5.2) が成り立つためには、 $(X(t))$ の道は連続でなければならぬ。

(c) (5.2) をみたさない連続な標準過程の例。

$(X(t))_{t \geq 0}$ を $R = (-\infty, \infty)$ 上の uniform motion とする。この Markov 過程の細位相は、 R における右位相、すなわち $[a, b)$ 開近傍の基とする位相である。 $B = [a, b)$ とすると B は f -開かつ f -閉であることが容易に分るから、 $\partial_f B = \emptyset$ 。しかし $x < a$ について、 $H_B(x, \cdot)$ の台は $\{a\}$ である。

(d) (i) reference 測度が存在する,

(ii) すべての半極集合は極集合である,

の2条件を仮定すれば、条件 (5.1) がみたされる。

条件 (i) の下では、すべての f -Borel 集合は Borel 集合と半極集合の和集合として表わされる [D1, Chap. V, (I.18)]。したがって、(ii) を仮定すれば f -Borel 集合は nearly Borel である。

(*) P. Courrège - P. Priouret: Axiomatique de problème de Dirichlet et processus de Markov, Séminaire Brelot-Choquet-Deny, Théorie du Potentiel, 8 (1963/64), n° 8, p.7.

(e) (d) の条件(ii)を仮定する. A は nearly Borel な f -領域
とする. この時 A に含まれるすべての nearly Borel な非極
(= non polar) 集合 B に対して (4.2) が成り立つ.

$B \setminus B^\perp$ は半極集合, したがって極集合であるから $B \cap B^\perp$
 は極集合ではありえない. ゆえに $A \cap B^\perp \supset B \cap B^\perp \neq \emptyset$ であ
 って (4.1) が満たされる.

§2. Brelot 調和空間における細位相の連結性に関する
結果.

§. Brelot 調和空間 [A1, (a), (b)]

E — 可算基をもつ局所コンパクト, 非コンパクト, 連結かつ
 局所連結な Hausdorff 空間.^(*)

E_Δ — E の 1 点コンパクト化.

$\mathcal{U}$ — E の開集合の全体.

$C_b(E)$ [$C_0(E)$; $C_c(E)$] — E 上の有界 [$\Delta \neq 0$; コンパクトな台]
 実
 な連続関数の全体.

$B_b(E)$ — E 上の有界 Borel 可測関数の全体.

$C(U)$ [$C(\partial U)$] — U [∂U] 上の実
 連続関数の全体.

各 $U \in \mathcal{H}_U$ に対して $C(U)$ の線形部分空間 $\mathcal{H}_U$ が対応

(*) 調和空間は通常 Ω か X で表わすが §1 と記号を合わせるた
 め E を用いる.

いている。 $\mathcal{H}_U$ を各関数を U 上の調和関数 という。

以下に述べる Axiom 1-3 がみたされるとき, E は Brelot の調和空間 であるという。

Axiom 1. (i) $U_0 \subset U$, $u \in \mathcal{H}_U$ ならば $u|_{U_0} \in \mathcal{H}_{U_0}$.

(ii) $u \in C(U)$, U の各点 x にたいし $V(x) \in \mathcal{U}$ が存在して $u \in \mathcal{H}_{V(x)}$ ならば, $u \in \mathcal{H}_U$.

$U \in \mathcal{U}$ が 正則 であるとは, (i) U は相対コンパクト, (ii) $\partial U \neq \emptyset$, (iii) 任意の $f \in C(\partial U)$ にたいし, ∂U で f と一致し U で調和な関数 H_f^U が唯一つ存在する。かつ $f \geq 0$ ならば $H_f^U \geq 0$ である。さらに寫像 $f \rightarrow H_f^U$ は線形。

この時, $x \in U$ にたいし

$$(8.1) \quad H_f^U(x) = \int_{\partial U} f(y) \rho_x^U(dy), \quad f \in C(\partial U)$$

をみたす Radon 測度 ρ_x^U が定まる。

Axiom 2. 正則な開集合の族は E の基底をなす。

Axiom 3. U が領域で $(u_i)_{i \in I}$ が $\mathcal{H}_U$ における増加 net ならば $\sup u_i$ は $\mathcal{H}_U$ の関数か恒等的に $+\infty$ 。

$U_0 \in \mathcal{U}$ にたいし U_0 上の関数 u が hyperharmonic ($u \in \mathcal{H}_{U_0}^*$) とは, (i) 下半連続, (ii) $u > -\infty$, (iii) $\bar{U} \subset U_0$ なるすべての正則開集合 U にたいし,

$$(8.2) \quad u(x) \geq \int_{\partial U} u(y) p_x^U(dy), \quad \forall x \in U.$$

U_0 の各連結成分 U 上で恒等的に $+\infty$ とはならない $u \in \mathcal{H}_{U_0}^*$ を U_0 上の 優調和関数 という.

$u \in \mathcal{H}_E^*$ の (ポテンシャル論的) 台 $[u]$ は

$$(8.4) \quad E \setminus [u] = \sup \{ U \in \mathcal{U}; u|_U \in \mathcal{H}_U \}$$

なる開集合として定義される.

u が ポテンシャル ($u \in \mathcal{P}$) とは, (i) 非負優調和で, (ii)

$u \geq h \in \mathcal{H}_E$ ならば $h \leq 0$.

Axiom D. v が局所有界なポテンシャル, u が非負優調和なら,

$$(8.5) \quad [u \geq v]_{[v]} \Rightarrow u \geq v.$$

注意. Axiom D の主張を Domination Principle という. 連続なポテンシャルに対して (D.P) が成り立つことは, Axiom 1-3 から従う [B1, p.31].

Axiom P. 各 $x \in E$ に対し, $p(x) > 0$ なる $p \in \mathcal{P}$ が存在する.

最後に掃散に関する定義を与える.

$f \geq 0$ に対し,

$$(8.6) \quad R_f := \inf \{ u \in \mathcal{H}_E^*; u \geq f \}$$

を f の ($\mathcal{H}_E^*$ に関する) 縮小関数 (= réduite, reduced function) という. R_f の下半連続な正則化 $\hat{R}_f$ を f の 被掃散 (= balayée) という. すなわち,

$$(8.7) \quad \hat{R}_f(x) := \liminf_{\substack{y \rightarrow x, \\ y \neq x}} R_f(x).$$

E の任意の部分集合 A について,

$$(8.8) \quad R_f^A := R_{J_A f}, \quad \hat{R}_f^A = \hat{R}_{J_A f},$$

ただし, $J_A f = f$ on A , $= 0$ on $[A]^c$ である.

有限な Radon 測度 μ について

$$(8.9) \quad \int \hat{R}_u^A d\mu = \int u d\mu^A, \quad \forall u \in {}_+\mathcal{H}_E^*$$

をみたす Radon 測度 μ^A が唯一存在する. これは No 9(c) からいいたかう. μ^A は ∂A に支えられる.

9. Axiom 1-3 および P の下での結果の列 [A1(a), A2].

(a) (最小値原理) U は相対コンパクトな開集合, $u \in \mathcal{H}_U^*$

で (i) $\liminf_{\substack{y \rightarrow x, \\ y \in U}} u(y) \geq 0$, $x \in \partial U$ あるいは, (ii)

適当な $p \in \mathcal{P}$ が存在して $[u \geq -p]_U$ をみたすとする.

この時, $u \geq 0$ である.

(b) いたる所真に正な $p \in \mathcal{P} \cap C_b(E)$ が存在する.

$$(c) \quad C_0(E) = \overline{(\mathcal{P} \cap C(E) - \mathcal{P} \cap C(E)) \cap C_c(E)}.$$

これは任意の $f \in C_0(E)$ について, 2つの連続なポテンシャル p_1, p_2 が存在し, $p_1 - p_2 \in C_c(E)$, $\|f - (p_1 - p_2)\| < \varepsilon$ となることを意味する.

(d) $u \rightarrow \hat{R}_A^u$ は ${}_+\mathcal{H}_E^*$ から ${}_+\mathcal{H}_E^*$ への positively linear な

寫像である。

(e) U が正則開集合なら, $p_x^U = \varepsilon_x^U$, $x \in U$ である。ただし ε_x は x における δ -測度。さらに

$$\hat{R}_u^U = \begin{cases} u & \text{on } \complement U \\ \int u d p_x^U & \text{on } U. \end{cases}$$

10. $\mathcal{H}$ に対応する Markov 過程

主に [B1] による。Axiom 1-3, P および $1 \in \mathcal{H}_E^*$ を仮定する。Axiom 1-3 は Bauer の axiom によっておきかえられても以下の結果は正しい。

(a) 任意の $p \in \mathcal{P}^f$ (= finite potentials) に対して, つぎの条件を満たす核 V が唯一存在する。(i)

$$(10.1) \quad V1 = p,$$

(ii) 各 $f \in B_b(E)$ に対して, $Vf \in \mathcal{P}^f$ かつ, $[Vf] \subset \{f > 0\}$ である。

(f) ある $0 < p \in \mathcal{P} \cap C_b(E)$ が存在して, 対応する (a) の V が以下の条件を満たすようにできる。

$$(10.2) \quad V(C_b(E)) \subset C_b(E),$$

$$(10.3) \quad Vf = \int_0^\infty P_t f dt,$$

ただし $(P_t)_{t \geq 0}$ は Markov 核の半群で

$$(10.4) \quad P_t(C_b(E)) \subset C_b(E), \quad \forall t \geq 0,$$

$$(10.5) \quad \|P_t f - f\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0, \quad f \in C_0(E).$$

また $(P_t)_{t \geq 0}$ に関する超遇的関数族を Σ で表わしたとき,

$$(10.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \exists g_1 \in \Sigma \cap C_b(E) \times g_2 \in \Sigma \cap C(E) \text{ が存在して,} \\ \text{集合 } \{g_1 \geq \alpha\} \cap \{g_2 \leq \beta\} \text{ はすべて } \alpha > 0, \beta > 0 \\ \text{に対してコンパクト,} \end{array} \right.$$

$$(10.7) \quad {}_+\mathcal{H}_E^* = \mathcal{E}.$$

定義 (10.4), (10.5), (10.6) をみたす $(P_t)_{t \geq 0}$ を quasi-Feller 半群 といふ。

(c) [B2] quasi-Feller 半群は標準 (或は Hunt) 半群である。

定義. (b) における quasi-Feller 半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ の標準的实现

$X = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, (X(t))_{t \geq 0}, \mathbb{P}^\mu, (\theta_t)_{t \geq 0})$
~~調和構造~~
 を, $\wedge \mathcal{H}$ に対応する Markov 過程 といふ。以下に X を考へる。

(d) reference 測度が存在する。

(10.2) または (10.7) から容易に見られる。 $\{x_n\}$ を E における稠密な数列としたとき, $\mu = \sum 2^{-n} \varepsilon_{x_n}$ が 1 つの reference 測度を定める。

(e) X の細位相と調和空間の意味の細位相は一致する。

V が有界だから, [D1, p. 86] によつて X の細位相 Σ の関数も連続にする最粗位相である。同様に $\mathcal{H}$ に関する細位相 $\wedge \mathcal{H}^*$ を連続する最粗位相なこともよく知られている。ゆえに (10.7)

により両者は一致する.

(f) A を nearly Borel 集合, $u \in \Sigma$, μ Radon 測度 とするとき,

$$(10.8) \quad H_A u = \hat{R}_u^A,$$

$$(10.9) \quad \mu^A = \mu H_A.$$

証明は [B1, p. 58].

(g) 以下の各概念は, X に関する定義と, 調和空間論的定義が一致する.

(i) [B1, p. 59]. A が 極集合である.

(ii) [B1, p. 62] A は X において thin である.

(iii) A は 半極集合である.

以上により, 調和空間論におけるポテンシャル論的概念は, すべて X に関するポテンシャル論的概念に翻訳されることが分かった.

以下においてつぎのことを仮定する.

(a) Axiom 1-3,

(b) Axiom P,

(c) $1 \in \mathcal{H}_E^*$,

(d) Axiom D.

Axiom D の著しい結果は,

Lemma. [A1(a), p. 141, T31] すべて半極集合は極集合である.

11. 定理. X は条件 (5.1), (5.2) を満たす.

証明. (5.1) の方は, X が No. 7(d) の (i), (ii) を満たすからあきらかである.

(5.2) を確かめるために Lemma を 2 つ用意する.

Lemma 1. μ を σ -有限な台をもつ Radon 測度, $A \subset E$ とする.

(a) μ^A は A^c に支えられている.

(b) $(\mu = \mu^A) \Leftrightarrow (\mu \text{ が } A^c \text{ に支えられている}).$

(c) B が 半極集合か, $B \subset f$ -int A であるとする. そのとき

$$(11.1) \quad \mu(B) = 0 \Rightarrow \mu^A(B) = 0.$$

(d) $A, B \subset E$, $A \subset B$ (もっと一般に $A^c \subset B^c$) ならば,

$$(\mu^A = \mu^B) \Leftrightarrow (\mu^B \text{ が } A^c \text{ に支えられている}).$$

証明は [A1(c), §28]. 以下で必要なのは (a), (c) である.

Lemma 2. μ が $(\int A)^c$ に支えられている, μ^A も同様である.

証明. $B = (\int A) \setminus (\int A)^c$ は半極集合だから極集合. 仮定

により $\mu(B) = 0$. ゆえに (11.1) により $\mu^A(\int A \setminus (\int A)^c) = 0$.

$$(\int A)^c \subset f\text{-cl}(\int A) \text{ だから, } (\int A)^c \cap f\text{-int} A = \emptyset.$$

仮定により, $B \subset f\text{-int} A \subset \int (\int A)^c$ ならば $\mu(B) = 0$. 再び

(11.1) により $\mu^A(B) = 0$. すなわち μ^A は $\int (f\text{-int} A)$ に支えられている.

$$\int (f\text{-int} A) = f\text{-cl}(\int A) = (\int A) \cup (\int A)^c = (\int A)^c \cup [(\int A) \setminus (\int A)^c].$$

$\mu^A(\int A \setminus (\int A)^c) = 0$ だから, μ^A は $(\int A)^c$ に支えられている.

(5.2) の証明. A を nearly Borel 集合, $x \in f\text{-int } (A \subset (fA)^2$, $\mu = \varepsilon_x$ とする. (10.9) によって $H_A(x, \cdot) = \varepsilon_x^A$. Lemma 1, 2 によって ε_x^A は $A^2 \cap (fA)^2$ によって支えられている. $\partial_f A = (f\text{-cl } A) \cap (f\text{-cl } fA) = (A \cup A^2) \cap (fA \cup (fA)^2) \supset A^2 \cap (fA)^2$ 故から, (5.2) が証明された.

つぎの二つの定理は Fuglede [C1] によるが, 証明は省略する.

12. 定理 [C1, T.1, 2]. E は f -連結かつ局所 f -連結 である.

13. 定理 [C1, T.2]. 集合 B が $\text{base}^{(*)}$ である, $x \in B$ とする. この時, $\varepsilon_x^B = \varepsilon_x^{B'}$ を満足する最大の $\text{base } B_x$ が存在する. B_x は x を含む f -領域 である.

以下の定理 14, 16, 17 が本節の主結果である.

14. 定理. ε_x^B の細位相による台は $\partial_f B_x$ である.

証明. これは [C1] の 'Open problems' の一つで [C2] で独立に ^{証明} 省略されたが, ここでは §1 の結果を用いて確率論的な証明を与える.

(*) Fuglede は $B = B^2$ なる集合を base と呼んでいる. base は f -閉である. 任意の集合 A に対し, $B = A^2$ は base である.

S を $\varepsilon_x^B = \varepsilon_x^{B_x}$ の細位相による台とする。 $\int B$, $\int B_x$ は f -開で $x \in \int B \cap \int B_x$ だから (5.2) により, S は $\partial_f B \cap \partial_f B_x$ に含まれる。また

$$(14.1) \quad U := \partial_f B_x \setminus S$$

が極集合であることを示す。 $S \subset B_x$ だから $T_S \geq T_{B_x}$ 。

S は $\varepsilon_x^{B_x} = H_{B_x}(x, \cdot)$ の台であるから,

$$(14.2) \quad \underline{P}^x(X(T_{B_x}) \in S) = \underline{P}^x(T_{B_x} < \infty).$$

ゆえに,

$$(14.3) \quad \underline{P}^x(T_S = T_{B_x}) = 1, \quad \varepsilon_x^S = \varepsilon_x^{B_x}$$

である。これから

$$(14.4) \quad \underline{P}^x(T_S \geq T_U, T_U < \infty) = 0.$$

U が極集合でないとすると, $U \cap U^c$ は極集合でない。

$y \in U \cap U^c$ を取る。定理 12 により, f -連結な y の開近傍

V で $V \cap (S \cup \{x\}) = \emptyset$ を満たすものが存在する。

$V \subset \int B_x$ が f -領域で $V \cap \int B_x \neq \emptyset$ だから

$$(14.5) \quad A = V \cup \int B_x$$

が f -領域である。

$$(14.6) \quad V \cap U \subset A$$

が極集合でないことを示そう。実際

$$\underline{P}^y\{X(t) \in V, \forall t \leq \exists t_0(\omega)\} = 1,$$

$$\underline{P}^y\{X(t_n) \in U, \exists t_n \downarrow 0\} = 1$$

であるから,

$$\mathbb{P}^g \{ T_{V \cap U} = 0 \} = 1 \quad (*)$$

したがって, $g \in (V \cap U)^n$ である.

(14.5) の A と (14.6) の $V \cap U$ に定理 4 を適用 [n° 7(e) を見よ] すれば,

$$0 < \mathbb{P}^x \{ \tilde{T}_{V \cap U} < \infty \}.$$

ところがあまりに

$$\{ \tilde{T}_{V \cap U} < \infty \} \subset \{ T_U \leq T_S, T_U < \infty \}$$

であるから, (14.4) により,

$$\mathbb{P}^x \{ \tilde{T}_{V \cap U} < \infty \} \leq \mathbb{P}^x \{ T_U \leq T_S, T_U < \infty \} = 0,$$

これは矛盾である.

一方, 以下の定理 16 によって $\partial_f B_x$ も base であるから,

$$\partial_f B_x = (\partial_f B_x)^n = (S \cup U)^n = S^n \cup U^n$$

$$= S^n \subset S \subset \partial_f B_x,$$

($\because U^n = \emptyset$ と S が f -閉であることを用いた). ゆえに

$$S = \partial_f B_x \text{ である.}$$

15. Lemma. (a) U が x の f -近傍があるとき, x の f -閉近傍 V が存在して次の条件を満足するようにできる.

(*) の議論によつて, 一般に $(V \cap U)^n \supset (f\text{-int } V) \cap U^n$ である.

(i) $V \subset U$, (ii) V は f -領域, (iii) $\bigcap V$ は base, (iv) $\bigcap$ の位相に関して V はコンパクトな閉包をもつ。

(b) $\{x\}$ が極集合であれば, 細位相に関する x の基本近傍系 $\mathcal{V}_x$ で, すべて $V \in \mathcal{V}_x$ が $V, V \setminus \{x\}$ が f -領域, $\bigcap V$ が base であるようなものが存在する。

証明. (a) [D1, p. 85, Prop. (4.3)] によつて, $x \in f\text{-int } K \subset K \subset U$ なるコンパクト集合 K が存在する.^(*) $A = \bigcap K$ とおけば, $A^\circ = f\text{-cl } A = \bigcap f\text{-int } K \ni x$. $B = A^\circ$ は base だから, 定理 13 の B_x を考え, $V = \bigcap B_x$ とおけば, 所需の条件を満たす。

(b) (a) の (iv), (iii) の条件を満たす x の近傍 V の全体を $\mathcal{V}_x$ とする。 $\mathcal{V}_x$ が基本近傍系をなすことは (a) から, $V \setminus \{x\}$ が f -領域 であることは定理 6 から明らかである。

16. 定理. (a) 任意の集合 A に対し,

$$(16.1) \quad (\partial_f A)^\circ = A^\circ \cap (\bigcap A)^\circ$$

である。

(b) 特に B が base なら, $\partial_f B$ も base である。

証明. (a) 一般に A° は $f\text{-cl } A \setminus \{x \in E : \{x\} \text{ が極集合である}\}$, 細位相に関する孤立点の集合に等しいことを注意する。いゝかえると, $x \in E$ に対し

(*) これは細位相が正則であることを含んでいる。

(i) $\{x\}$ が極集合ならば

$$(16.2) \quad (x \in A^{\mathbb{R}}) \iff (x \text{ が } A \text{ の } f\text{-集積点}),$$

(ii) $\{x\}$ が極集合でなければ

$$(16.3) \quad (x \in A^{\mathbb{R}}) \iff (x \in f\text{-cl } A)$$

を示そう.

(i) $(\implies)$ V を x の f -近傍とする. 仮定により

$$\mathbb{P}^x \{X(t) \in V \setminus \{x\}, \forall t \leq \tau_{t_0}(\omega)\} = 1,$$

$x \in A^{\mathbb{R}}$ だから,

$$\mathbb{P}^x \{X(t_n) \in A, \exists t_n \downarrow 0\} = 1.$$

ゆえに $\exists \omega \in \Omega, \exists t > 0$ に対し $X(t, \omega) \in A \cap (V \setminus \{x\})$.

$(\impliedby)$ $x \notin A^{\mathbb{R}}, x \notin A$ ならば, $\{A \supset \bigcap (A \cup A^{\mathbb{R}})$ が x の f -近傍だから, x は A の集積点ではあり得ない. $x \notin$

$A^{\mathbb{R}}, x \in A$ ならば, $x \notin A \setminus \{x\}, x \notin (A \setminus \{x\})^{\mathbb{R}}$ により

$V = \bigcap (A \setminus \{x\})$ が x の f -近傍である. したがって

$$(V \setminus \{x\}) \cap A = V \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset.$$

(ii) $(\impliedby)$ のみを証明すれば十分である. $f\text{-cl } A = A \cup A^{\mathbb{R}}$ だから, $x \in A$ の場合を示せばよい. 仮定により, $\{x\} = \{x\}^{\mathbb{R}} \subset A^{\mathbb{R}}$. ゆえに $x \in A^{\mathbb{R}}$ である.

(16.1) を示そう. まず $V \setminus \{x\}$ が f -領域であるとき

$$(16.4) \quad (V \setminus \{x\}) \cap \partial_f A \neq \emptyset \iff \begin{aligned} &(V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \text{ か} \\ &(V \setminus \{x\}) \cap \bar{A} \neq \emptyset \end{aligned}$$

であることに注意する。(⇒)は自明である。(⇐)は $V \setminus \{x\}$ が f -連結なことから容易に示す。実際 $B = A \cup \partial_f A$, $C = \bar{A} \cup \partial_f A$ とおけ。もし $(V \setminus \{x\}) \cap \partial_f A = \emptyset$ ならば,
 $(V \setminus \{x\}) \cap B \cap C = \emptyset$. $V \setminus \{x\} = [(V \setminus \{x\}) \cap B] \cup [(V \setminus \{x\}) \cap C]$. $(V \setminus \{x\}) \cap B$ と $(V \setminus \{x\}) \cap C$ は $V \setminus \{x\}$ において f -閉集合だから, $V \setminus \{x\}$ が f -連結であることに反する。

$\{x\}$ が極集合であるとき, Lemma 15 (4) の $\mathcal{V}_x$ をとると,
 (16.2), (16.4) により

$$x \in (\partial_f A)^2$$

$$\Leftrightarrow \text{すなわち, } V \in \mathcal{V}_x \text{ に対し, } (V \setminus \{x\}) \cap \partial_f A \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \text{すなわち, } V \in \mathcal{V}_x \text{ に対し, } (V \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \text{ かつ } \{V \setminus \{x\}\} \cap \bar{A} \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in A^2 \cap (\bar{A})^2.$$

$\{x\}$ が極集合でない時は, 上の議論で $V \setminus \{x\}$ の代りに V をおきかえて,

$$x \in (\partial_f A)^2 \Leftrightarrow x \in A^2 \cap (\bar{A})^2$$

が示される。

$$(4) \quad \bar{B} \text{ が } f\text{-閉集合だから, } f\text{-cl } \bar{B} = \bar{B} \cup (\bar{B})^2 = (\bar{B})^2.$$

ゆえに

$$(\partial_f B)^2 = B^2 \cap (\bar{B})^2 = f\text{-cl } B \cap f\text{-cl } \bar{B} = \partial_f B.$$

17. 定理. 任意の $x \in E$ に対し, 細位相に関する x の基本近傍系 $\mathcal{V}_x$ につき条件をみたすものが存在する.

(i) 各 $V \in \mathcal{V}_x$ は f -領域である.

(ii) $\varepsilon_x^V = H_{\int_V}(x, \cdot)$ の細位相に関する方は $\partial_f V$ である.

3.

証明. Lemma 15 (a) で構成した V の全体を $\mathcal{V}_x$ とする.

V はある base B に対し $V = \bigcup B_x$ の形に表われているから, 定理 14 によって $\varepsilon_x^V = \varepsilon_x^{B_x}$ の細位相に関する方は $\partial_f B_x = \partial_f V$ になるといえる.