

# アトラクターの強さ、選択、遷移

金子邦彦 (東大総合文化研究科)

## 1 問題意識

ここ数年、細胞生物学を、内部状態を持った系の相互作用ダイナミクス系としてとらえるという試みを行なっている [1]。細胞内の生化学反応ダイナミクスと細胞間相互作用と細胞分裂を力学系として表現し、そのモデルのシミュレーションから、次のようなシナリオが得られている。1つの細胞から出発すると、細胞の数がふえるに従い、(i) 同一の状態を持った細胞群の同期した分裂 (ii) 細胞によって振動の位相が異なる集団に分かれたクラスター化した状態 (iii) 違った化学組成を持ち、異なったダイナミクスを持つ細胞のタイプがあらわれる、分化した状態 (iv) 分裂による細胞の内部状態の伝達 (記憶の生成) (v) 階層的な分化の5つのステージが順にあらわれるというものである。この考えにより細胞社会のダイナミクスや役割分化を見直すことが行なわれている。

ここで重要なのは不安定性による多様化過程があり、その一方で相互作用を通して、安定な再帰的な構造が選ばれてくるという点である。この安定な構造は一般には各内部ダイナミクスのアトラクターではない。分化した細胞に対応する異なった状態は他の細胞との相互作用を通してはじめて安定化されている。例えば古沢と著者のモデルの [2] では初期にあらわれる細胞状態のダイナミクスはカオス的で、(化学成分で与えられる) 相空間の広い範囲を用いている。細胞数が増え、相互作用によってこの状態が不安定化すると、相空間内でその周辺にいくつかの新しい安定状態が出現する。それが起こると今度は、そうした新しい状態を持つ細胞との相互作用によって、もとの不安定化した状態がまた安定に維持されることになる。つまり、ここでは各状態の安定性とその出現数 (ここではそのタイプの細胞数) の関係を利用して多種類の状態からなる細胞集団を形成していくのである。この場合は相互作用を通して安定性と出現数のバランスをとっている。また、初期の細胞状態は、広い初期条件の範囲からひきこまれるが不安定化しやすい「弱い」状態であり、これが他の種類の細胞状態を生む「幹細胞」の役割を果たしていることにも注意しよう。

では、こういった力学系の状態の「強さ」と「広さ」の関係はどうなっているのだろうか。上の問題では、各内部ダイナミクスが相互作用しているためにそれぞれをアトラクターと呼ぶことができない (そして、これは外的情報を内部に埋め込む上で本質的である)。ただし、いくつかの状態の安定性や遷移関係を調べる上で、まず、多くのアトラクターを持つ一つの力学系を切り出し、その各アトラクターの安定性、外界からの影響によるアトラクター遷移を調べることは最初のステップとして重要であろう。そこでここでは、たくさんア

トラクターがある系の力学系的な性質を議論するために、カオスを示す要素がたくさん結合した GCM

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + (\epsilon/N) \sum_{j=1}^N f(x_n(j)) \quad (1)$$

を例にとる。 $f(x)$  はどのような変換を用いてもいいのであるが、具体的にはロジスティックマップ  $f(x) = 1 - ax^2$  を用いる。

既にこのモデルでは結合  $\epsilon$  を減少させるか非線型性  $a$  を増加させるにつれて (1) ほとんど全ての初期状態が完全にひきこんで振動する状態におちるコヒーレント相 (2) 数個 ( $k \ll N$ ) のアトラクターがほとんどを占める秩序相 (3) 初期条件によりクラスターの個数の異なる様々なアトラクターが共存する部分秩序相 (4) 各要素が全くばらけて振動する相の変化が起こることが知られている [3,4]。特に秩序相から部分秩序相に向けてアトラクターの数が増加し、そこで、クラスターへの様々な分割やその多様性が調べられている。ここでは多アトラクター系の性質をみるために (2) から (3) を特に注目する。

## 2 アトラクターの強さ

多くのアトラクターがある場合には、そのアトラクターの引き込み領域や強さという概念が必要になってくる。大雑把にいて、ベイシンの広さは、初期条件をデタラメにとった時、どのアトラクターがあらわれやすいかをあらわす。このような「広さ」に対して「強さ」を考えよう [5]。これは、アトラクターに落ちた後で、その軌道に摂動を入れた後でもとに戻るかどうかで判定できる。具体的にはアトラクターに落ちたあとに要素  $i$  ごとに  $\sigma \times \text{rnd}(i)$  (ここで  $\text{rnd}(i)$  は  $[-.5, .5]$  の間の乱数) を 1 ステップだけ入れて、その後に系がもとのアトラクターに戻るか別なアトラクターへと遷移するかをチェックし、乱数に対しての多くのサンプルをとって、アトラクターへの帰還率  $P(\sigma)$  を計算する。図 1 に  $P(\sigma)$  のいくつかの例を示した。ここで  $P(\sigma)$  が 1 より小さくなる最大の  $\sigma$  をアトラクターの強さとみなすことができる。(例えば  $[3, 1, 1, \dots, 1]$  という分割のものでは 0.08。)

なお、アトラクターの広さと強さの間には必ずしも相関関係がない。強いのにベイシンの狭いもの、弱いのに広いベイシンを持つものが存在している。後者の極端なものがアトラクターの強さが 0 のミルナーアトラクター [6,7] である。これは、有限の割合の初期条件が引き込まれるのであるが、そこからどんなに小さな摂動でも他のアトラクターへ飛び出してしまうことが必ずあるからという奇妙な状態である。こういった状態は秩序相から部分秩序相にかけてしばしばみられる。

それぞれのパラメータで多くのアトラクターが存在するので、次に問題となるのはこういったアトラクター群の性質がパラメータ  $a$  を変えていくとどう変わるかである。そのためにアトラクターの強さごとに対しての引き込み領域の広さを調べてみた。それから以下のことが明らかになった。

- (i) 秩序相 I: 少数の強いアトラクターが存在し、それぞれが広いベイシンの体積を擁している。
- (ii) 秩序相 II: 更に非線形パラメータが増加すると、各アトラクターの強さが減少し、さらに「ミルナーアトラクター」のベイシンの占める割合が増大する。前者は秩序相と部分

秩序相の境界でアトラクターの数が最大になることから推測できるが、ミルナーアトラクターがこれほど広くなることは自明ではない。

(iii) 部分秩序相：ミルナーアトラクターのベイシン領域が広がり、パラメータによってはほぼ100%を占めることすらある。この場合、アトラクターの数は必ずしも多くない。(ただし、ここではパラメータに非常に敏感な振舞がみられる)。

### 3 ミルナーアトラクターのネットワーク、カオスの遍歴、雑音入力に対する選択的応答

次に必要なのはアトラクター間の位置関係や動的な関係である。そのためには各アトラクターに摂動を加えた時にどのアトラクターへと遷移するかのマトリックスを数値的に求めた。この結果によるとミルナーアトラクターや弱いアトラクターは一般的に多くのアトラクターへとつながっている。

特に重要なのは部分秩序相でミルナーアトラクターが支配的となる場合である。この際、無限小の摂動で相互に遷移するミルナーアトラクターがいくつか存在し、それらがネットワークをなしている。そこで、どんな少しでも系に雑音が入っていれば系全体の長時間ダイナミクスは、ミルナーアトラクターの間の遷移過程として捉えられる。例えば、主要なアトラクターに非常に小さい摂動が加わった時の遷移を描いたものが図2である。秩序相では、ミルナーアトラクターから多くの他のアトラクターへの結合があることが見てとれる。また部分秩序相ではミルナーアトラクター間の行き来も形成されていることがわかるであろう。

なお、この遷移とカオスの遍歴 [3,4,8,9] の関連は興味深い。これらのミルナーアトラクターは適度にクラスター化した、ある程度「秩序化」したカオス状態であり、結局この遷移過程はいくつかの秩序化状態間を高次元カオスを経て遷移するという、カオスの遍歴の例になるからである。ここで述べた機構はその基本型としての意義はあると思われる。特に、ミルナーアトラクターが riddled basin [10] を持つこと、そこでの不確定性指数 [11] が0に近いこと、一方で決定不能性をもつダイナミクスが不確定性指数0を持つ [12] と考えられること、などを考えると、カオスの遍歴の上位レベルの遍歴ダイナミクス (遷移則) が下位のレベル (個々の要素レベル) から決定可能かに対して興味深い示唆を与えているようにも思われる。

なお、ここで調べて来たことは、フリーマンが見出した、嗅覚における神経の集合電位が、その入力 (におい) に応じて異なる、ダイナミックな振舞を示すこと [13] との関連でも示唆的と思われる。彼らは記憶されていたのに対しては比較的周期運動に近い振舞を示すのに対して、「よくわからない」のに対しては、その振舞がカオス的と見えるような振舞を過渡的に示すことを見出している。もし、フリーマンの実験で見出されたカオス的な状態をミルナーアトラクターに対応づけ、他のメモリー状態が安定なアトラクターに対応づけられるとすれば、ここで調べて来たミルナーアトラクターの状態は自発的な遷移ができ、多くの安定なアトラクターのまわりをまわっているので、色々な状態をカオスによって探索するという彼らのイメージを表現している。

最後に、こういった多重アトラクター系に外から入力が入った時の振舞の簡単な例として、この系がしばらくの間ある強さの雑音にさらされた後でその入力 that 切られた後、どのよ

うな遷移が起こるかを調べて見た。これを行なうと、部分秩序相では弱いアトラクターから飛び出して強いアトラクターへの移行が見られるが、これに対して秩序相 II と書いた状態では、むしろ逆に弱いアトラクターへの滞在率が増加することが見出された。さらに、入力(雑音)の強さを変えて行くと、それに対応して異なるアトラクターへひきこまれる割合が順次増加するという現象も発見された [5]。このような入力の強さに対する特異性は、複雑なベイシン構造に由来するものと予想されるがその機構はまだわかっていない。

#### 参考文献

- [1] K. Kaneko and T. Yomo, "Isologous Diversification: A Theory of Cell Differentiation", Bull.Math.Biol. 59 (1997) 139-196; 金子邦彦相互内部ダイナミクス系としての生命観」現代思想 1995年12月号
- [2] C. Furusawa and K. Kaneko "Emergence of Rules in Cell Society: Differentiation, Hierarchy, and Stability", submitted to J. Theor. Biol.
- [3] K. Kaneko, Physica 31 D(1990)137-172
- [4] 金子邦彦、津田一郎; 複雑系のカオス的シナリオ (朝倉書店)、1996
- [5] K. Kaneko, "Dominance of Milnor Attractors and Noise-induced Selection in a Multi-attractor System", Phys.Rev.Lett.(1997), in press
- [6] J. Milnor, Comm. Math. Phys. 99 (1985) 177; 102 (1985) 517; P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stuart, Nonlinearity 9 (1996) 703
- [7] こういった問題と riddled basin については秦らの講演や Y-C. Lai and C. Grebogi, Phys. Rev. E. 53 (1996) 1371 などを参照
- [8] K. Ikeda, K. Otsuka, and K. Matsumoto, Prog.Theor. Phys. Suppl. 99(1989)295.
- [9] I. Tsuda, World Futures 32(1991)167.
- [10] E. Ott *et al.*, Phys. Rev. Lett. 71, 4134 (1993).
- [11] C. Grebogi *et al.*, Phys. Lett. A 110, 1 (1985).
- [12] A. Saito and K. Kaneko, preprint
- [13] W. Freeman and C. A. Skarda, Brain Res. Rev. 10 (1985) 147; W.J. Freeman, Physica D, 75(1994)151.

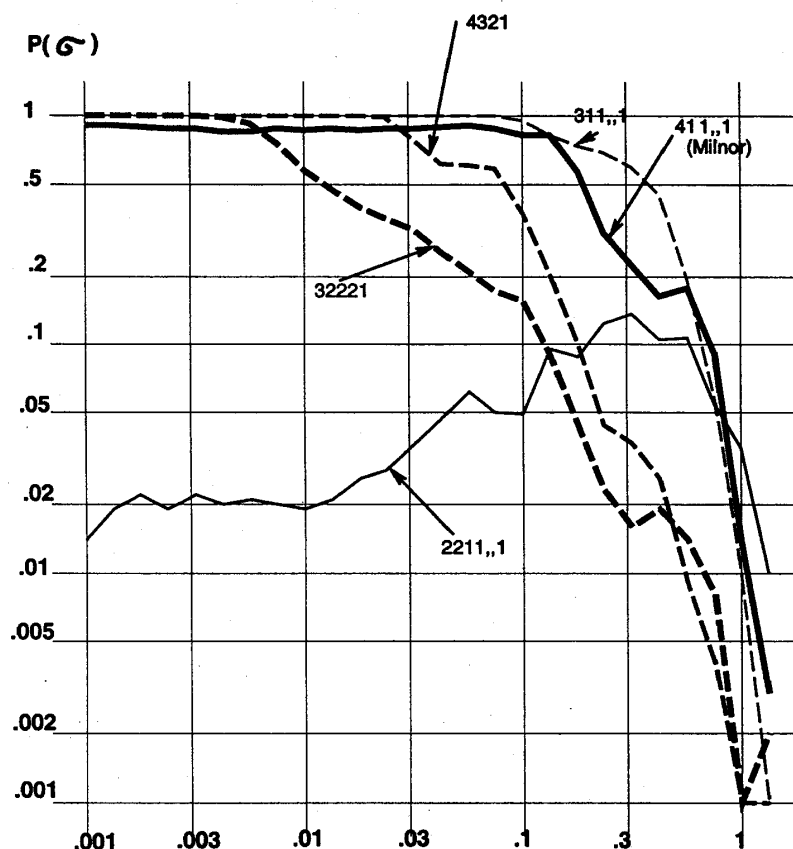


図 1: GCM モデル (1) での 5 つのアトラクターに対する  $P(\sigma)$ 。  $N = 10$ 、 $a = 1.61$ 、 $\epsilon = .1$ 。それぞれのアトラクターのクラスター化条件は  $[4321], [3, 1, 1, \dots, 1]$  のように表現されている。  $P(\sigma)$  はそれぞれのアトラクターに対し各  $\sigma$  で、1000 のランダムな摂動を加えてその何 % がもとのアトラクターに戻ったかで計算した。(文献 7 より一部改変)

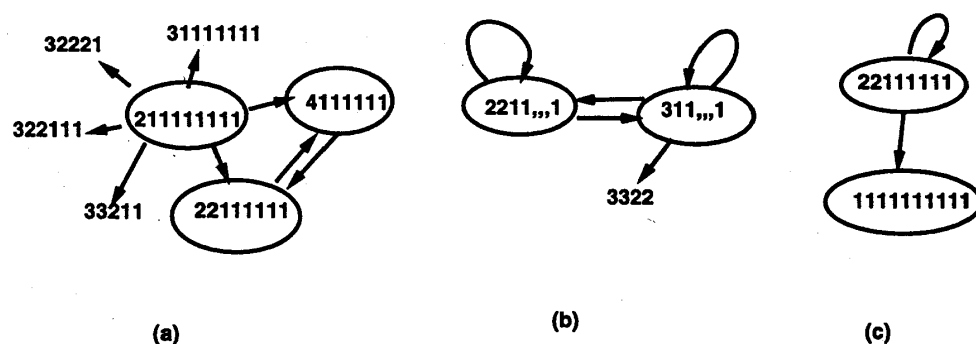


図 2: アトラクターの遷移図；  $10^{-8}$  のランダムな摂動を各要素に加えて、どこに移ったかを 1000 サンプルとして調べ、遷移が起こった箇所を矢印であらわした。もとのアトラクターに戻ることがほとんどなのでその矢印は省略されている。なお、自分に戻る矢印は、もとに戻ったのではなく、同じ分割を持った違ったアトラクターへの遷移 (例えば図 (b) での  $(311, \dots, 1)$  での自分へ戻る矢印は、もととは異なる 3 つの要素が同期している別なアトラクターへの遷移) を示しているので注意。○で囲んだのがミルナーアトラクター、何もつけていないのが安定なアトラクター。  $N = 10$ 、 $\epsilon = .1$ 。(a)  $a = 1.63$  (b)  $a = 1.65$  (c)  $a = 1.66$