

余次元 1 の葉層構造の極限集合

東北大 理 西森敏之

M を向きづけ可能 C^∞ 閉多様体とし, $\mathcal{F}$ を M 上の向きづけ可能余次元 1 C^r ($r \geq 1$) 葉層構造とする。このとき $\mathcal{F}$ に横断的な C^∞ 流れ $\varphi: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ が存在するから 1 つ固定しておく。

定義 1. F を $\mathcal{F}$ のコンパクトでない葉とする。 $U \subset F$ とし,

$$L(U) = \left\{ y \in M \mid \begin{array}{l} \exists \{x_i\}_{i=1}^\infty \subset U \text{ st. ① } F \text{ の位相で集} \\ \text{積点なし ② } M \text{ の位相で } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = y. \end{array} \right\}$$

とおく。 $L(F)$ を F の極限集合と呼ぶ。

我々の目標は葉 F の行動を調べることであるが, それは極限集合 $L(F)$ の構造を調べることとほぼ同等である。一般に $L(F)$ は連結とは限らなく, $L(F)$ をそのまま扱うのは良策ではない。力学系の定性的理論において α -極限集合, ω -極限集合を考えたように, 葉層構造においては次に述べるように end の極限

集合を考えるのが妥当である。まづ end の定義から始める。

定義 2. コンパクトでない多様体 F の end とは、空でない連結開部分集合の族 ε で次の (1) ~ (4) をみたすもの。

- (1) 任意の $U \in \varepsilon$ に対して, $\partial U = \text{cl}_F(U) - U$ はコンパクト。
- (2) $U, U' \in \varepsilon \implies \exists U'' \in \varepsilon \text{ s.t. } U'' \subset U \cap U'.$
- (3) $\bigcap \{U \mid U \in \varepsilon\} = \emptyset.$
- (4) (1), (2), (3) に関して ε は極大族。

end をわかりやすくするには, Morse function $f: F \rightarrow [0, \infty)$ で

- (1) $K \subset [0, \infty)$ がコンパクトならば $f^{-1}(K)$ もコンパクト。
- (2) f の特異点は $f^{-1}(\{0, 1, 2, 3, \dots\})$ に含まれる。

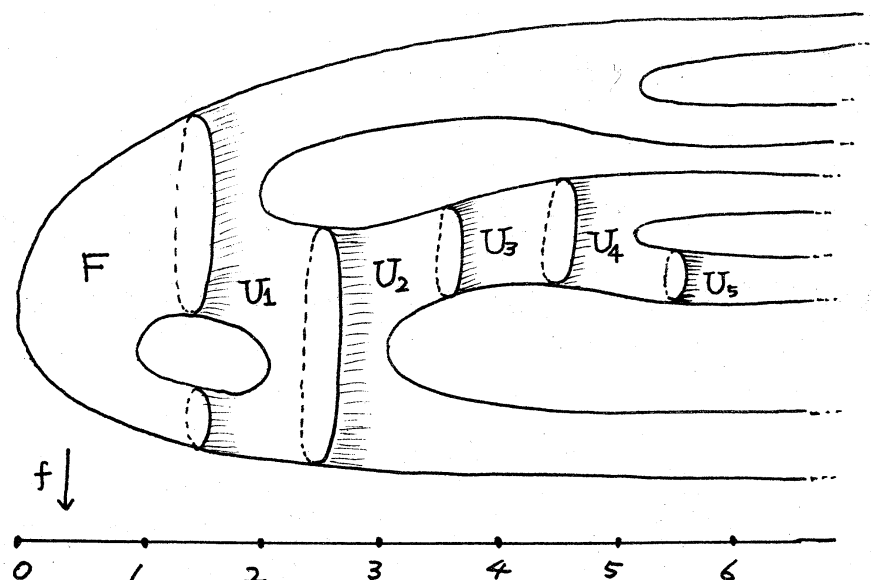
をみたすものと考えたと便利である。 f を固定しておいて, F の開集合の減少列 $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ で

- (*) U_i は $f^{-1}((i + \frac{1}{2}, \infty))$ の連結成分
を考える。このとき,

$$\varepsilon = \left\{ U \mid \begin{array}{l} U \text{ は } F \text{ の空でない連結開部分集合で} \\ \partial U \text{ がコンパクトである } U_i \text{ を含むもの.} \end{array} \right\}$$

とおくと ε は F の end になり, 逆に F の end ε が与えられると ε は (*) をみたす F の開集合の減少列 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ をただひとつ含む。従って対応: $\{U_i\}_{i=1}^{\infty} \mapsto \varepsilon$ により, (*) をみたす F の開

集合の減少列の集合と F の end の集合は同一視できる。



定義3. ε を F の葉 F の end とする。

$$L_\varepsilon(F) = \bigcap_{U \in \varepsilon} \mathcal{C}_M(U)$$

と お い て, $L_\varepsilon(F)$ を F の ε -極限集合 あるいは ε の 極限集合 と呼ぶ。

上に述べた減少列 $\{U_i\}_{i=1}^\infty$ を使うと, $L_\varepsilon(F) = \bigcap_{i=1}^\infty \mathcal{C}_M(U_i)$ とかける。実直線 $\mathbb{R}$ は2つの end $\alpha = \{(-\infty, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\omega = \{(t, \infty) \mid t \in \mathbb{R}\}$ をもち、力学系のコンパクトでない軌道 O_x は対応する2つの end α, ω をもつが $L_\alpha(O_x) = L^-(x)$, $L_\omega(O_x) = L^+(x)$ となる。

次に $L(F)$, $L_\varepsilon(F)$ の基本的性質を述べる。

定理 1. (1) $L(F), L_\varepsilon(F)$ は空でない開集合で, いくつかの葉の和になっている. (2) $L(F) = \bigcup_\varepsilon L_\varepsilon(F)$. (3) $L_\varepsilon(F)$ は連結. (必ずしも孤立連結ではない)

最初に考えるべき自然な問題は, いつ $L_\varepsilon(F)$ がコンパクトな一枚の葉になるかという問題であるが, 次のような解答を得る.

定理 2. $L_\varepsilon(F)$ がコンパクトな一枚の葉になるのは次の(1), (2), (3)が成立するときそのときに限る.

- (1) ε は孤立 (ie. $\exists U \in \varepsilon$ st. U は他の end に含まれない)
- (2) $L_\varepsilon(F) \cap F = \emptyset$.
- (3) ε は $L_\varepsilon(F)$ に一方側から近づく. (ie. (I) $\forall x \in L_\varepsilon(F)$, $\exists t > 0, \exists U \in \varepsilon$ st. $\varphi(\{x\} \times (0, t)) \cap U = \emptyset$ or (II) $\forall x \in L_\varepsilon(F)$, $\exists t > 0, \exists U \in \varepsilon$ st. $\varphi(\{x\} \times (-t, 0)) \cap U = \emptyset$).

ここで 定理 2 の必要性^{の部分} の証明の概略を述べることにする。
 $L_\varepsilon(F) = F_1$ とおく。 $F_1 \neq F$ であるから (2) は明らか。

予備定理. $\exists U \in \varepsilon$ st. $L(U) = F_1$.

この予備定理を証明したものとして話を進める。 $x_0 \in F_1$ とする。十分小さな $\delta > 0$ をとると $\varphi(\{x_0\} \times (-\delta, \delta)) \cap U$ は可算で離散的位相をもつ。 x_0 から遠い順に番号をつけて

$$\varphi(\{x_0\} \times (0, \delta)) \cap U = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

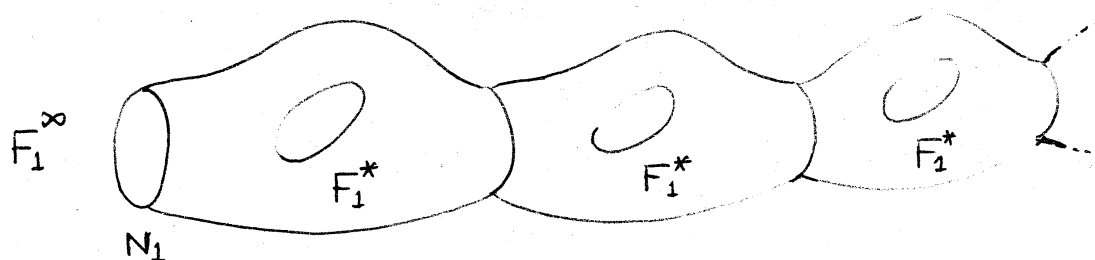
としてよい。(必要があれば φ の向きを反える)。各閉道

$\omega: ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (F_1, x_0)$ に対して, $[0, 1] \times \mathbb{R}$ 上の葉層構造 $\mathcal{F}_\omega = (\varphi \circ (\omega \times id))^* \mathcal{F}$ を考える。このとき自然数 N と整数 p が存在して, $n \geq N$ ならば $(x_n, 0)$ と $(x_{n+p}, 1)$ は $\mathcal{F}_\omega$ の同じ葉の上にある。対応 $\omega \mapsto p$ により準同型写像 $u: \pi_1(F_1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ を得る。 $\mathbb{Z}$ は可換群であるから $u = v \circ H$ をみたす準同型写像 $v: H_1(F_1, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ が存在する。ただし $H: \pi_1(F_1, x_0) \rightarrow H_1(F_1, \mathbb{Z})$ は Hurewicz 準同型である。

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(F_1, x_0) & \xrightarrow{u} & \mathbb{Z} \\ H \downarrow & \curvearrowright & \nearrow v \\ H_1(F_1, \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

v を $\text{Hom}(H_1(F_1, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong H^1(F_1^{n-1}, \mathbb{Z})$ の元とみなし, Poincaré 双対写像 $d: H^1(F_1^{n-1}) \rightarrow H_{n-2}(F_1^{n-1})$ による像 $d(v)$ を考える。Thom の定理により, F_1 の余次元 1 の部分多様体 N が存在してその基本ホモロジー類 $[N]$ が $d(v)$ と一致する。 $(n-1 \geq 3$ のときは中塚の定理により N は連結にできる) 連接近傍系を使う

F_1^* を可算個 N_2 と N_1 を同一視することによりはりつけて得られる多様体を F_1^∞ とおくと, $U \cap e(F_1^* \times [0, \delta'])$ は F_1^∞ の k 個の離散的な和になっている。



$L_\varepsilon(F) = F_1$ であることから $\exists U_0 \in \varepsilon$ st. $U_0 \subset U \cap \text{Im} e$.
従って U_0 は F_1^∞ と同位相な F の部分集合に含まれる。明らかに F_1^∞ は 1 つしか end をもたないので, ε が孤立 end であるということがわかる。同時に定理 2 の条件 (3) が成立することともわかる。

この証明から end ε が 極限集合 $L_\varepsilon(F)$ にどのように巻きついていくかもわかることを注意しておく。定理 2 の十分性の部分の証明は省略する。

次に定理 2 の拡張をする。図式的には

$$\varepsilon \text{ についての条件 } \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{定理3}} \\ \xleftarrow{\text{定理4}} \end{array} L_\varepsilon(F) \text{ の構造}$$

のように 2 つの部分にわけて行う。結果を述べるためにいくつかの定義を準備する。

定義4. $d(F) = \sup \{ n \mid \exists F_1 < \dots < F_n = F \}$

ただし $F_1 < F_2 \iff F_1 \subset F_2 \text{ かつ } F_1 \neq F_2$.

定義5. $d(\varepsilon)$ を帰納的に定義する.

(I) $d(\varepsilon) = 1 \iff \varepsilon$: 孤立

(II) $d(\varepsilon) = d > 1 \iff \begin{cases} (a) \exists U \in \varepsilon \text{ s.t. } U \in \varepsilon' \neq \varepsilon \implies d(\varepsilon') < d. \\ (b) \forall U \in \varepsilon, \exists \varepsilon' \ni U \text{ s.t. } d(\varepsilon') = d-1. \end{cases}$

(III) (I)(II) で $d(\varepsilon)$ が決まらない ε に対して, $d(\varepsilon) = \infty$.

定義6. $L_\varepsilon^*(F) = L_\varepsilon(F) - \bigcap_{U \in \varepsilon} \left(\bigcup_{U \in \varepsilon' \neq \varepsilon} L_{\varepsilon'}(F) \right)$

とおいて, $L_\varepsilon^*(F)$ を $L_\varepsilon(F)$ の主部と呼ぶ.

定義7. tame end を次のように帰納的に定義する.

(I) $d(\varepsilon) = 1$ の end が tame $\iff \begin{cases} ① L_\varepsilon(F) \cap F = \emptyset \\ ② \varepsilon \text{ が } L_\varepsilon(F) \text{ に一方側から近づく.} \end{cases}$

$a(\varepsilon) = \sup \{ d(\partial U, L_\varepsilon(F)) \mid U \in \varepsilon \text{ s.t. } U \in \varepsilon' \implies \varepsilon' = \varepsilon \}.$

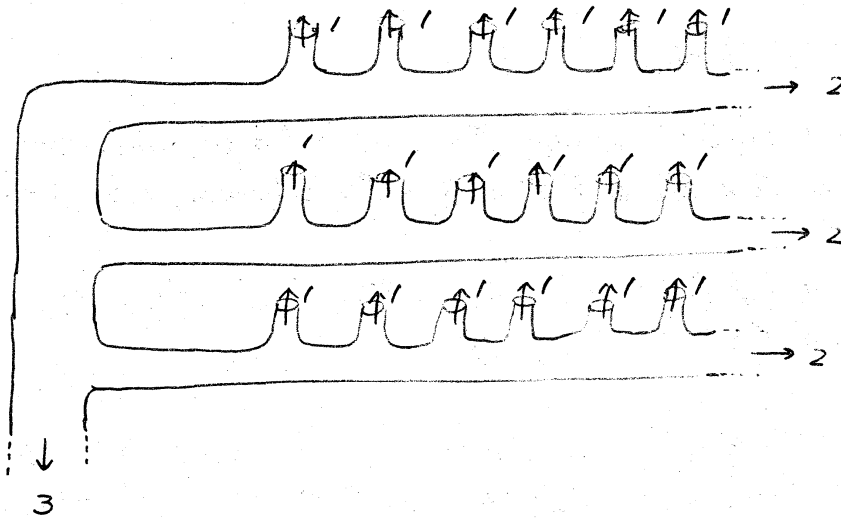
(II) $d(\varepsilon) = d > 1$ の end が tame

$\iff \begin{cases} ① L_\varepsilon(F) \cap F = \emptyset. \text{ ② } \varepsilon \text{ は } L_\varepsilon^*(F) \text{ に一方側から近づく.} \\ ③ \exists U \in \varepsilon, \exists a > 0 \text{ s.t. } U \in \varepsilon' \neq \varepsilon \text{ ならば } a(\varepsilon') > a \text{ かつ} \\ \varepsilon' \text{ は } d(\varepsilon') < d \text{ の tame end.} \end{cases}$

$a(\varepsilon) = \sup \{ d(\partial U, L_\varepsilon(F)) \mid U \in \varepsilon \text{ s.t. } U \in \varepsilon' \neq \varepsilon \implies \varepsilon' \text{ tame end, } d(\varepsilon') < d \}.$

(注). 葉層構造系が C^2 級で, $\sup\{d(F) \mid F \text{ は子の葉}\} < \infty$,
更に子のすべての葉の木ロノミー群が可換のとき, 系のすべての葉のすべての end は tame になる。

$d(\varepsilon)$ を例をあげて説明する。



さて準備ができたので定理を述べる。証明は複雑であるから省略するが idea は基本的には定理2のときと同じである。

定理3. ε を葉 F の tame end とする。そのとき

- (1) $L_\varepsilon(F)$ は有限個の $\text{depth} \leq d(\varepsilon)$ の真葉の和
- (2) $L_\varepsilon^*(F)$ は $\text{depth } d(\varepsilon)$ の葉で, $L_\varepsilon(F) = \text{Cl}_M(L_\varepsilon^*(F))$.
- (3) $F' \subset L_\varepsilon(F)$ ならば, F' のすべての end は $\text{depth} < d(F')$ の tame end であり, F' は $\text{depth } d(F') - 1$ の end は有限個もつ。

定理4. 葉 F_0 のすべての end が tame で $d(F_0) < \infty$ とする.
 このとき葉 F の end ε が $L_\varepsilon(F) = \mathcal{A}_M(F_0)$ を満たすならば,
 ε は depth d の tame end であり $L_\varepsilon^*(F) = F_0$ となる。

REFERENCES

- [1] G. Hector, *Classification cohomologique des germes de feuilletages*, Publication internes de l'UER de mathématiques pures, N°53, 1975.
- [2] H. Nakatsuoka, *On representations of homology classes*, Proc Japan Acad. 48 (1972), 360-364.
- [3] T. Nishimori, *Isolated ends of open leaves of codimension-one foliations*, Quart. J. Math. Oxford (3), 26 (1975), 159-167.
- [4] T. Nishimori, *Compact leaves with abelian holonomy*, Tohoku Math. Journ. 27 (1975), 259-272.
- [5] T. Nishimori, *Behaviour of leaves of codimension-one foliations*, to appear.
- [6] T. Nishimori, *Ends of leaves of codimension-one foliations whose limit sets consist of a finite number of leaves*, to appear.
- [7] L. C. Siebenmann, *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five*, Thesis, Princeton 1965.