

概均質ベクトル空間の相対不変超函数について

高知大 理 室 政和

(Masakazu Muro)

序.

(G, ρ, V) を $\mathbb{R}$ 上定義された 概均質ベクトル空間とする。すなわち G は、 $\mathbb{R}$ 上定義された ^{連結な}線型代数群で、 ρ は有限次元 $\mathbb{R}$ -ベクトル空間 V への線型表現であり、それはその複素化 $(G_{\mathbb{C}}, \rho, V_{\mathbb{C}})$ が $\mathbb{C}$ 上の有理表現で、 ^{$\mathbb{C}$ 上}概均質ベクトル空間になるものとする。さらに W を複素有限次元ベクトル空間として、 $(\sigma, W) \in G$ の *real analytic* な表現とする。 $\zeta(x)$ を V 上の W に値をとるベクトル値超函数としたとき、

$$(1) \quad \zeta(\rho(g) \cdot x) = \sigma(g) \zeta(x) \quad (g \in G)$$

が与えられるとき、 $\zeta(x)$ を σ に対応する相対不変超函数であると定義する。このとき、自然に次のことが問題となる。

問題；1)与えられた (G, ρ, V) 及び (σ, W) に対して、相対不変超函数のなる空間を決定せよ。

2) そのような相対不変超函数の support や singular support, 及び Fourier 変換像はどうなるか?

ここでは, (σ, W) が一次元表現, すなわち $\rho; G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ が real analytic な character の場合に, この問題が holonomic 系の理論の便で解くことができることを報告する。

1 概均質ベクトル空間と相対不変超函数。

$(G_{\mathbb{C}}, \rho, V_{\mathbb{C}})$ を $\mathbb{C}$ 上の正則概均質ベクトル空間 (regular irreducible prehomogeneous vector space) とする。我々は $V_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の作用で有限個の orbits に分解すると仮定する。 $P(x)$ を既約な相対不変多項式 (これは定数倍をのぞいて一意に定まる), $\chi(g)$ をそれに対応する character とする。

$(G_{\mathbb{R}}^+, \rho, V_{\mathbb{R}})$ を概均質ベクトル空間の real form とする。すなわち, $G_{\mathbb{R}}^+$ は $G_{\mathbb{C}}$ のひとつの real form の単位元を含む connected component であり, $\rho(G_{\mathbb{R}}^+) \subset GL(V_{\mathbb{R}})$ となっているものとする。特に character $\chi(g)$ が $G_{\mathbb{R}}^+$ 上 real valued の場合を考える。そして $(\sigma, W) = (\chi(g)^A, \mathbb{C})$, $(A \in \mathbb{C})$ という場合を考える。このとき, $\chi(g)^A$ に対応する相対不変超函数とは $V_{\mathbb{R}}$ 上の超函数 $\zeta(x)$ で, $\zeta(\rho(g) \cdot x) = \chi(g)^A \zeta(x)$ ($g \in G_{\mathbb{R}}^+$) を満たすものである。

まずこの式を線型微分方程式に書き直そう。 $\mathfrak{g} \in G_R^+$ の Lie algebra, $d\rho, \delta\chi$ は 各々 ρ, χ の infinitesimal representation とする。すると、次のことが成り立つ。

Proposition 1.1

$$(1.1) \quad \zeta(\rho(g) \cdot x) = \chi(g)^A \zeta(x) \quad (g \in G_R^+)$$

と、線型微分方程式系

$$(1.2) \quad \left(\langle d\rho(A) \cdot x, \frac{\partial}{\partial x} \rangle - A \delta\chi(A) \right) \zeta(x) = 0 \quad (A \in \mathfrak{g})$$

は同値である。すなわち (1) の超函数解 は (2) の 超函数解で 逆も正しい。

これは、簡単な計算で容易にたしかめることができる。

この線型微分方程式系 (1.2) を $\mathcal{WC}_A$ と書くことにする。以下 $\mathcal{WC}_A$ の超函数解を調べよう。

この目的のためには、 V_R 上の超函数とその cotangent bundle T^*V_R 上の microfunction とみなして調べるのが有用である。 $\mathcal{B}_{V_R}$ は V_R 上の超函数 (hyperfunction) の sheaf, $\mathcal{C}_{T^*V_R}$ は T^*V_R 上の microfunction の sheaf とする。このとき、

$$(1.3) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{S}P; & f & \longrightarrow (f, \Delta\rho(f)) \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{B}_{V_R} & \longrightarrow & (\mathcal{B}_{V_R}, \mathcal{C}_{T^*V_R - V_R}) \end{array}$$

によ、この間に D_V -Module としての isomorphism が存在する。(1.3) の map の意味は B_{V_R} の local section $f(x)$ に対して、 T^*V_R の zero section 上に $f(x)$ を、 $T^*V_R - V_R$ 上に microfunction $S\check{p}(f)$ と対応させるものである。 D_{V_R} は、 V_R 上の real analytic な係数を持つ微分作用素の環のなす sheaf であり、projection map $\pi: T^*V_R \rightarrow V_R$ によ、 T^*V_R 上の sheaf とみなすことができる。この isomorphism $S\check{p}$ によ、我々は、相対不変超関数を求めることを T^*V_R 上の (1.2) とみれば microfunction 解を決定することに問題を移しができることができる。

特に与えられた超関数 $u \in B_{V_R}$ に対して、 $\text{supp}(S\check{p}(u)) \subset T^*V_R$ を u の singular spectrum ということにする。(注意; 通常は、singular spectrum とは、 u 自身の V_R 上での support を除いた、 $\text{supp}(S\check{p}(u)) - V_R \subset T^*V_R - V_R$ のことを言うのであるが、我々の場合、 V_R も含めておいたほうが都合が良いのでこのように定義する。) また u を T^*V_R 上の microfunction 自身であると考えているときには、その singular support を単に T^*V_R 上の support と呼ぶことにする。

T^*V_R 上で局所的に (つまり超局所的に) Proposition 1.1. (1.2) の線型微分方程式系を考えるのは、 V_R 上で直接考えるより容易である。方程式の構造がかんたんであるからである。その

ような microfunction 解を $T^*V_{\mathbb{R}}$ 上うまくはりあわせて, $T^*V_{\mathbb{R}}$ 全体で global に定義された解を得ることができれば, S^V の map (1.3) でひき戻すことによつて, $V_{\mathbb{R}}$ 上の超函数解が得られ, したがつて相対不変超函数が得られることになる。

以下この方針にしたがつて, 主として Proposition 1.1. (1.2) の方程式の microfunction 解を構成することになる。

2. Complex holonomic system

まず "Complex manifold X 上の線型マイクログ微分方程式系" について復習しよう。詳しくは Kashiwara [1] を参照のこと。

X は n 次元 Complex manifold, D_X は X 上の holomorphic な函数を係数とする有限階の微分作用素の環のなす sheaf とする。自然に cotangent bundle T^*X 上では microdifferential operators の sheaf が得られる。これを $\mathcal{E}_X$ と書く。

X 上の線型微分方程式系 W とは coherent な左 D_X -Module のことである。通常, W の未知函数 $u(x)$ を持つ連立線型微分方程式系

$$(2.1) \quad P_i(x, D_x) u = 0. \quad (i=1, \dots, N)$$

は $\mathcal{I} \in P_1(x, D_x), \dots, P_N(x, D_x)$ によつて生成される左- D_X -Ideal

とあるとき, $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{I}$ としてあらわすことができる。我々は $\mathcal{M}$ と (2.1) の表示は同じものとして取り扱うので、単に方程式系 $\mathcal{M}$ と言ったとき (2.1) をあらわすものとする。

さて方程式系 $\mathcal{M}$ に対して characteristic variety $ch(\mathcal{M})$ を $Supp(\mathcal{E}_X \otimes \mathcal{M})$ によって定義する。これは T^*X の中の subvariety $\pi^{-1}(\mathcal{D}_X)$ であり, Ideal $\mathcal{I}$ の生成元をうまくとれば、その最高階の部分の多項式の共通零点としてあらわされる T^*X の中の subvariety である。特にこの characteristic variety の次元が、 X の次元に等しいとき、 $\mathcal{M}$ を holonomic system と言う。たとえば、我々が考えている Proposition 1.1. (1.2) の相対不変超函数を定義する system を複素化したもの

$$(2.2) \quad \mathcal{M}_A; \left(\langle d p(A)x, \frac{\partial}{\partial x} \rangle - \delta_X(A) \right) u(x) = 0 \quad (A \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$$

は、 $(G_{\mathbb{C}}, \rho, V_{\mathbb{C}})$ の orbit の数が有限個であるという条件のもとに $V_{\mathbb{C}}$ 上の holonomic system になる。

Holonomic system $\mathcal{M}$ は特徴づけられるものは、その characteristic variety の次元であるが、特にそれは次のような性質を持っている。

$$(2.3) \quad 1) \dim ch(\mathcal{M}) = \dim X$$

2) T^*X 上の 2-form $\omega = \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i$ は $ch(W\mathcal{L})$ 上に制限すると消える。

3) $(x, y) \in ch(W\mathcal{L})$ ならば、 $\forall \alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ に対して、
 $(x, \alpha y) \in ch(W\mathcal{L})$ である。

このような性質を持つ、 T^*X 内の subvariety を homogeneous Lagrangian subvariety という。 $ch(W\mathcal{L})$ が homogeneous Lagrangian subvariety であることを利用して、 $ch(W\mathcal{L})$ は X のいくつかの analytic subsets の conormal bundle の和として記述することができる。

というのは、 $\Lambda \in T^*X$ の中の $(x_0, y_0) \in T^*X$ の近傍で定義されたい。 ひとつの irreducible homogeneous Lagrangian subvariety であるとするとき、その X 上への projection $\pi(\Lambda)$ は X の中の irreducible subvariety になる。 特に $(x_0, y_0) \in \Lambda$ の近傍で、 Λ が non-singular で projection map $\pi|_{\Lambda}$; $\Lambda \rightarrow X$ の rank が constant であるとき、その近傍で

$$(2.4) \quad \Lambda = T_{\pi(\Lambda)}^* X$$

とあらわすことができるからである。 ここで $T_{\pi(\Lambda)}^* X$ は $\pi(\Lambda)$ の conormal bundle をあらわす。 homogeneous Lagrangian subvariety Λ が (x_0, y_0) の近傍で与えられたとき、 Λ の

non-singular points の集合 Λ_{reg} は open dense な subset であり, さらに Λ_{reg} 中の $\pi|_{\Lambda_{\text{reg}}}$ が maximal rank となる点, (ヤコビ行列の rank が最大である点) の集合はやはり open dense subset をなすので, そのような各点の近傍において, Λ は (2.4) と書きあらわせる。

ここで念のため conormal bundle の定義をしておく。 X を complex manifold, Y はその subvariety とする。 Y_{reg} によって Y の non-singular points のなる集合をあらわす。ある Y_{reg} の各点 y において tangent space $T_y Y_{\text{reg}}$ が得られる。そこで Y の conormal bundle $T_y^* X$ は, 次のように定義する。

$$(2.5) \quad T_y^* X = \bigcup_{y \in Y_{\text{reg}}} (T_{Y_{\text{reg}}}^* X)_y$$

ただし $(T_{Y_{\text{reg}}}^* X)_y = \{t \in T_y^* X; \langle \alpha, t \rangle_y = 0 \text{ for } \forall t \in T_y Y\}$ であり $\langle, \rangle_y$ は y における tangent space $T_y X$ と cotangent space $T_y^* X$ の pair 上の bilinear form である。

とにかく, これによ, $ch(WC)$ のほとんどすべての点, の近傍で, $ch(WC)$ は ある X 内の analytic subset の conormal bundle としてあらわされることかわか, け。

それでは, $ch(WC)$ を得るためには $ch(WC)$ を得るためには "どのような X 内の subvariety が必要で"。それらは, "のよう

性質を持っているであろうが、これについては次の Kashiwara [1] の結果がある。

$\mathcal{M}$ は complex manifold X 上の holonomic $\mathcal{D}_X$ -Module とする。 X の stratification $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在して、

$$(2.6) \quad \text{ch}(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X$$

と書けることが出来る。ここで $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が X の stratification であるとは、 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は X の connected な analytic subsets の family であり、次の条件を満たすものである。

(2.7) 1) $\overline{X_\alpha}$ と $\overline{X_\alpha} - X_\alpha$ は共に X の analytic subset である。

2) $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は X の locally finite covering である。

3) $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ if $\alpha \neq \beta$ 。

4) $\overline{X_\alpha} \cap X_\beta = \emptyset$ ならば $\overline{X_\alpha} \supset X_\beta$ 。

特に X が $\mathbb{C}$ 上で定義された algebraic manifold であり、stratification $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の各 stratum が algebraic subset となる場合には、我々は最初から各 stratum は irreducible かつ non-singular と仮定してよい。なぜならば、irreducible でない stratum は irreducible components に分解出来るから、またある stratum X_α が singularity を持つことから、その singular locus を $(X_\alpha)_{\text{sing}}$ とし、 $X_\alpha \in X_\alpha - (X_\alpha)_{\text{sing}}$ と

$(X_\alpha)_{\text{sing}}$ の二つの strata に分解し, さらに $(X_\alpha)_{\text{sing}}$ が singularity を持, ていふときには, これは irreducible components に分解したのと同じことをつづければ良い。これをくりかえすことによ, て最後には, non-singular な strata にまで分解してしもうことができる。この操作によ, て上の条件 (2.7) はそこなめれない。 $\bigcup_{\alpha} T_{X_\alpha}^* X$ が大きくなるはずである。

例として, たとえば (G_c, p, V_c) を有限個の orbits を持つ既約な 正則概均質ベクトル空間であるとする。このとき, holonomic system $\mathcal{W}_c$ が (2.2) によ, て定義されるが。この場合には $X = V_c$ の stratification $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は各 X_α を V_c 内の G_c -orbit として定義すればよい。性質 (2.7) をみることば, 自然に示される。

以下我々は $X \in \mathbb{C}$ 上定義された algebraic manifold として, stratification $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の各 stratum は irreducible non-singular algebraic subvariety であるものとする。

$$(2.8) \quad \Lambda_\alpha = \overline{T_{X_\alpha}^* X} \quad \left(\begin{array}{l} - \text{は Zariski closure} \\ \text{である} \end{array} \right)$$

とおく。このとき Λ_α は irreducible な homogeneous Lagrangian subvariety であり。

$$(2.9) \quad \text{ch}(W\tilde{C}) \subset \bigcup_{\alpha \in A} \Lambda_{\alpha C}$$

である。特に $\{\Lambda_{\alpha C}\}_{\alpha \in A}$ のうち、実際には $\text{ch}(W\tilde{C})$ に含まれていないような $\Lambda_{\alpha C}$ の族を $\{\Lambda_{\alpha}\}_{\alpha \in B}$ とし、 $C' = A - B$ とする。このとき、

$$(2.10) \quad \text{ch}(W\tilde{C}) = \bigcup_{\alpha \in C'} \Lambda_{\alpha C}$$

となる。このようにして得られた $\text{ch}(W\tilde{C})$ の irreducible components の family $\{\Lambda_{\alpha C}\}_{\alpha \in C'}$ は、相互に交わり、たいてい singular points を持て、このとき、さらに X への projection map による image $\pi(\Lambda_{\alpha})$ が singular point を持て、このとき、いすれの場合にも、microfunction 解を調べる場合には、このような点は最初を除いておいたほうが都合が良い。そこで次のように定義する。

$$(2.11) \quad 1) \quad \hat{\Lambda}_{\alpha C} = T_{\pi(\Lambda_{\alpha})_{\text{reg}}}^* V_C \subset \Lambda_{\alpha C}.$$

$$2) \quad \Lambda_{\alpha C}^{\circ} = \left\{ \begin{array}{l} x \in \Lambda_{\alpha C}; \text{ } x \text{ の近傍で } \Lambda_{\alpha C} \text{ は non-singular} \\ \text{であり } \forall \beta \in C', (\beta \neq \alpha) \text{ に対して} \\ x \notin \Lambda_{\beta} \end{array} \right\}.$$

このようにおくと $\Lambda_{\alpha C}^{\circ} \neq \hat{\Lambda}_{\alpha C} \neq \text{non-singular subvariety}$ であり、 $\Lambda_{\alpha C}$ の中の open subset となる。特に $x \in \Lambda_{\alpha C}^{\circ}$ のとき、 $x \in \text{ch}(W\tilde{C})$ の non-singular point と言ひ。 $x \in \Lambda_{\alpha C}^{\circ}$

のとき、 x は $\Lambda_{\alpha c}$ が regular position にある点、ということになる。

3. 実領域における holonomic system.

前節と同じようにして $\mathcal{W} = D_X / f$ は n -次元 complex algebraic manifold X 上の holonomic system であるものとする。この D_X -module $\mathcal{W}$ が、一個の未知函数 u に対する線型微分方程式系

$$(3.1) \quad P(\alpha, D_\alpha) u = 0 \quad (P(\alpha, D_\alpha) \in f)$$

と同等であることは、すでに述べた。また前節と同様に、 X の stratification $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で、各 stratum X_α は non-singular algebraic subvariety となるものがあつて、

$$(3.2) \quad \text{ch}(\mathcal{W}) \subset \bigcup_{\alpha \in A} T_{X_\alpha}^* X$$

となつてゐるものと仮定する。各 $\alpha \in A$ に対して、

$$(3.3) \quad \Lambda_{\alpha c} = \overline{T_{X_\alpha}^* X},$$

とおいて、 A の subset B に含まれる $\beta \in B$ に対しては $\Lambda_{\beta c}$ は $\text{ch}(\mathcal{W})$ に含まれる。 $C = A - B$ とあるとき

$$(3.4) \quad \text{ch}(\mathcal{W}) = \bigcup_{\alpha \in C} \Lambda_{\alpha c},$$

となつてゐるものとする。

今度は、この real form を考える。 $X_{\mathbb{R}} \subset X$ は X の一つの real form, 可なり $X_{\mathbb{R}}$ は real algebraic subvariety で、 X がその complex form となつてゐるものとする。こうすれば、 $X_{\mathbb{R}}$ 上の超函数の sheaf $\mathcal{B}_{X_{\mathbb{R}}}$, あるいは $T^*X_{\mathbb{R}}$ 上の microfunction の sheaf $\mathcal{C}_{T^*X_{\mathbb{R}}}$ が自然に定義され、holonomic system $\mathcal{WC}$ に対しこれも超函数解 ないしは microfunction 解を考えることが出来る。このとき、次が成り立つ。

Proposition 3.1.

$u \in \mathcal{WC}$ の超函数解とする。このとき u の singular spectrum $SS(u)$ は $ch(\mathcal{WC}) \cap T^*X_{\mathbb{R}}$ に含まれる。

これは 佐藤の基本定理の直接の結果である。

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $\Lambda_{\alpha\mathbb{C}}, \tilde{\Lambda}_{\alpha\mathbb{C}}$ は (2.11) で定義したものとし、

$$(3.5) \quad \Lambda_{\alpha}^{\circ} = \Lambda_{\alpha\mathbb{C}}^{\circ} \cap T^*X_{\mathbb{R}}, \quad \tilde{\Lambda}_{\alpha} = \tilde{\Lambda}_{\alpha\mathbb{C}} \cap T^*X_{\mathbb{R}},$$

とおく。このとき Λ_{α}° や $\tilde{\Lambda}_{\alpha}$ は $T^*X_{\mathbb{R}}$ の中の open subset になる。

以後 次の二つの仮定をおく。

(3.6) 仮定1 $\Lambda_\alpha = \Lambda_{\alpha\mathbb{C}} \cap T^*X_{\mathbb{R}}$ は real Lagrangian subvariety in $T^*X_{\mathbb{R}}$ であるか. ある α は 0次元の subvariety であるか α の可成りであるかである。

(3.7) 仮定2 特異に Λ_α が real Lagrangian subvariety とな, k とし, $\forall x \in \Lambda_\alpha$ の近傍では $\mathcal{E}_x \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{W})} \pi^{-1}(\mathcal{W}_x)$ (これは $\mathbb{C}$ として考えないうか) $\mathcal{W}$ と書く) は $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_\ell$ と $\mathcal{E}_x$ -Module として直和分解され各 $\mathcal{W}_i$ は quantized contact transformation によって $\mathcal{E}_x$ -Module として $\mathcal{W}_{(\lambda_k, m_k)}$ と同型になる。ここで $\mathcal{W}_{(\lambda_k, m_k)}$ ($\lambda_k \in \mathbb{C}$, $m_k \in \mathbb{N}^+$) は

$$\mathcal{W}_{(\lambda_k, m_k)} : (x_1 D_{x_1} - \lambda_k)^{m_k} u = 0, \\ D_{x_2} u = D_{x_3} u = \cdots = D_{x_n} u = 0$$

と $(0, dx_1)$ の近傍で定義された system である。

この二つの仮定のもとに $\mathcal{W}$ の各 $\Lambda_{\alpha\mathbb{R}}$ の近傍で microfunction 解を書きあらわすことができる。可成り u は $\mathcal{W}$ の solution とするとき,

$$(3.8) \quad u = v_1 \oplus v_2 \oplus \cdots \oplus v_\ell,$$

と, ℓ 個の microfunction の直和 とみなすことができる。ここで, v_i は $\mathcal{W}_i$ の microfunction solution である。

このようにして、結局 $\mathcal{W}$ の microfunction solution を調べるためには、各直和成分 $\mathcal{W}_i$ の解を調べれば良いことになる。

さて、超局所的には、 $\mathcal{W}_{(\lambda_R, m_R)}$ と同型の holonomic system の solution は $\Lambda_\alpha^\circ \cap \widehat{\Lambda}_\alpha$ の各点、の近傍においては、いわゆる有限階の "分数巾" あるいは "対数巾" の階数を持つ。マイクロ微分作用素 (microdifferential operators of "fractional" or "logarithmic" order) を使って一意的に書きあらわすことができる。それを説明しよう。

$t_0 = (x_0, y_0) \in \Lambda_\alpha^\circ \cap \widehat{\Lambda}_\alpha$ をひと fix して、 t_0 の近傍で $\mathcal{W}$ が、(3.6) の仮定 1., (3.7) の仮定 2. を満たしているものとする。このとき、 $x_0 = \pi(t_0)$ の近傍 (in $X_{\mathbb{R}}$) においては、局所座標系 $(x_1, \dots, x_n)$ をもって、とき、 $\pi(\Lambda_\alpha) = \{x_1 = \dots = x_m = 0\}$ と書くことができる。したがって、 t_0 の近傍では、

$$(3.9) \quad \Lambda_\alpha = T_{\pi(\Lambda_\alpha)}^* X_{\mathbb{R}} = \left\{ (x, \xi) \in T^* X_{\mathbb{R}}; \begin{array}{l} x_1 = \dots = x_m = 0 \\ \xi_{m+1} = \dots = \xi_n = 0 \end{array} \right\},$$

と書くことができる。ここで、 $t_0 = (0, dx_1)$ と書くことができる。そして microfunction v_R は、

$$(3.10) \quad v_R = P_R(x'', D_{x'}) \delta(x')$$

と書くことができることが示される。ここで $\delta(x')$ とは超

函数 $\delta(x_1) \cdots \delta(x_m)$ という一変数デルタ函数の積のあらわす
 x_0 の近傍での microfunction である。 $P_k(x'', D_{x'})$ は $T^*X_{\mathbb{R}}$ 上
 の "分数巾" あるいは "対数巾" のマイナロ微分作用素で $x'' =$
 $(x_{m+1}, \dots, x_n)$, $D_{x'} = (D_{x_1}, \dots, D_{x_m})$ だけに depend するものであ
 る。座標をと, て書けば x_0 の近傍で

$$(3.11) \quad P_k(x'', D_{x'}) = \sum_{j=0}^k P_{kj}(x'', D_{x'}) D_{x_1}^{\mu} (\log D_{x_1})^j,$$

と書ける。ここで $\mu \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^+$ として各 $P_{kj}(x'', D_{x'})$ は
 x'' と $D_{x'}$ のみに depend する E_x の section である。これは
 座標のとり方に depend した表示であり, $X_{\mathbb{R}}$ 上の座標変換にし
 たが, て表示の仕方も変わる。

特に $\mathcal{U}_k$ が $\mathcal{M}_k$ の解であるときには, 各 $P_{kj}(x'', D_{x'})$ ($j=0, \dots, k$) の order は $\lambda_k - \mu \in \mathbb{N}$ であり, k の値によらず一定であるが, $P_{kj}(x'', D_{x'}) \equiv 0$ であるかのいふかわかっていることが示される。そこで, この場合の $P_k(x'', D_{x'})$ の principal symbol を

$$(3.12) \quad \sigma(P_k)(x'', \xi') = \sum_{j=0}^k \sigma(P_{kj})(x'', \xi') \xi_1^{\mu} (\log \xi_1)^j$$

によ, て定義する。このように定義するとこの principal symbol
 は $X_{\mathbb{R}}$ の座標のとり方によらず定義される。そこで microfunction
 $\mathcal{U}_k$ の real principal symbol と

$$(3.13) \quad \sigma_{\Lambda_\alpha}(\psi_\alpha) = \sigma(P_\alpha)(x', \xi') \sqrt{|d\xi'|} / \sqrt{|dx'|},$$

と定義する。これは $|\psi_{\Lambda_\alpha}|^{1/2} \otimes |\psi_{X_R}|^{-1/2}$ の近傍で定義された real analytic section であり、このように定義することにより、 $\sigma_{\Lambda_\alpha}(\psi_\alpha)$ は X_R の座標のとり方によらなくなる。ここで、 ψ_{Λ_α} , ψ_{X_R} は 各々 Λ_α , X_R 上の volume element の sheaf である。

このように、local に定義した microfunction solution ψ_α の principal symbol $\sigma_{\Lambda_\alpha}(\psi_\alpha)$ の直和

$$(3.14) \quad \sigma_{\Lambda_\alpha}(u) = \bigoplus_{\alpha=1}^l \sigma_{\Lambda_\alpha}(\psi_\alpha)$$

により、 $\sigma_{\Lambda_\alpha}(u)$ microfunction solution u の real principal symbol $\sigma_{\Lambda_\alpha}(u)$ を定義することにする。

このような $\sigma_{\Lambda_\alpha}(u)$ は $\Lambda_\alpha \cap \tilde{\Lambda}_\alpha$ の各点の近傍で定義された $|\psi_{\Lambda_\alpha}|^{1/2} \otimes |\psi_{X_R}|^{-1/2}$ (の直和) の real analytic section である。

特に u が Λ_α 全体で定義された microfunction solution である場合には、 $\sigma_{\Lambda_\alpha}(u)$ は $\Lambda_\alpha \cap \tilde{\Lambda}_\alpha$ 全体に於て real analytic section として延長することが出来る。(局所的に定義したものをつなぎあわせてあげれば良い。)

real principal symbol の性質として重要なことは、次のことである。

Proposition 3.2.

$u_1, u_2 \in \Gamma_0 \in \Lambda_\alpha^\circ \cap \tilde{\Lambda}_\alpha$ の近傍で定義された microfunction Γ holonomic system W の solution と仮定し、 Γ に関するものとする。もし Γ の real principal symbol $\sigma_\alpha(u_1) = \sigma_\alpha(u_2)$ であるならば、 $u_1 \equiv u_2$ である。

これは W の solution を考える時には、少くとも超局所的には、microfunction のかわりに、その real principal symbol を考えれば「良い」とを示している。そこで、 $\text{ch}(W)$ の各 irreducible component Λ_α に対して、 $\coprod_{j \in J_\alpha} \Lambda_{\alpha j} = \tilde{\Lambda}_\alpha \cap \Lambda_\alpha^\circ$ は $\tilde{\Lambda}_\alpha \cap \Lambda_\alpha^\circ$ の connected component 分解とする。このとき、Prop. 3.2. によれば、各 connected component $\Lambda_{\alpha j}$ 上では W の microfunction 解は、その real principal symbols で決定される。我々がここでやろうとしている W の 超函数解の決定方法は $\{\Lambda_{\alpha j}\}_{\substack{\alpha \in C \\ j \in J_\alpha}}$ の各 component 上に real principal symbol の section を与えて (つまり) W の microfunction solution を与えて) それがどのような時に $T^*X_{\mathbb{R}}$ 全体にまで W の microfunction solution として延長されるかを調べたうえで、結果として超函数解をすべて決定してしまうという方法である。ここでは技術的な詳しいことにはふれられないので、次節で、実例によって実際に相対不変超函数を決定して説明にかえることにする。

4 実例

概均質ベクトル空間 $(G_{\mathbb{C}}, \rho, V_{\mathbb{C}})$ と $\mathbb{C}^*$,

$$(4.1) \quad G_{\mathbb{C}} = GL_n(\mathbb{R})^+ \times SL_n(\mathbb{R}) \ni g = (g_1, g_2)$$

$$V_{\mathbb{C}} = M_n(\mathbb{C}) \ni x$$

$$\rho(g): x \longmapsto g_1 x g_2$$

となる場合を考える。 $\chi(g) = \det g_1$ とおく。 $\chi(g)$ に対応する
 相対不変式は $p(x) = \det x$ である。 $\chi(g)^{\lambda}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) に対する
 相対不変超関数を決める holonomic system は、

$$(4.2) \quad W_{\mathbb{C}}; \left(\langle dp(A)x, \frac{\partial}{\partial x} \rangle - \lambda \delta \chi(A) \right) u = 0$$

である。この characteristic variety は、

$$(4.3) \quad \text{ch}(W_{\mathbb{C}}) = \bigcup_{i=1}^n T_{S_{i\mathbb{C}}}^* V_{\mathbb{C}} = \bigcup_{i=0}^n \overline{T_{S_{i\mathbb{C}}}^* V_{\mathbb{C}}},$$

と与えられる。 $T_{S_{i\mathbb{C}}}^* = \{ x \in M_n(\mathbb{C}); \text{rank } x = n-i \}$ である。

各 $S_{i\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}$ の作用 $\mathbb{C}^*$ による orbit に等しい。

$\{S_{i\mathbb{C}}\}_{i=0,1,\dots,n}$ は $V_{\mathbb{C}} = M_n(\mathbb{C})$ の stratification を与えている。

$$(4.4) \quad \Lambda_{i\mathbb{C}} = \overline{T_{S_{i\mathbb{C}}}^* V_{\mathbb{C}}}$$

とみると、これは Lagrangian subvariety になる。そして

$$\mathbb{C}^* \tilde{\Lambda}_{i\mathbb{C}} = T_{S_{i\mathbb{C}}}^* V_{\mathbb{C}} \text{ である。}$$

相対空間 V_c^* 上への双線表現 p^* を考えると (G_c, p^*, V_c^*) も正則概均質ベクトル空間になる。特に V_c 上の内積 $\langle x, y \rangle = \alpha(x, y)$ によつて, V_c と V_c^* と同一視するとき, V_c と V_c^* の G_c -orbit 分解は全く同じであることがわかる。そこで, V_c^* 内の G_c -orbit も同じ λ_{ic} と書くことにする。 T^*V_c は自然に $V_c \times V_c^*$ とみなすことができるから $T^*V_c^*$ も同じく $V_c \times V_c^*$ とみなすことができる。そこで, $\lambda_{ic}^* = \overline{T_{\lambda_{ic}}^* V_c^*}$ とするとき, $\lambda_{ic} = \lambda_{n-i}^*$ となる。 $\widetilde{\lambda}_{ic}^* = T_{\lambda_{ic}}^* V_c^*$ であつて,

$$(4.5) \quad \lambda_{ic}^{\circ} = \widetilde{\lambda}_{ic} \cap \widetilde{\lambda}_{n-i}^*$$

$$\lambda_{ic}^{*\circ} = \widetilde{\lambda}_{n-i} \cap \widetilde{\lambda}_{ic}^*$$

と書くことができることが示される。

ここで, λ_{ic}° は λ_{ic} 内の open dense subset である。 $V_c \times V_c^*$ には自然に G_c が作用して λ_{ic} はこの G_c の作用で不変である。特に λ_{ic}° はひとつの G_c -orbit になる。この orbit を生成する点は

$$(4.6) \quad \left(\begin{bmatrix} I_{n-i} \\ 0_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_{n-i} \\ I_i \end{bmatrix} \right) \in V_c \times V_c^*$$

である。今の場合 $\widetilde{\lambda}_{ic} \cap \lambda_{ic}^{\circ} = \lambda_{ic}^{\circ}$ である。

今度は実領域で相対不変超函数を考える。 $G_{\mathbb{R}}^+ = GL_n(\mathbb{R})^+ \times SL_n(\mathbb{R})$, $V_{\mathbb{R}} = M_n(\mathbb{R})$, とおくとこれは (G_c, p, V_c) のひとつ

の real form となる。この $V_{\mathbb{R}}$ 上での holonomic system $\mathcal{M}_\lambda$ の超函数解を決定しよう。まず characteristic variety $\text{ch}(\mathcal{M}_\lambda)$ の各 irreducible component λ_{ic} の real locus

$\lambda_{i\mathbb{R}} = \lambda_{ic} \cap T^*V_{\mathbb{R}}$ は $T^*V_{\mathbb{R}}$ 内の real Lagrangian subvariety であり、この点では 仮定 1 をおこなっている。(3.6)。

各 $\tilde{\lambda}_{i\mathbb{R}} = \tilde{\lambda}_{ic} \cap T^*V_{\mathbb{R}}$ の各点の近傍では holonomic system $\mathcal{M}_\lambda$ は、

$$\mathcal{M}_{(\lambda_i, 1)} : \begin{aligned} (x_1 D_{x_1} - \lambda_i) u &= 0 \\ D_{x_2} u &= \dots = D_{x_m} u = 0 \end{aligned} \quad (m = n^2)$$

$$\text{ただし} \quad \lambda_i = i\lambda + \frac{1^2}{2} - \frac{1}{2},$$

と同型である。さらに 仮定 2 (3.7) をおこなう。

$\lambda_{i\mathbb{R}}^0 = \lambda_{i\mathbb{R}}^0 \cap \tilde{\lambda}_{i\mathbb{R}}$ は $\mathbb{Z}$ の connected components に分かれる。

各 components は $G_{\mathbb{R}}^+$ の作用により、 $\mathbb{Z}$ の orbit になり、 $\mathbb{Z}$ あり。それらは、

$$P_{i\varepsilon} = \left(\begin{bmatrix} I_{n-i} \\ 0_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0_{n-i} & \varepsilon \\ & I_{i-1} \end{bmatrix} \right) \in V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^* \quad (\varepsilon = \pm)$$

により、 $\mathbb{Z}$ が生成される。そこで P_{i+} (resp. P_{i-}) により、 $\mathbb{Z}$ が生成される $G_{\mathbb{R}}^+$ -orbit を λ_i^+ (resp. λ_i^-) とおく。

$\lambda_i^\pm$ ($\varepsilon = \pm$) 上の任意の $\mathcal{M}_\lambda$ の microfunction solution u に対して、その principal symbol は

$$(4.7) \quad \sigma_{\lambda_i^\varepsilon}(u) = C_{\lambda_i^\varepsilon}(u) \cdot |P_{\lambda_i}|^A \sqrt{|\omega_{\lambda_i}|} / \sqrt{|dx|}$$

と書くことができる。ここで $C(u)$ は u には depend する定数であり、

$$(4.8) \quad P_{\lambda_i} = P \circ \pi|_W / \langle x, y \rangle^i \Big|_{\lambda_i^0},$$

$$\omega_{\lambda_i} = \pi^*(dx)|_W / (\langle x, y \rangle)^{i^2} \Big|_{\lambda_i^0},$$

で定義されるものである。ここで $dx = \lambda dx_i y_i$ による V_α 上のユークリッド測度、また

$$W = \{(x, y) \in V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^* ; \langle d\phi(A)x, y \rangle = 0 \text{ for } \forall A \in \mathcal{G}_0\}$$

$$(\mathcal{G}_0 = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}).$$

である。 P_{λ_i} , ω_{λ_i} は各々 λ_i^0 上の real analytic な non-zero function と u non-zero の volume form となる。この $C_{\lambda_i^\varepsilon}(u)$ は u の λ_i^ε 上の coefficient と言う。

特に u が $V_{\mathbb{R}}$ 上の $\mathcal{M}_0$ の超函数解である場合 各 coefficient $C_{\lambda_i^\varepsilon}(u)$ の間には 次の関係がある。

$$(4.9) \quad \begin{bmatrix} C_{\lambda_{i+1}}^+(u) \\ C_{\lambda_{i+1}}^-(u) \end{bmatrix} = \frac{\Gamma(\lambda+i+1)}{\sqrt{2\pi}} \begin{bmatrix} \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+i+1}), \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+i+1}) \\ \exp(\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+i+1}), \exp(-\frac{\pi}{2}\sqrt{\lambda+i+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{\lambda_i}^+(u) \\ C_{\lambda_i}^-(u) \end{bmatrix}$$

この matrix は $\lambda = -i-1, -i-2, \dots$ においては定義されていないが, 逆行列は意味を持つので, すべての λ について定義されているとみてよい。逆にこれらの関係式 (4.9) をみたす $\{C_{\lambda}^{\varepsilon}(u)\}$ は coefficients に持つような超函数は, 必ず一意に存在することが示される。

この関係式を利用して次のような結果を得る。

Theorem 4.1.

(4.2) の $\mathcal{H}_{\lambda}$ をみたす超函数解は 二次元のベクトル空間をなし, 次のものにより生成される。

1) $\lambda \neq -1, -2, \dots$ の場合;

$$() \quad |P(x)|_{\varepsilon}^{\lambda} = \begin{cases} |\det x|^{\lambda} & \text{if } \varepsilon(\det x) > 0 \\ 0 & \text{if } \varepsilon(\det x) < 0 \end{cases} \quad (\varepsilon = \pm)$$

という超函数 $|P(x)|_{\varepsilon}^{\lambda}$ が $\operatorname{Re}(\lambda) \gg 0$ のところからの解析接続によって $\lambda \neq -1, -2, \dots$ を除いて得られる。これが basis となる。

2) $\lambda = -1, -2, \dots, -(n-1)$ の場合;

$\omega_{\lambda} \in \mathcal{H}_{\lambda}$ の solution として $\operatorname{supp}(\omega_{\lambda}) = \overline{\mathcal{V}_{(-\lambda)}}$ となるものとする。これは定数倍を除いてユニークに存在する。(これは $\overline{\mathcal{V}_{(-\lambda)}}$ 上の $SL_+(\mathbb{R}) \times SL_+(\mathbb{R})$ -不変測度になる) また $\nu_{\lambda} \in \mathcal{H}_{\lambda}$ の solution として $\operatorname{supp}(\nu_{\lambda}) = \overline{\mathcal{V}_{(-\lambda-1)}}$ となるものとする。これは

定数倍及び $\omega_\lambda \in \text{modulo}$ にして $I = -1$ に存在する。特

$$\widehat{\omega}_\lambda = \int \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle x, y \rangle) \omega_\lambda(y) dy = (\text{const.}) \omega_{-n-\lambda} \quad (\text{あり})$$

$\widehat{v}_\lambda = (\text{const.}) v_{-n-\lambda} \pmod{\omega_\lambda}$ が成立する。 W_λ の解の basis は $\omega_\lambda, v_\lambda$ である。

3) $\lambda = -1, -2, \dots$ の場合;

W_λ の解の basis は $|\widehat{P(x)}|_\varepsilon^\lambda \quad (\varepsilon = \pm)$ である。

参考文献

Kashiwara M [1]; Systems of micro differential equations (Birkhäuser) 1983.