

$\Delta u = u$ の解の変形

京大 数理研 柏原 正樹

神保 道夫

三輪 哲二^{*}

高次元の変形理論の一例として次のようなモデルを考察する： $\mathbb{R}^3$ 内の円

$$C : x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0$$

ととり, $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, $x = (x, y, z)$ について, $\Delta u = u$ の解 u の C のまわりのモノトローピーを不変にしつつ半径 a を変えることを考えよう. $z = \pm ia$ (複素) 特性帯

$$\Delta(x) = x^2 + y^2 + (z - ia)^2$$

$$\bar{\Delta}(x) = x^2 + y^2 + (z + ia)^2$$

を導入し, 次の諸条件を満たす

u を考える:

$$1) \Delta u = m^2 u \quad (m > 0)$$

$$2) u = \Delta(x)^{l+\frac{1}{2}} f(x) + \bar{\Delta}(x)^{l-\frac{1}{2}} g(x) \quad (f, g \text{ は正則})$$

$$3) |u(x)| = O(e^{-m|x|}) \quad (\text{これは有界性の仮定と同値})$$

$$4) (x\partial_y - y\partial_x)u = 0 \quad (\text{即ち回転不変, 或は } C \text{ 上定数})$$

^{*} 講演者は三輪哲二氏. 文責・研究代表者.

これだけ仮定すると解は有限 (= 2) 次元となる。(モノトニ-

ミ - を決めた l は止めておく。) 更に

$$u_l(x) = \Delta(x)^{l-\frac{1}{2}} f_l(x) + \bar{\Delta}(x)^{-l+\frac{1}{2}} \bar{g}_l(x)$$

$$\bar{u}_{-l}(x) = \Delta(x)^{l+\frac{1}{2}} g_{-l}(x) + \bar{\Delta}(x)^{-l-\frac{1}{2}} \bar{f}_{-l}(x)$$

$$f_l(x)|_C = 1, \quad \bar{f}_{-l}(x)|_C = 1$$

とすると一意に定まる。(g_l のオは少し悪い部分なので自動的に定まる) 有限次元だから、本質的に一系があるだろうと考えられるが、実際 $P(x, D) \in \text{End}(\mathcal{D}/(\mathcal{D}(\Delta-m^2) + \mathcal{D}(x\partial_y - y\partial_x)))$ に対しては、 u が 1), 4) の解なら $P(x, D)u$ も 1), 4) の解となる。 $\partial_z, \partial_{\bar{z}}$ についても同様であり、更に $\partial = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z$ とおけば;

$$L = \partial^2 \partial_z - m^2 z, \quad M = \partial^2 + \partial - m^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

を同じ性質を持つ。このことは

$$[L, \Delta] \in \mathcal{D}(\Delta-m^2) + \mathcal{D}(x\partial_y - y\partial_x)$$

と書けることからわかる。以上のことから

$$a\partial_a \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -ia & 0 \\ 0 & ia \end{pmatrix} \partial_z + E \right) \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix}$$

$$L \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -ia & \\ & ia \end{pmatrix} \partial_z^2 + F\partial_z + G \right) \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix} = (-a^2 \partial_z^2 + J\partial_z + K) \begin{pmatrix} u_l \\ \bar{u}_{-l} \end{pmatrix}$$

が得られる。ここに $E, F, \dots, K$ は a に依存する定数行列である。以上により a を変数に加えても holonomy 系となったから、全体の両立条件から $E, F, \dots, K$ の間に非線形の方程式が立つ。これを直接計算するのは大変なので次の様に工夫する:

$$K(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}}(m \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) = \frac{e^{-m \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

を用い ($K_{\frac{1}{2}}$ は変形 Bessel 函数),

$$u(x) = \int K(x, y, z-t) v(t) dt$$

と置けば、1)-3) は満たされ、4) は v の対応する条件から実現できる。この変換ですべてを v に翻訳すると一変数の問題に帰着する。

$$\partial_z \longleftrightarrow \partial_t$$

$$L \longleftrightarrow t \cdot (\partial_t^2 - m^2)$$

$$M \longleftrightarrow t \cdot (\partial_t^2 - m^2) \cdot t$$

となるから、上の holonomy 系は、

$$\begin{cases} \partial_a \vec{v} = \left(\begin{bmatrix} -ia & \\ & ia \end{bmatrix} \partial_t + E \right) \vec{v} \\ \left(\begin{bmatrix} t-ia & \\ & t+ia \end{bmatrix} \partial_t^2 - F \partial_t - G - m^2 t \right) \vec{v} = 0 \\ ((t^2 + a^2) \partial_t^2 - (J - 2t) \partial_t - K - m^2 t^2) \vec{v} = 0 \end{cases}$$

となり、常微分系のルンゲ-タウ a による変形となった。 t に

関する微分方程式は更に

$$\begin{cases} \partial_t \vec{v} = \left(\frac{1}{t-ia} \begin{pmatrix} \ell-1 & \xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{t+ia} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \eta & -\ell-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \kappa \end{pmatrix} \right) \vec{v} \\ \kappa^2 + \lambda\mu = m^2 \\ 2\ell\kappa + \xi\mu + \eta\lambda = 0 \end{cases}$$

と書き直せる. この特異点の位置から, monodromy 不変の条件が Painlevé V (Painlevé IV の 4 個の特異点のうちの一組が合流したものを) の解で表せることがわかる. ($[\partial_t, \partial_a] = 0$ と具体的に書かばよい)

もう少し増したやり方として τ 関数を使う方法がある.

$$\frac{d \log \tau(a)}{da} = \frac{\xi\eta}{a} + i(\xi\mu - \eta\lambda) - 2i\kappa$$

が, 一般論

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \left(\sum \frac{A_\mu}{x-a_\mu} \right) Y \Rightarrow d_{a_1 \dots a_n} \log \tau(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{2} \text{trace } A_\mu A_\nu d \log \tau(a_1, \dots, a_n)$$

の特別な場合として得られ, 変形の方程式は

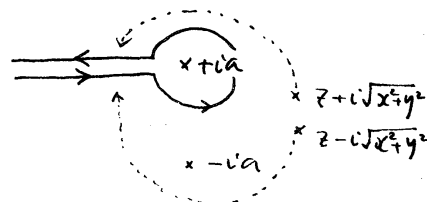
$$\sigma(a) = a \frac{d \log \tau(a)}{da}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{m} \sigma''(a) \right)^2 = & - \left(4(\sigma - a\sigma') - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma'}{m} \right)^2 + 2\ell - 2 \right)^2 \\ & + \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\sigma'}{m} \right)^2 + (2\ell-3)^2 \right) \left(\left(\frac{\sigma'}{m} \right)^2 + (2\ell+3)^2 \right) \end{aligned}$$

となる. $V(t) = (\vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t))$ とおき, モノドロミ行列 $V(t)$

$\mapsto V(t)M$ を考察しよう. 図のような

積分路の場合には, $z \pm i\sqrt{x^2+y^2}$ が積分路にひかれるので, $x^2+y^2=0$ の余法



線にも特異点が出る可能性がある。それを消す必要から
 Γ は $\varepsilon \rightarrow 0$ に制限がつく。 $t = \pm i'a$ にかける ε / Γ は

$$V(t) = \hat{V}_{\pm}(t) (t \mp i'a)^{(\pm l - 1/2)}$$

$t = \infty$ にかける ε / Γ は

$$V(t) \begin{pmatrix} e^{2\pi i l} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \hat{V}_{\infty}(t) \frac{1}{t} \begin{pmatrix} e^{mt} & \\ & e^{-mt} \end{pmatrix}$$

($\wedge$ をつけたのは正則な部分である。 z 軸上の特異性を消す
 ためには

$$u^{(+)}(0,0,z) = -e^{-2\pi i l} u^{(-)}(0,0,z)$$

とすればよい。ここに

$$u^{(+)}(0,0,z) = \int \frac{e^{-m(z-t)}}{z-t} \vec{v}_1(t) dt$$

$$u^{(-)}(0,0,z) = \int \frac{e^{m(z-t)}}{t-z} \vec{v}_1(t) dt$$

よって

$$(1 - e^{2\pi i l}) \vec{v}_1(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int \frac{e^{-m(t-z)} - e^{2\pi i l} e^{m(t-z)}}{t-z} \vec{v}_1(t) dt$$

同様に $\vec{v}_2$ にもして

$$(1 - e^{2\pi i l}) \vec{v}_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{-m(t-z)} - e^{m(t-z)}}{t-z} \vec{v}_2(t) dt$$

という積分表示があるから、これから上を確かめることができる。