

2 元 3 次形式のゼータ関数、 歴史と新予想

大阪大学 理学部 大野 泰生 (Yasuo Ohno)

1 序

本稿では、2 元 3 次形式のゼータ関数の係数を、具体的に書き出し、比較することによって得られた、ある予想を紹介する。このゼータ関数は、T. Shintani[25]によって二十余年前に定義されたもので、四つ組の Dirichlet 級数である。多分これまで、この級数の係数が具体的に書き出されたことはなく、四つともが、互いに異なる関数だと思われていた。今回紹介する予想は、この関数が、二組ずつ本質的に同じ関数であると主張するものである。

大阪大学理学部の伊吹山先生が、2 元 3 次形式のゼータ関数は、すでに良く知られている関数の有限和や積で書けるのではないかと、もし 2 元 3 次形式のゼータ関数の係数が具体的に書き出せれば、その表記の予想が立つかもしれない、という考えを話して下さった。これはつまり、2 元 3 次形式のゼータ関数の伊吹山・斉藤理論にあたるものが、存在するにちがいない、という意味だと思われる。このことが今回、2 元 3 次形式のゼータ関数の係数を具体的に書き出そうと思った動機である。

2 元 3 次形式のゼータ関数は、Dirichlet 級数の形で定義されており、その係数は 2 元 3 次形式のある種の類数で与えられている。H. Davenport の論文を調べてみると、2 元 3 次形式の類数が求められることが分かり、従ってゼータ関数の係数が具体的に書き出せることが判明した。本稿の 4 章において、類数計算に用いたこの Davenport の理論を、2 元 3 次形式の類数の簡単な歴史とともに紹介する。

2 元 3 次形式のゼータ関数の定義と、T. Shintani によって与えられた、収束、解析接続、極とその留数、および関数等式についての定理は、2 章で紹介する。その後 3 章では、Davenport の理論に基づいて、3 次形式の類数を算出し、2 元 3 次形式のゼータ関数の係数を具体的に求めた結果得られた予想を述べると共に、B. Datskovsky と D. J. Wright によって得られた関数等式の対角

化を用いて、予想を認めた時の、(3 次形式の) ゼータ関数の新しい形の定義と関数等式を与える。

ここであらかじめ注意しておくが、もともと目標とした、既知の関数の有限和や積によるゼータ関数の表記についての予想は、まだ得られていない。今回紹介する予想は、先にも述べたように、ゼータ関数が二組ずつ、本質的に同じものであるというものである。

2 2 元 3 次形式のゼータ関数

まず基本的な定義と記号を定める。2 元 3 次形式の空間 V を

$$V = \{F(u, v) = x_1 u^3 + x_2 u^2 v + x_3 u v^2 + x_4 v^3 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}\}$$

とし、 V の部分集合 L と $\hat{L}$ を

$$L = \{F(u, v) = x_1 u^3 + x_2 u^2 v + x_3 u v^2 + x_4 v^3 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{Z}\}$$

$$\hat{L} = \{F(u, v) = x_1 u^3 + x_2 u^2 v + x_3 u v^2 + x_4 v^3 \in L \mid x_2, x_3 \in 3\mathbf{Z}\}$$

で定める。 L と $\hat{L}$ は、ある内積に関する双対格子になっている。

2 元 3 次形式

$$F(u, v) = x_1 u^3 + x_2 u^2 v + x_3 u v^2 + x_4 v^3$$

の判別式 $D_3(F)$ を

$$D_3 = D_3(F) = 18x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2^2 x_3^2 - 4x_1 x_3^3 - 4x_2^3 x_4 - 27x_1^2 x_4^2$$

で定義する。 $\hat{L}$ の元の判別式は 27 の倍数になることが、簡単にわかる。

V の元 $F(u, v)$ と $GL(2, \mathbf{R})$ の元 g に対して、

$$gF(u, v) = F((u, v)g)$$

で作用を定義する。 V の元 $F_1(u, v)$ と $F_2(u, v)$ が同値であるとは、 $SL(2, \mathbf{Z})$ の元 g で、

$$gF_1(u, v) = F_2(u, v)$$

となるものが存在することと定義する。同値な V の元の判別式は一致する。

$L(n), \hat{L}(n)$ でそれぞれ、 L と $\hat{L}$ の元で、判別式 $D_3 = n$ のものの全体を記す。類数 $h(n), \hat{h}(n)$ などを次で定義する。

$$h(n) = \#\{L(n) \text{ に含まれる同値類}\}$$

$$\hat{h}(n) = \#\{\hat{L}(n) \text{ に含まれる同値類}\}$$

$$h_1(n) = \#\{L(n) \text{ の元で } SL(2, \mathbb{Z}) \text{ 固定群の order が } 1 \text{ のものによる同値類}\}$$

$$\hat{h}_1(n) = \#\{\hat{L}(n) \text{ の元で } SL(2, \mathbb{Z}) \text{ 固定群の order が } 1 \text{ のものによる同値類}\}$$

$$h_2(n) = \#\{L(n) \text{ の元で } SL(2, \mathbb{Z}) \text{ 固定群の order が } 3 \text{ のものによる同値類}\}$$

$$\hat{h}_2(n) = \#\{\hat{L}(n) \text{ の元で } SL(2, \mathbb{Z}) \text{ 固定群の order が } 3 \text{ のものによる同値類}\}$$

$n \neq 0$ ならば、 $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$ が成り立つ。

T. Shintani[25] は、3 次形式の類数に対して次の四つの Dirichlet 級数を定義した。

$$\xi_1(L, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_1(n) + \frac{1}{3}h_2(n)}{n^s}$$

$$\xi_2(L, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(-n)}{n^s}$$

$$\xi_1(\hat{L}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{h}_1(n) + \frac{1}{3}\hat{h}_2(n)}{n^s}$$

$$\xi_2(\hat{L}, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(-n)}{n^s}$$

これらの関数に対して、次の定理が与えられている。

定理 2.1 (T. Shintani[25]) (i) 先の四つの Dirichlet 級数は、 $\operatorname{Re}(s) > 1$ で絶対収束する。そして、 $s = 1$ と $s = \frac{5}{6}$ の 1 位の極を除いた全平面で正則関数に解析接続され、以下の関数等式を満たす。

$$\begin{pmatrix} \xi_1(L, 1-s) \\ \xi_2(L, 1-s) \end{pmatrix} = \Gamma(s - \frac{1}{6})\Gamma(s)^2\Gamma(s + \frac{1}{6})2^{-1}3^{6s-2}\pi^{-4s} \\ \times \begin{pmatrix} \sin 2\pi s & \sin \pi s \\ 3\sin \pi s & \sin 2\pi s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(\hat{L}, s) \\ \xi_2(\hat{L}, s) \end{pmatrix}$$

(ii) $s = 1$ および、 $s = \frac{5}{6}$ における留数は次の通りである。

	$\xi_1(L, s)$	$\xi_2(L, s)$	$\xi_1(\widehat{L}, s)$	$\xi_2(\widehat{L}, s)$
$s = 1$	$\frac{\pi^2}{9}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^2}{162}$	$\frac{\pi^2}{81}$
$s = \frac{5}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{18}r$	$\frac{1}{6}r$	$\frac{\sqrt{3}}{162}r$	$\frac{1}{54}r$

$$\text{ただし、} r = \zeta\left(\frac{2}{3}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)(2\pi)^{\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

B. Datskovsky と D. J. Wright[4] は、 $\mathbb{C}$ 上および $\mathbb{Q}_p$ 上で 2 元 3 次形式の空間を扱い、この空間の adelic zeta functions の解析接続、関数等式、極の位置とその留数を求めた。また彼等はこの論文の中で、2 元 3 次形式のゼータ関数の以下のような、無限和による表記を与えている。

$$\xi_i(L, s) = 2\zeta(4s)\zeta(6s-1) \sum_k o(k)^{-1} |\Delta_k|^{-s} \frac{R_k(2s)}{R_k(4s)}$$

ここで $i = 1$ の時の和は、 $[k : \mathbb{Q}] \leq 3$ なるすべての totally real な体を走り、 $i = 2$ の時の和は、 $[k : \mathbb{Q}] \leq 3$ なる体で、complex place を持つものの全体を走る。 ζ は Riemann ゼータ関数、 ζ_k は k の Dedekind ゼータ関数、 Δ_k は k の判別式で、 $o(k)$, $R_k(s)$ は以下のとおりである。

$$o(k) = \begin{cases} 6, & \text{if } [k : \mathbb{Q}] = 1, \\ 2, & \text{if } [k : \mathbb{Q}] = 2, \\ 3, & \text{if } [k : \mathbb{Q}] = 3, \end{cases}$$

$$R_k(s) = \begin{cases} \zeta(s)^3, & \text{if } [k : \mathbb{Q}] = 1, \\ \zeta(s)\zeta_k(s), & \text{if } [k : \mathbb{Q}] = 2, \\ \zeta_k(s), & \text{if } [k : \mathbb{Q}] = 3. \end{cases}$$

3 予想

これまで、2 元 3 次形式の四つのゼータ関数の係数が、具体的に書き出されたことはないようである。これらの関数を詳しく調べるために今回、3 次形式の類数を具体的に求めることによって、これらの関数の係数を 200 項目まで書き出すことを行った。その結果次の予想が得られた。

予想 3.1

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \xi_1(\hat{L}, s) = 3^{-3s} \xi_2(L, s) \\
 (ii) \quad & \xi_2(\hat{L}, s) = 3^{1-3s} \xi_1(L, s)
 \end{aligned}$$

200 項目までの各係数に対して、この予想は常に正しいことがわかっている。

またこの予想が、関数等式や、 $s = 1$ と $s = \frac{5}{6}$ での留数に対して、矛盾しないことが確認できる。

考察 1

予想 3.1 の (i) と (ii) は同値である。

Proof

(i) を仮定して (ii) を導く。定理 2.1 の下側の関数等式に (i) を代入すると、

$$\begin{aligned}
 \xi_2(L, 1-s) &= \Gamma(s - \frac{1}{6}) \Gamma(s)^2 \Gamma(s + \frac{1}{6}) 2^{-1} 3^{3s-2} \pi^{-4s} \\
 &\quad \times \{3 \sin \pi s \xi_2(L, s) + 3^{3s} \sin 2\pi s \xi_2(\hat{L}, s)\}
 \end{aligned}$$

s に $1-s$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
 \xi_2(L, s) &= \Gamma(\frac{5}{6} - s) \Gamma(1-s)^2 \Gamma(\frac{7}{6} - s) 2^{-1} 3^{1-3s} \pi^{4s-4} \\
 &\quad \times \{3 \sin \pi s \xi_2(L, 1-s) - 3^{3(1-s)} \sin 2\pi s \xi_2(\hat{L}, 1-s)\}
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \Gamma(z)$ を用いると、

$$\begin{aligned}
 \xi_2(L, s) \sin \pi(s - \frac{1}{6}) \sin^2 \pi s \sin \pi(s + \frac{1}{6}) \Gamma(s + \frac{1}{6}) \Gamma(s)^2 \Gamma(s - \frac{1}{6}) 2 \cdot 3^{3s-1} \pi^{-4s} \\
 = 3 \sin \pi s \xi_2(L, 1-s) - 3^{3(1-s)} \sin 2\pi s \xi_2(\hat{L}, 1-s)
 \end{aligned}$$

この式の $\xi_2(L, 1-s)$ に上の最初の式を代入すると、

$$\begin{aligned}
 3^{3(1-s)} \xi_2(\hat{L}, 1-s) &= \Gamma(s - \frac{1}{6}) \Gamma(s)^2 \Gamma(s + \frac{1}{6}) 2^{-1} 3^{3s-2} \pi^{-4s} \\
 &\quad \times \{3 \sin 2\pi s \xi_2(L, s) + 3^{3s+1} \sin \pi s \xi_2(\hat{L}, s)\}
 \end{aligned}$$

この右辺は、(i) および、もう一方の関数等式により、 $3\xi_1(L, 1-s)$ に等しい。 s に $1-s$ を代入すると、

$$3^{3s}\xi_2(\hat{L}, s) = 3\xi_1(L, s)$$

よって、(ii) が導かれた。逆も同様にできる。

Q.E.D.

考察 1 により、予想が正しい時、T. Shintani によって与えられた関数等式ふたつが、同値になることもわかる。また、関数等式に $s = \frac{1}{2}$ を代入した式は、予想 3.1 の式に $s = \frac{1}{2}$ を代入したものと一致する。

考察 2

定理 2.1 の留数の表より、以下がわかる。

$$(i) \quad \text{Res}_{s=1}(\xi_1(\hat{L}, s)) = \frac{\pi^2}{162} = 3^{-3} \frac{\pi^2}{6} = 3^{-3} \text{Res}_{s=1}(\xi_2(L, s))$$

$$\text{Res}_{s=\frac{5}{6}}(\xi_1(\hat{L}, s)) = \frac{\sqrt{3}}{162} r = 3^{-\frac{5}{2}} \frac{1}{6} r = 3^{-3 \cdot \frac{5}{6}} \text{Res}_{s=\frac{5}{6}}(\xi_2(L, s))$$

$$(ii) \quad \text{Res}_{s=1}(\xi_2(\hat{L}, s)) = \frac{\pi^2}{81} = 3^{-2} \frac{\pi^2}{9} = 3^{1-3} \text{Res}_{s=1}(\xi_1(L, s))$$

$$\text{Res}_{s=\frac{5}{6}}(\xi_2(\hat{L}, s)) = \frac{1}{54} r = 3^{-\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{3}}{18} r = 3^{1-3 \cdot \frac{5}{6}} \text{Res}_{s=\frac{5}{6}}(\xi_1(L, s))$$

従って $s = 1$ と $s = \frac{5}{6}$ での留数に対しては、予想が肯定される。

さて、ここで先の予想を、係数による表現に書き換えてみよう。

予想 3.2 $n > 0$ に対し、

$$(i) \quad \hat{h}_1(27n) + 3^{-1} \hat{h}_2(27n) = h(-n)$$

$$(ii) \quad \hat{h}(-27n) = 3h_1(n) + h_2(n)$$

従ってこの予想は、類数相互の関係を与えていることが分かる。

さらに、T. Shintani が与えている以下の命題を用いて、 h と $\hat{h}$ だけで予想を書くことも可能であるが、ここでは省略する。

命題 3.1 (T. Shintani[25]) $n > 0$ に対し、

$$2h_2(n) = \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid (9x^2 + 3xy + y^2)^2 = n\}$$

$$2\hat{h}_2(n) = \#\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 81(x^2 + xy + y^2)^2 = n\}$$

次に、この予想を認めることにして、B. Datskovsky と D. J. Wright[4] によって得られた関数等式の対角化を用いると、

$$Z_{\pm}(s) = 2^s 3^{\frac{3}{2}s} \pi^{-2s} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4} \mp \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4} \mp \frac{1}{3}\right) (3^{\frac{1}{2}} \xi_1(L, s) \pm \xi_2(L, s))$$

と定義する時、関数等式

$$Z_{\pm}(1-s) = Z_{\pm}(s)$$

が満たされる。

4 2元3次形式の類数

この章では、2元3次形式の類数を求めるのに今回用いた、H. Davenport の理論を紹介する。2元3次形式の類数の歴史は古く、約百五十年ほどさかのぼることができる。G. Eisenstein [11][12] と F. Arndt[2][3] は、互いに独立に、 $\hat{L}$ 型の3次形式

$$F(u, v) = x_1 u^3 + 3x_2 u^2 v + 3x_3 u v^2 + x_4 v^3 \in \hat{L}$$

について研究し、Hessian を用いて3次形式に2次形式を対応させ、3次形式の判別式(今回用いた判別式 D_3 の定数倍)や同値関係を定義し、対応する2次形式がその作用について、covariant であることを示した。さらに Arndt は、この型の3次形式について、任意の判別式に対する同値類の個数(類数)が有限であることを示し、判別式 D_A が負 ($D_3 = -27D_A$, D_A は Arndt の判別式) のふたつの3次形式の同値・非同値の判定法を与え、-2000 以上の負の判別式 D_A について、この型の3次形式の類数を求めた [3]。

今世紀の初頭になって、G. B. Mathews と W. E. H. Berwick[15][16] が L 型の (既約な) 3 次形式に対して、 -1000 以上の負の判別式 D_3 について、類数を求めた。この研究では、前述の Hessian と同時に、2 元 3 次形式を 3 次方程式と見たときの虚数解をうまく用いている。

H. Davenport[6][7] は簡約 2 次形式を応用した形で定義された簡約 3 次形式の係数の範囲を、各判別式ごとに決定する定理を与え、有限回の試行ですべての簡約 3 次形式を求めることを可能にした。また一方では、ひとつの類に含まれる簡約 3 次形式の個数が、対応する 2 次形式の形によって具体的にわかることも述べている。そして、 $\mathbb{Q}$ 上既約な 3 次形式の類数の評価を与えている。

この章で述べる方法は、この Davenport の理論を用いている。判別式が正の場合と負の場合で、簡約 3 次形式の定義を含めて多少異なる点があるが、いずれの場合も、各判別式に対して、簡約 3 次形式の個数を求め、各類に含まれる簡約 3 次形式の個数 (重複度) を求める、という手順は同じである。4.1 節では判別式が正の場合、4.2 節では判別式が負の場合を述べる。2 次形式の判別式は D_2 で表し、2 次形式への $GL(2, \mathbb{R})$ の作用は、3 次形式の場合と類似に定義する。

4.1 判別式が正の場合

$V(\text{resp. } L)$ の元で、判別式 D_3 が正のものの全体を $V_+(\text{resp. } L_+)$ で表す。つまり、

$$\begin{aligned} V_+ &= \{F(u, v) \in V \mid D_3(F) > 0\} \\ L_+ &= L \cap V_+ \end{aligned}$$

L_+ の元 $F(u, v) = x_1 u^3 + x_2 u^2 v + x_3 u v^2 + x_4 v^3$ に対して、Hessian $H(F)$ を次で定義する。

$$H(F)(u, v) = -\frac{1}{4} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{vmatrix} = Au^2 + Buv + Cv^2$$

ここで、

$$A = x_2^2 - 3x_1x_3, \quad B = x_2x_3 - 9x_1x_4, \quad C = x_3^2 - 3x_2x_4$$

である。

命題 4.1 (cf. Davenport[7]) V_+ の元 $F(u, v)$ に対する Hessian $H(F)(u, v)$ について、次が成り立つ。

(i) 判別式 $D_3(F)$ と $D_2(H(F))$ が

$$D_2(H(F)) = -3D_3(F)$$

の関係を満たす。

(ii) $H(F)(u, v)$ は、正定値 2 元 2 次形式である。

(iii) $GL(2, \mathbb{Z})$ の任意の元 g に対して、

$$H(gF)(u, v) = (\det g)^2 g(H(F))(u, v)$$

が成り立つ。

さてここで簡約 3 次形式を定義する前に、(正定値) 簡約 2 次形式について簡単に復習しておく。実数係数 2 次形式 $Au^2 + Buv + Cv^2$ が、 $|B| \leq A \leq C$ かつ、 $B = A$ または $A = C$ ならば、 $B \geq 0$ を満たすとき、これを簡約 2 次形式と呼ぶ。簡約 2 次形式は、実数係数正定値 2 元 2 次形式の $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用による類別の完全代表系になっている。

一般に、 L_+ の元 $F(u, v)$ は、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の元 $-E$ の作用によって、 $-F(u, v)$ と同値である。 $F(u, v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3$ とすると、判別式 $D_3(F) \neq 0$ だから、 $x_1 = x_2 = 0$ は、ありえない。従って L_+ の元は、必要ならば $-E$ を作用させることによって、 $x_1 = 0$ かつ $x_2 > 0$ 、または $x_1 > 0$ を満たすようにできる。

L_+ の元 $F(u, v) = x_1u^3 + x_2u^2v + x_3uv^2 + x_4v^3$ が、 $x_1 = 0$ かつ $x_2 > 0$ または、 $x_1 > 0$ を満たし、さらに $F(u, v)$ に対する Hessian $H(F)(u, v)$ が簡約 2 次形式である時、 $F(u, v)$ を簡約 3 次形式と呼ぶことにする。

次の補題は、与えられた判別式 $D_3 > 0$ を持つ簡約 3 次形式の、係数の満たす条件を与えている。この補題によって、与えられた判別式を持つすべての簡約 3 次形式を、書き出すことが可能になる。

補題 4.1 (H. Davenport[7]) x_1, x_2, x_3, x_4 を実数とし、 A, B, C および D_3 を、

$$A = x_2^2 - 3x_1x_3, \quad B = x_2x_3 - 9x_1x_4, \quad C = x_3^2 - 3x_2x_4,$$

$$D_3 = 18x_1x_2x_3x_4 + x_2^2x_3^2 - 4x_1x_3^3 - 4x_2^3x_4 - 27x_1^2x_4^2$$

で定義された関数とする。

$|B| \leq A \leq C$ かつ、 $0 < D_3 \leq X$ であれば、

$$|x_1| < X^{\frac{1}{4}}, \quad |x_2| < 2X^{\frac{1}{4}},$$

$$|x_1x_4| < X^{\frac{1}{2}}, \quad |x_2x_3| < 4X^{\frac{1}{2}},$$

$$|x_1x_3^3| < 8X, \quad |x_2^3x_4| < 8X,$$

$$x_3^2|x_2x_3 - 9x_1x_4| < 4X$$

となる。

Proof.

A, B, C の仮定から、

$$\begin{aligned} 9Cx_1^2 - 3Bx_1x_2 + Ax_2^2 &= 9x_1^2x_3^2 - 27x_1^2x_2x_4 - 3x_1x_2^2x_3 + 27x_1^2x_2x_4 + Ax_2^2 \\ &= -3x_1x_3(x_2^2 - 3x_1x_3) + Ax_2^2 \\ &= A^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cx_3^2 - 3Bx_3x_4 + 9Ax_4^2 &= Cx_3^2 - 3x_2x_3^2x_4 + 27x_1x_3x_4^2 + 9x_2^2x_4^2 - 27x_1x_3x_4^2 \\ &= Cx_3^2 - 3x_2x_4(x_3^2 - 3x_2x_4) \\ &= C^2. \end{aligned}$$

一般に、 $P + Q + R = T$ かつ、 $P > 0, R > 0, T > 0, Q^2 \leq PR$ ならば、

$$|Q| \leq \sqrt{PR} \leq \frac{P + R}{2}$$

$$P + R = T - Q \leq T + |Q| \leq T + \frac{P + R}{2}$$

であるから、

$$P + R \leq 2T$$

となる。 $|B| \leq A \leq C$ の仮定から、 $B^2 \leq AC$ だから、先のふたつの式において、これを用いると、

$$9Cx_1^2 + Ax_2^2 \leq 2A^2$$

$$Cx_3^2 + 9Ax_4^2 \leq 2C^2$$

となる。従って、

$$|x_1| \leq \frac{\sqrt{2}}{3}AC^{-\frac{1}{2}} \quad |x_2| \leq \sqrt{2}A^{\frac{1}{2}}$$

$$|x_3| \leq \sqrt{2}C^{\frac{1}{2}} \quad |x_4| \leq \frac{\sqrt{2}}{3}CA^{-\frac{1}{2}}$$

を得る。 $B^2 \leq AC$ つまり、 $AC - B^2 \geq 0$ であったから、

$$AC \leq AC + \frac{1}{3}(AC - B^2) = -\frac{1}{3}(B^2 - 4AC) = D_3$$

である。これと、 $A \leq C$ を用いると、

$$|x_1| \leq \frac{\sqrt{2}}{3}AC^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{3}A^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{3}(AC)^{\frac{1}{4}} \leq \frac{\sqrt{2}}{3}D_3^{\frac{1}{4}}$$

$$|x_2| \leq \sqrt{2}A^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}(AC)^{\frac{1}{4}} \leq \sqrt{2}D_3^{\frac{1}{4}}$$

$$|x_1x_4| \leq \frac{2}{9}(AC)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{9}D_3^{\frac{1}{2}}$$

$$|x_2x_3| \leq 2(AC)^{\frac{1}{2}} \leq 2D_3^{\frac{1}{2}}$$

$$|x_1x_3^3| \leq \frac{4}{3}AC \leq \frac{4}{3}D_3$$

$$|x_2^3x_4| \leq \frac{4}{3}AC \leq \frac{4}{3}D_3$$

$$x_3^2|x_2x_3 - 9x_1x_4| = x_3^2|B| \leq x_3^2A \leq 2AC \leq 2D_3$$

となって、補題は示された。

Q.E.D.

先にも述べたように、この補題によって、任意の判別式 $D_3 > 0$ を持つ簡約3次形式が、すべて求まるようになった。従って、類数と、簡約3次形式の関係が明らかになれば、任意の判別式に対して、類数が求まることになる。次の命題によって、それは実現する。

簡約3次形式 $F(u, v)$ に $SL(2, \mathbf{Z})$ の元 g を作用させたものが、再び簡約3次形式ならば、 g は $H(F)(u, v)$ を固定する。従ってこの $F(u, v)$ と同値な簡約3次形式は、 $H(F)(u, v)$ の $SL(2, \mathbf{Z})$ 固定群の元の $F(u, v)$ への作用を調べれば、すべて求まる。このことを用いて、以下が得られる。

命題 4.2 (cf. Davenport[7]) L_+ の任意の $SL(2, \mathbf{Z})$ 同値類は、少なくとも1つの簡約3次形式 $F(u, v)$ を含む。 $F(u, v)$ と同値な簡約3次形式の個数は、 $F(u, v)$ 自身を含めて、以下の通りである。

- | | |
|--|-----|
| (i) $H(F)(u, v) = Au^2 + Auv + Av^2$ のとき | 1 個 |
| (ii) $H(F)(u, v) = Au^2 + Av^2$ のとき | 2 個 |
| (iii) $H(F)(u, v)$ が (i), (ii) 以外 のとき | 1 個 |

固定群の order については、以下の命題が得られる。

命題 4.3 (cf. Davenport[7]) L_+ の簡約3次形式 $F(u, v)$ の $SL(2, \mathbf{Z})$ 固定群の order は以下の通りである。

- | | |
|--|---|
| (i) $H(F)(u, v) = Au^2 + Auv + Av^2$ のとき | 3 |
| (ii) $H(F)(u, v) = Au^2 + Av^2$ のとき | 1 |
| (iii) $H(F)(u, v)$ が (i), (ii) 以外 のとき | 1 |

4.2 判別式が負の場合

V (resp. L) の元で、判別式 D_3 が負のものの全体を V_- (resp. L_-) で表す。つまり、

$$\begin{aligned} V_- &= \{F(u, v) \in V \mid D_3(F) < 0\} \\ L_- &= L \cap V_- \end{aligned}$$

L_- の任意の元 $F(u, v) = x_1 u^3 + x_2 u^2 v + x_3 u v^2 + x_4 v^3$ は、以下の分解を唯一持つ。

(i) $x_1 \neq 0$ の場合。実数 θ, P, Q, R により、

$$F(u, v) = (u - \theta v)(Pu^2 + Quv + Rv^2)$$

と、書けて、

$$x_1 = P, \quad x_2 = Q - P\theta, \quad x_3 = R - Q\theta, \quad x_4 = -R\theta$$

となる。

(ii) $x_1 = 0$ の場合。

$$F(u, v) = v(Pu^2 + Quv + Rv^2)$$

と書けて、

$$x_2 = P, \quad x_3 = Q, \quad x_4 = R$$

となり、すべて整数である。

いずれの場合も、必要ならば、 $-E$ を作用させて $F(u, v)$ を $-F(u, v)$ で取り替えることによって、 P を正にすれば、 $Pu^2 + Quv + Rv^2$ は、正定値 2 元 2 次形式となる。

上の分解で得られる $Pu^2 + Quv + Rv^2$ を、 $K(F)(u, v)$ と書くことにし、残りの 1 次形式を、 $M(F)(u, v)$ で表すことにする。つまり、

$$F(u, v) = M(F)(u, v)K(F)(u, v)$$

とする。また、 $x_1 = 0$ かつ $x_2 > 0$ または、 $x_1 > 0$ であることと、 P が正であることは、同値である。

$K(F)(u, v)$ が、正定値簡約 2 次形式となる L_- の元 $F(u, v)$ を、簡約 3 次形式と呼ぶことにする。

$x_1 = 0$ なる簡約 3 次形式の係数は、 $|x_3| \leq x_2 \leq x_4$ であるから、判別式 $D_3 = x_2^2(x_3^2 - 4x_2x_4) \leq -3x_2^4$ と書けるので、

$$x_2 \leq \left(\frac{-D_3}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

となり、この x_2 に対して、 x_3, x_4 は、

$$|x_3| \leq x_2 \leq x_4 = \frac{x_3^2 - \frac{D_3}{x_2^2}}{4x_2}$$

なる有限個の整数の組に限られる。従って $x_1 = 0$ なる簡約 3 次形式をすべて書き出すことが可能になる。

次の補題は、与えられた判別式 $D_3 < 0$ を持つ $x_1 \neq 0$ なる簡約 3 次形式の、係数の満たす条件を与えている。この補題によって、与えられた判別式を持ち $x_1 \neq 0$ なるすべての簡約 3 次形式を、書き出すことが可能になる。

補題 4.2 (H. Davenport [7]) $\theta, P, Q, R \in \mathbb{R}$ を実数とし、

$$|Q| \leq P \leq R$$

を、満たしているとする。

$$\Delta = -D_3 = (4PR - Q^2)(P\theta^2 + Q\theta + R)^2,$$

$$x_1 = P, \quad x_2 = Q - P\theta, \quad x_3 = R - Q\theta, \quad x_4 = -R\theta.$$

とする時、 $0 < \Delta \leq X$ ならば、次が成り立つ。

$$0 < x_1 < 2X^{\frac{1}{4}}, \quad |x_2| < 3X^{\frac{1}{4}},$$

$$|x_1x_4| < 2X^{\frac{1}{2}}, \quad |x_2x_3| < 8X^{\frac{1}{2}},$$

$$|x_1x_3| < 12X, \quad |x_2^3x_4| < 12X.$$

Proof.

仮定から、

$$|Q\theta| \leq \sqrt{PR\theta^2} \leq \frac{1}{2}(P\theta^2 + R)$$

であるから、

$$P\theta^2 + Q\theta + R \geq \frac{1}{2}(P\theta^2 + R)$$

また、

$$4PR - Q^2 \geq 3PR$$

であるから、

$$\begin{aligned} PR(P\theta^2 + R)^2 &\leq \frac{1}{3}(4PR - Q^2) \times 4(P\theta^2 + Q\theta + R)^2 \\ &= \frac{4}{3}\Delta \end{aligned}$$

ゆえに、

$$P^3R\theta^4 + 2P^2R^2\theta^2 + PR^3 \leq \frac{4}{3}\Delta$$

ここで、左辺の3項ともが、非負であることに注意。これを用いて、

$$x_1 = P \leq (PR^3)^{\frac{1}{4}} \leq \left(\frac{4}{3}\Delta\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$|x_2| \leq P + P|\theta| \leq (PR^3)^{\frac{1}{4}} + (P^3R\theta^4)^{\frac{1}{4}} \leq 2\left(\frac{4}{3}\Delta\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$|x_1x_4| = PR|\theta| \leq (PR^3)^{\frac{1}{4}}(P^3R\theta^4)^{\frac{1}{4}} \leq \left(\frac{4}{3}\Delta\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} |x_2x_3| &\leq (P + P|\theta|)(R + P|\theta|) \leq PR + 2PR|\theta| + P^2\theta^2 \\ &\leq (PR^3)^{\frac{1}{2}} + 2(2P^2R^2\theta^2)^{\frac{1}{2}} + (P^3R\theta^4)^{\frac{1}{2}} \leq 4\left(\frac{4}{3}\Delta\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

また、一般に実数 A, B に対して、 $(A+B)^3 \leq 4(|A|^3 + |B|^3)$ であるから、

$$\begin{aligned} |x_1 x_3^3| &\leq 4P(R^3 + P^3|\theta|^3) \\ &\leq 4PR^3 + 4(PR^3)^{\frac{1}{4}}(P^3R\theta^4)^{\frac{3}{4}} \leq \frac{32}{3}\Delta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x_2^3 x_4| &\leq 4R|\theta|(P^3 + P^3|\theta|^3) \\ &\leq 4(PR^3)^{\frac{3}{4}}(P^3R\theta^4)^{\frac{1}{4}} + 4P^3R\theta^4 \leq \frac{32}{3}\Delta \end{aligned}$$

以上で、補題は示された。

Q.E.D.

次の命題によって、3次形式の類と、簡約3次形式の個数の関係が、完全に明らかになる。この命題と、先の補題を合わせると、任意の判別式 $D_3 < 0$ に対して、3次形式の類数が求まることになる。

簡約3次形式 $F(u, v)$ に $SL(2, \mathbb{Z})$ の元 g を作用させたものが、再び簡約3次形式ならば、 g は $K(F)(u, v)$ を固定する。従ってこの $F(u, v)$ と同値な簡約3次形式は、 $K(F)(u, v)$ の $SL(2, \mathbb{Z})$ 固定群の元の $F(u, v)$ への作用を調べれば、すべて求まる。このことを用いて、以下が得られる。

命題 4.4 (cf. Davenport[7]) L_- の任意の $SL(2, \mathbb{Z})$ 同値類は、少なくとも1つの簡約3次形式 $F(u, v)$ を含む。 $F(u, v)$ と同値な簡約3次形式の個数は、 $F(u, v)$ 自身を含めて、以下の通りである。

- | | |
|--|-----|
| (i) $K(F)(u, v) = Pu^2 + Puv + Pv^2$ のとき | 3 個 |
| (ii) $K(F)(u, v) = Pu^2 + Pv^2$ のとき | 2 個 |
| (iii) $K(F)(u, v)$ が (i), (ii) 以外 のとき | 1 個 |

固定群の order については、以下の命題が得られる。

命題 4.5 (cf. Davenport[7]) L_- の簡約3次形式 $F(u, v)$ の $SL(2, \mathbb{Z})$ 固定群の order は常に 1 である。

参考文献

- [1] 荒川 恒男、2 次形式入門 I、第 1 回整数論サマースクール報告集、1993.
- [2] F. Arndt, *Zur Theorie der binären kubischen Formen*, J. Reine Angew. Math. **53** (1857), 309-321.
- [3] F. Arndt, *Tabellarische Berechnung der reducirten binären kubischen Formen und Klassifikation derselben für alle successiven negativen Determinanten $(-D)$ von $D = 3$ bis $D = 2000$* , Arch. Math. Phys., **31** (1858), 335-448.
- [4] B. Datskovsky and D. J. Wright, *The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms II: Local theory*, J. Reine Angew. Math., **367** (1986), 27-75.
- [5] B. Datskovsky and D. J. Wright, *The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms III: Density of discriminants of cubic extensions*, J. Reine Angew. Math., **386** (1988), 116-138.
- [6] H. Davenport, *The reduction of a binary cubic form I & II*, J. London Math. Soc., **20** (1945), 14-22 & 139-147.
- [7] H. Davenport, *On the class-number of binary cubic forms I & II*, J. London Math. Soc., **26** (1951), 183-198 (Corrigendum, *ibid.* **27** (1952), 512).
- [8] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. 3, Stechert, 1934.
- [9] J. A. Dieudonné and J. B. Carrell, *Invariant Theory, Old and New*, Advances in Math., **4** (1970), 1-80.
- [10] 土井 公二・三宅 敏恒、保型形式と整数論、紀伊國屋数学叢書 7、1976.
- [11] G. Eisenstein, *Théorèmes sur les formes cubiques et solution d'une équation du quatrième degré à quatre indéterminées*, J. Reine Angew. Math. **27** (1844), 75-79.
- [12] G. Eisenstein, *Untersuchungen über die cubischen Formen mit zwei Variabeln*, J. Reine Angew. Math. **27** (1844), 89-104.

- [13] 伊吹山 知義、2 次形式入門 II、第 1 回整数論サマースクール報告集、1993.
- [14] 伊吹山 知義・斎藤 裕、*On zeta functions of symmetric matrices and dimensions of Siegel modular forms*, 京大数理研講究録 843、1993.
- [15] G. B. Mathews, *On the reduction and classification of binary cubics which have a negative discriminant*, Proc. London Math. Soc., **10** (1912), 128-138.
- [16] G. B. Mathews and W. E. H. Berwick, *On the reduction of arithmetical binary cubics which have a negative determinant*, Proc. London Math. Soc., **10** (1912), 48-53.
- [17] L. J. Mordell, *Diophantine Equations*, Academic Press, 1969.
- [18] 森川 寿、不変式論、紀伊國屋数学叢書 11、1977.
- [19] 佐武 一郎、2 次形式の理論、(前編、後編)、東大セミナーノート 5、1964.
- [20] F. Sato, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional Equations*, Tôhoku Math. J., **34** (1982), 437-483.
- [21] F. Sato, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces II: A convergence criterion*, Tôhoku Math. J., **35** (1983), 77-99.
- [22] F. Sato, *Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces III: Eisenstein series for indefinite quadratic forms*, Ann. of Math., **116** (1982), 177-212.
- [23] M. Sato, *Theory of prehomogeneous vector spaces (note by T. Shintani in Japanese)*, Sugaku no ayumi, **15** (1970), 85-157.
- [24] M. Sato and T. Shintani, *On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces*, Ann. of Math., **100** (1974), 131-170.
- [25] T. Shintani, *On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms*, J. Math. Soc. Japan, **24** (1972), 132-188.

- [26] T. Shintani, *On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **22** (1975), 25-65.
- [27] 新谷 卓郎、概均質ベクトル空間のゼータ関数について (神保道夫記)、京大数理研講究録 497、1983.
- [28] A. Weil, *Basic Number Theory*, Springer, 1974.
- [29] H. Weyl, *Classical Groups*, Princeton Univ. Press, 1954.
- [30] D. J. Wright, *The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms I: Global theory*, Math. Ann., **270** (1985), 503-534.