

量子群 $GL_q(n+1; \mathbb{C})$ の有限次元表現と
量子球面 $SU_q(n) \setminus SU_q(n+1)$ 上の常球函数

Institute for Advanced Study

山田裕史 (YAMADA, Hirofumi)

§ 0 Introduction

本稿は上智大学の野海正俊氏、名古屋大学の三町勝久氏と
私がこの一年間程共同研究を続けてゐる量子群 $GL_q(N; \mathbb{C})$ の
表現論について、報告である (cf. [NYM 1, 2]).

初めに "q-analogue" 又は "basic analogue" というこゝについて
若干の説明を試みる。くわしくは [H], [M] などを見られたい。
簡単に言つてしまふと q-analogue とは自然数 n と

$$[n] = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = (1 - q^n) / (1 - q)$$

に置まはしることである。ここで q は 0 でない複素数とする。
極限 $q \rightarrow 1$ と考えれば右側の n が回復する。以後 q-analogue
の記号として

$$(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k), \quad n \in \mathbb{N}$$

としはしは用ゐる。歴史的に一番早くから知られてゐる n は、
おそらく二項係数の q-analogue であらう。これは "Gauss の

二項係数とも呼ばれる:

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_m (q; q)_{n-m}}, \quad n \geq m \geq 0.$$

これは次のような漸化式を満たすことを証明される。

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix} q^{n-m+1} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} q^m + \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix}.$$

今2つの変数 z, w (ある $\mathbb{C}$ -代数の元) の $wz = qzw$ という交換関係

を満たすとする。このとき容易に二項定理

$$(z+w)^n = \sum_{m=0}^n \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} z^m w^{n-m}$$

が証明される。このように“ q -可換性”と q -analogue とは密接に結びついている。

ここでいう量子群の理論とは代数群の座標環の非可換化 (q -可換化) のことであり、表現とはその上の余加群のことである (cf. [J], [D], [W]). 従って例えば表現の“球函数”として様々な古典的特殊函数の q -analogue が自然に現れることが期待される。既に量子群 $SL_q(2)$ の既約表現は (q の ± 1 の中根でない) とともに) 分類され行列要素も Jacobi 多項式の q -analogue を用いて表されることが知られている。この結果は日本のグループ [M], オランダの T. Koornwinder, ソ連の L.L. Vaksman と Ja. S. Sorikelman によって同時、独立に得られたようである。我々はここでの結果を量子群 $GL_q(N; \mathbb{C})$, $SL_q(N)$ に拡張するところを次の問題として選んだ。

本稿を通じて自然数 n を固定し $N = n+1$ とおく。また $q \in \mathbb{C}^*$

は1の中根でなつてもよいとする。さらに §4 では $q \in \mathbb{R}^+$ とする。

§1 量子半群 $\text{Mat}_q(N; \mathbb{C})$ と量子小行列式.

集合 S の元を成分にもつサイズが N の正方行列全体を $\text{Mat}(N; S)$ とかく。半群 $\text{Mat}(N; \mathbb{C})$ の座標環 (函数環) は次のようなる項式環である:

$$A(\text{Mat}(N; \mathbb{C})) = \mathbb{C}[x_{ij} \ (0 \leq i, j \leq n)].$$

この座標環は $\mathbb{C}$ -代数として、準同型

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta: A(\text{Mat}(N; \mathbb{C})) \rightarrow A(\text{Mat}(N; \mathbb{C})) \otimes A(\text{Mat}(N; \mathbb{C})) \\ \quad x_{ij} \mapsto \sum_{k=0}^n x_{ik} \otimes x_{kj} \\ \varepsilon: A(\text{Mat}(N; \mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C} \\ \quad x_{ij} \mapsto \delta_{ij} \end{cases}$$

により $\mathbb{C}$ -余代数の構造をも持つ。

最初に [RTF] に従つて上の $\mathbb{C}$ -代数の“量子化”を導入しよう。 N^2 個の文字 $x_{ij} \ (0 \leq i, j \leq n)$ で生成された $\mathbb{C}$ -代数で次の基本関係式をもつものを A_N とかく。

$$(1.2) \quad \begin{cases} x_{ik} x_{jk} = q x_{jk} x_{ik}, \quad x_{ki} x_{kj} = q x_{kj} x_{ki} & (i < j) \\ x_{il} x_{jk} = x_{jk} x_{il} & (i < j, k < l) \\ x_{ik} x_{jl} - q x_{il} x_{jk} = x_{jl} x_{ik} - q^{-1} x_{jk} x_{il} & (i < j, k < l). \end{cases}$$

この上には“行列の積”に対して (1.1) と同じ $\mathbb{C}$ -代数準同型 Δ, ε が存在する。これから Δ を Δ とし、余積、余単位元として、

$\mathcal{A}_N$ は $\mathbb{C}$ -余代数の構造をもつ。この $\mathbb{C}$ -双代数 $\mathcal{A}_N$ を座標環にもつ“量子半群”を $\text{Mat}_q(N; \mathbb{C})$ と定義する。すなわち $\mathcal{A}_N = A(\text{Mat}_q(N; \mathbb{C}))$ 。いわゆる“Diamond Lemma” ([B]) を用いることにより $\mathcal{A}_N$ は可換な場合の多項式環 $A(\text{Mat}(N; \mathbb{C}))$ と同程度の大きさのものであることが示される。すなわち $\mathcal{A}_N$ は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として単項式基底

$$\{x^A = x_{00}^{a_{00}} x_{01}^{a_{01}} \cdots x_{10}^{a_{10}} x_{11}^{a_{11}} \cdots x_{nn}^{a_{nn}}; A = (a_{ij}) \in \text{Mat}(N; N)\}$$

をもつ。

量子半群 $\text{Mat}_q(N; \mathbb{C})$ 上の線型代数を展開するため、最も簡単な“表現”を準備する。今 N 次元 $\mathbb{C}$ -ベクトル空間 V , その基底 $x_0, \dots, x_n$ を固定する。線型写像 R を

$$R: V \longrightarrow V \otimes \mathcal{A}_N : x_j \mapsto \sum_{i=0}^n x_i \otimes x_{ij}$$

により定義する。この余作用により V は右 $\mathcal{A}_N$ -余加群の構造をもつ。これを量子半群 $\text{Mat}_q(N; \mathbb{C})$ の“ベクトル表現”と呼ぼう。次に E を N 個の文字 $y_0, \dots, y_n$ で生成され、次の基本関係式をもつ $\mathbb{C}$ -代数とする。

$$y_i^2 = 0 \quad (0 \leq i \leq n), \quad y_j y_i = -q y_i y_j \quad (i < j).$$

このとき E も $\mathbb{C}$ -代数準同型

$$R: E \longrightarrow E \otimes \mathcal{A}_N : y_j \mapsto \sum_{i=0}^n y_i \otimes x_{ij}$$

を余作用として右 $\mathcal{A}_N$ -余加群の構造をもつことを示す。

さらに E を $E = \sum_{r=0}^N E_r$ と $y_0, \dots, y_n$ の次数で直和分解したとき、

各 E_r は A_N -部分余加群に等しくなることわかる。この E_r は $\text{Mat}_q(N; \mathbb{C})$ の “ r 次交代行列表現” と呼ぶ。さて E_r の表現行列を考察しよう。今 $J = \{j_0 < j_1 < \dots < j_{r-1}\} \in \{0, 1, \dots, n\}$ の部分集合とする。このとき E_r の元 $y_{j_0} \dots y_{j_{r-1}} \in y_J$ と略記する。表現行列の行列要素とは次式で定まる元 $\xi_J^I = \xi_{j_0 \dots j_{r-1}}^{i_0 \dots i_{r-1}} \in A_N$ のことである。

$$R(y_J) = \sum_{\#I=r} y_I \otimes \xi_J^I.$$

計算により

$$\xi_J^I = \sum_{\sigma \in G_r} (-q)^{l(\sigma)} x_{i_{\sigma(0)} j_0} \dots x_{i_{\sigma(r-1)} j_{r-1}}$$

であることが確かめられる。ここで $l(\sigma) = \#\{(i, j); i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$ はいわゆる “転倒数” である。この量 ξ_J^I は行 I , 列 J に関する “量子 r -小行列式” と呼ぶことは自然である。特に $I = \{0, 1, \dots, r-1\}$ のとき $\xi_J^I \in \xi_J$, $\xi_I^J \in \xi^J$ と略記することもある。表現の行列要素と書くことは次の式に従う。

$$\Delta(\xi_J^I) = \sum_{\#K=r} \xi_K^I \otimes \xi_J^K, \quad \varepsilon(\xi_J^I) = \delta_{I,J}$$

さらに $r = N$ のときは $I = J = \{0, 1, \dots, n\}$ として ξ_J^I は “量子行列式” と呼ばれる：

$$\det q := \sum_{\sigma \in G_N} (-q)^{l(\sigma)} x_{\sigma(0), 0} \dots x_{\sigma(n), n}$$

$$\Delta(\det q) = \det q \otimes \det q, \quad \varepsilon(\det q) = 1.$$

今 $\tau = \sigma^{-1}$ とすると $l(\sigma) = l(\tau)$ で

$$x_{\sigma(0), 0} \dots x_{\sigma(n), n} = x_{0, \tau(0)} \dots x_{n, \tau(n)}$$

であるから, $\det q$ のもう一つの表示が得られる.

$$\det q = \sum_{\tau \in G_N} (-q)^{l(\tau)} x_{0, \tau(0)} \cdots x_{n, \tau(n)}.$$

量子小行列式はいくつかの性質を有する. それらは

次のように定められる. $\{0, 1, \dots, n\}$ の部分集合 I, J に対して "q-符号" は

$$\operatorname{sgn}_q(I; J) = \begin{cases} 0 & \text{if } I \cap J \neq \emptyset \\ (-q)^{l(I, J)} & \text{if } I \cap J = \emptyset \end{cases}$$

と定義する. ここで $l(I, J) = \#\{(i, j), i \in I, j \in J, i > j\}$.

定理 1.1 (Laplace 展開). 正整数 r, r_0, r_1 $0 < r \leq N, r_0 + r_1 = r$

ととり $I, J \subset \{0, 1, \dots, n\}$ と $\#I = \#J = r$ とする.

(a) $J_v \subset J, \#J_v = r_v \ (v=0, 1)$ としたとき,

$$\operatorname{sgn}_q(J_0; J_1) \sum_J^I = \sum_{I_0 \cup I_1 = I} \sum_{J_0}^{I_0} \sum_{J_1}^{I_1} \operatorname{sgn}_q(I_0; I_1).$$

ここで和は I の分割 $I_0 \cup I_1$ で $\#I_v = r_v \ (v=0, 1)$ を満たすものによってなされる.

(b) $I_v \subset I, \#I_v = r_v \ (v=0, 1)$ としたとき,

$$\operatorname{sgn}_q(I_0; I_1) \sum_J^I = \sum_{J_0 \cup J_1 = J} \sum_{J_0}^{I_0} \sum_{J_1}^{I_1} \operatorname{sgn}_q(J_0; J_1).$$

ここで和は J の分割 $J_0 \cup J_1$ で $\#J_v = r_v \ (v=0, 1)$ を満たすものによってなされる. //

系 (余因子展開)

$$(a) \quad \sum_{k=0}^n (-q)^{i-k} \sum_{\hat{k}} x_{kj} = \delta_{ij} \det q,$$

$$(b) \quad \sum_{k=0}^n (-q)^{k-j} x_{ik} \sum_{\hat{k}} = \delta_{ij} \det q.$$

ここで $\hat{k} = (0, 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n)$. //

今 (i, j) -余因子 $\tilde{x}_{ij} = (-q)^{j-i} \sum_{\hat{\sigma}} x_{i\sigma_j}$ と定義し、 $x = (x_{ij})_{i,j}$,
 $\tilde{x} = (\tilde{x}_{ij})_{i,j} \in \text{Mat}(N; A_N)$ と書く。このとき上の系は $\tilde{x} \cdot x =$
 $x \cdot \tilde{x} = \det q \cdot I_N$ と書ける。こゝより $x \cdot \det q = x \cdot \tilde{x} \cdot x =$
 $\det q \cdot x$, となる。 $\det q$ は A_N の中心に入るとわかる。実
 は次の事実がある。

定理 1.2. $\text{Center}(A_N) = \mathbb{C}[\det q]$ //

最後に量子小行列式の間の (一般化した) Plücker 関係式を述べ
 ておく。

定理 1.3. 正整数 l_v, r_v ($v=0,1$) $\Sigma l_v + r_v \leq N$ とする。 $\{0,1,\dots,n\}$
 の部分集合 $I_v, J_v, K \in \#I_v = l_v + r_v, \#J_v = l_v, \#K = r_0 + r_1$ とす
 る。 Σa と $\Sigma \#(I_0 \cup I_1) < r_0 + r_1$ ならば。

$$(a) \sum_{K' \cup K'' = K} \sum_{J_0 \cup K'}^{I_0} \sum_{K'' \cup J_1}^{I_1} \text{sgn}_q(J_0; K') \text{sgn}_q(K'; K'') \text{sgn}_q(K''; J_1) = 0,$$

$$(b) \sum_{K' \cup K'' = K} \sum_{I_0}^{J_0 \cup K'} \sum_{I_1}^{K'' \cup J_1} \text{sgn}_q(J_0; K') \text{sgn}_q(K'; K'') \text{sgn}_q(K''; J_1) = 0$$

が成り立つ。 $\Sigma \Sigma$ と和は K の分割 $K' \sqcup K''$ で $\#K' = r_0, \#K'' = r_1$ と
 満たすものを用いる。 //

§2 量子群 $GL_q(N; \mathbb{C})$ の有限次元表現の実現。

最初に量子群 $GL_q(N; \mathbb{C})$ と量子半群 $\text{Mat}_q(N; \mathbb{C})$ の場合と同様に
 座標環により定義する。量子群 $GL_q(N; \mathbb{C})$ の座標環 $A(GL_q(N; \mathbb{C}))$
 は $A_N = A(\text{Mat}_q(N; \mathbb{C}))$ に $\det q^{-1}$ を附加することによって得られる。

$$A(GL_q(N; \mathbb{C})) = \mathbb{C}[x_{ij} (0 \leq i, j \leq n), \det q^{-1}].$$

基本関係式は (1.2) に

$$x_{ij} \cdot \det q^{-1} = \det q^{-1} \cdot x_{ij} \quad (0 \leq i, j \leq n)$$

$$\det q \cdot \det q^{-1} = \det q^{-1} \cdot \det q = 1$$

を付け加える。今後 $A(GL_q(N; \mathbb{C}))$ ではなく $\mathcal{A}_N^{GL}$ と書く。

$\mathbb{C}$ -代数 $\mathcal{A}_N^{GL}$ も (1.1) に

$$\Delta(\det q^{-1}) = \det q^{-1} \otimes \det q^{-1}, \quad \varepsilon(\det q^{-1}) = 1$$

を加えることにより、 $\mathbb{C}$ -双代数になる。さらに $\mathbb{C}$ -代数の逆準同型

$$S: \mathcal{A}_N^{GL} \longrightarrow \mathcal{A}_N^{GL} : x_{ij} \mapsto \tilde{x}_{ji}; \det q^{-1} \mapsto (-q)^{i-j} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \det q^{-1}$$

が存在してこれは対合射 (antipode) になる。すなわち $\mathcal{A}_N^{GL}$ は Hopf 代数の構造をもつ。次に量子群 $SL_q(N; \mathbb{C})$ の座標環 $\mathcal{A}_N^{SL} = A(SL_q(N; \mathbb{C}))$ は商代数 $\mathcal{A}_N / \mathcal{A}_N(\det q - 1)$ として定義される。 $\mathbb{C}$ -代数 $\mathcal{A}_N^{SL}$ も対合射 $S(x_{ij}) = \tilde{x}_{ji}$ により Hopf 代数である。 $\mathbb{C}$ -双代数の準同型 $\mathcal{A}_N \longrightarrow \mathcal{A}_N^{GL} \longrightarrow \mathcal{A}_N^{SL}$ を通して任意の $\mathcal{A}_N$ -余加群は $\mathcal{A}_N^{GL}$ -余加群, $\mathcal{A}_N^{SL}$ -余加群とみなされる。

ここで量子群 $GL_q(N; \mathbb{C})$ の“部分群”を考慮する。対角部分群 H の座標環は N 変数の (可換な) Laurent 多項式環である:

$$A(H) = \mathbb{C}[t_i, t_i^{-1} \quad (0 \leq i \leq n)].$$

制限写像を π_H と書く:

$$\pi_H: \mathcal{A}_N^{GL} \longrightarrow A(H) : x_{ij} \mapsto \delta_{ij} t_i.$$

次に“上三角 (resp. 下三角) 行列”から成る Borel 部分群 B^+

(resp. B^-) の座標環を

$$A(B^+) = \mathbb{C}[z_{ij} \ (i \leq j), \ z_{ii}^{-1} \ (0 \leq i \leq n)]$$

$$(resp. \ A(B^-) = \mathbb{C}[z_{ij} \ (i \geq j), \ z_{ii}^{-1} \ (0 \leq i \leq n)])$$

と定義する。交換関係は (1.2) と同様である。制限写像は

$$\pi_{B^\pm}: A_N^{GL} \rightarrow A(B^\pm) \text{ と書く。}$$

さて本節の主題である $GL_q(N; \mathbb{C})$ の有限次元表現の構成を述べるため、サレ一般の定義としておこう。今 G を座標環 $A(G)$ をもつ量子群とする。量子空間 X の“左 G -空間”であるとは、座標環 $A(X)$ が左 $A(G)$ -余加群の構造をもつことという:

$$L: A(X) \rightarrow A(G) \otimes A(X).$$

$A(G)$ の元 χ が乗法的であるとする。すなわち

$$\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi, \quad \varepsilon(\chi) = 1.$$

このとき、 $A(X)$ の元 φ が χ に関して“左 G -相対不変”であるとは

$$L(\varphi) = \chi \otimes \varphi$$

を満たすことという。これらの全体を $A(G \setminus X; \chi)$ と書く。

特に $\chi = 1$ のときは単に φ は“左 G -不変”であるといふ。この全体を $A(G \setminus X)$ と書く。右 G -空間, 右 G -(相対)不変も同様に定義される。さらに G, G' を量子群とすると両側 (G, G') -空間, 両側 (G, G') -(相対)不変も自然に定義される。両側 (G, G') -不変式の全体を $A(G \setminus X / G')$ と書く。 X が両側 (G, G') -空間のとき、 $\chi \in A(G)$ に関する左 G -相対不変式の全体 $A(G \setminus X; \chi)$ は、

右 $A(G')$ -部分余加群, $\chi' \in A(G')$ に関する右 G' -相対不変式の全体 $A(X/G'; \chi')$ は左 $A(G)$ -部分余加群になっている。

我々の $GL_q(N; \mathbb{C})$ にもとる。しばらく $G = GL_q(N; \mathbb{C})$ とおく。先づ $X = Mat_q(N; \mathbb{C})$ は余積 Δ により両側 G -空間である。基底 $\{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n\}$ をもつ自由 $\mathbb{Z}$ -加群 L_N とおく。 L_N 上に対称双一次形式 $\langle, \rangle : L_N \times L_N \rightarrow \mathbb{Z}$ $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$ により定義する。今後 L_N の元 λ を“整形式”, $\lambda = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varepsilon_i$ で $\lambda_0 \geq \dots \geq \lambda_n$ を満たすものを“優形式”, さらに $\lambda_n \geq 0$ なる優形式を“正の優形式”と呼ぶ。整形式 $\lambda = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varepsilon_i \in L_N$ に対して乗法的元 $t^\lambda, z^\lambda \in \mathbb{C}^\times$ のように定義する。

$$t^\lambda = t_0^{\lambda_0} \cdots t_n^{\lambda_n} \in A(H), \quad z^\lambda = z_0^{\lambda_0} \cdots z_n^{\lambda_n} \in A(B^\pm).$$

これは $t^\lambda \cdot t^\mu = t^{\lambda+\mu}, z^\lambda \cdot z^\mu = z^{\lambda+\mu}$ ($\lambda, \mu \in L_N$) という性質をもつことと注意しておく。上の一般論より $X = Mat_q(N; \mathbb{C})$ としたとき $A(H \setminus X; t^\lambda), A(B^\pm \setminus X; z^\lambda)$ は $A_N = A(X)$ の右 $A(G)$ -部分余加群である。後者の $G = GL_q(N; \mathbb{C})$ の既約表現と与えるわけであるが、この空間を記述するために標準单项式を導入しよう。 L_N の元 $\Lambda_m \in \Lambda_m = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{m-1}$ ($1 \leq m \leq N$) で定義する。正の優形式 $\lambda = \Lambda_{m_0} + \dots + \Lambda_{m_{l-1}} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varepsilon_i$ ($m_0 \geq \dots \geq m_{l-1} > 0, \lambda_0 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$) に対して次のような数列を考える。

$$\pi = (T_{rs} \in \{0, 1, \dots, n\}, 0 \leq r \leq n, 0 \leq s < \lambda_r)$$

$$\begin{cases} T_{r-1, \lambda} < T_{r, \lambda} & (0 \leq \lambda < l, 1 \leq r < m_\lambda), \\ T_{r, \lambda-1} \leq T_{r, \lambda} & (0 \leq r \leq n, 1 \leq \lambda < \lambda_r). \end{cases}$$

このような $\Pi \in \lambda \in \Lambda$ にもつ“半標準盤”と呼ぶ。“column strict plane partition”という呼び方もある。) の全体を $SSTab(\lambda)$ と書くことにする。半標準盤の個数によって $h(\lambda)$ の $hook\ length$ による公式がよく知られている。 $\lambda \in \Lambda$ にもつ半標準盤 $\Pi = (T_{rs})$ に対して“標準単項式” ξ_Π を量子小行列式の積として定義する。

$$\xi_\Pi = \xi_{J_0} \cdots \xi_{J_{l-1}} \in A(X).$$

ここで $J_\lambda = \{T_{0, \lambda} < \cdots < T_{m_\lambda-1, \lambda}\}$ ($0 \leq \lambda < l$) である。Borel 部分群 $B^- \subset G$ の $X = Mat_q(N; \mathbb{C})$ への作用 $L_{B^-} = (\pi_{B^-} \otimes id) \circ \Delta$ により量子小行列式 ξ_J は左 B^- -相対不変:

$$L_{B^-}(\xi_J) = z^{\Lambda^r} \otimes \xi_J \quad (\#J = r)$$

であり, L_{B^-} は $\mathbb{C}$ -代数準同型であるから標準単項式も左 B^- -相対不変である:

$$L_{B^-}(\xi_\Pi) = z^\lambda \otimes \xi_\Pi \quad (\Pi \in SSTab(\lambda)).$$

すなわち $\xi_\Pi \in A(B^- \setminus X; z^\lambda)$ 。適当な順序に関する ξ_Π の主要部を比べることにより $\{\xi_\Pi; \Pi \in SSTab(\lambda)\}$ は $\mathbb{C}$ 上線型独立であることもわかる。実は次の定理が成り立つ。

定理 2.1. 整形式 $\lambda = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varepsilon_i \in \Lambda_N$ が正の優形式ならば, すなわち

$$(*) \quad \lambda_0 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

を成たすならば標準単項式 $\{\sum_{\pi} \pi \in \text{SSTab}(\lambda)\}$ は右 $A(G)$ -余加群 $A(B^- \setminus X; \mathbb{Z}^\lambda)$ の基底を成す。また λ が条件(*)を満たさなるとしては $A(B^- \setminus X; \mathbb{Z}^\lambda) = 0$. //

この定理の証明は次の3つの条件が互いに同値であることを示すことによる。整形式 $\lambda = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varepsilon_i \in L_N$ と0でない元 $\varphi \in A(H \setminus X; \mathbb{Z}^\lambda)$ に対して

$$(a) \quad \varphi \in A(B^- \setminus X; \mathbb{Z}^\lambda),$$

$$(b) \quad \varphi \cdot f_k = 0 \quad (1 \leq k \leq n),$$

(c) λ が(*)を満たし φ は $\sum_{\pi} \pi$ ($\pi \in \text{SSTab}(\lambda)$) の一次結合として書ける。

ここで説明はしないが f_k ($1 \leq k \leq n$) は“量子包絡環” $U_q(\mathfrak{gl}(N; \mathbb{C}))$ の生成元 (通常の包絡環の Chevalley 生成元に相当する) の一部であり, $\varphi \cdot f_k$ は f_k の φ への右作用を表わす (cf [丁]). 上の条件の (a) $\Rightarrow$ (b) は定義に戻って考えればわかる。また (c) $\Rightarrow$ (a) は先程述べた。従って (b) $\Rightarrow$ (c) の証明は残ったのはこの部分だけ。レテワニカルな計算が必要となるのでここでは省略する。

左 $A(G)$ -余加群についても定理2.1と同様のことが成立する。すなわち $\lambda = \Lambda_{m_0} + \dots + \Lambda_{m_{l-1}}$ ($m_0 \geq \dots \geq m_{l-1}$) に対して標準単項式 $\{\sum_{\pi} \pi \in \text{SSTab}(\lambda)\}$ は左 $A(G)$ -余加群 $A(X/B^+; \mathbb{Z}^\lambda)$ の基底を成す。また G 上の左 B^- -相対不変式にあっては, $\lambda \in L_N$ に対して,

$$A(B^- \setminus G; z^\lambda) = (\det q)^{-l} A(B^- \setminus G; z^{\lambda + l\Lambda_{n+1}})$$

が任意の $l \in \mathbb{N}$ によって成り立つことを以下の定理を得る。

定理 2.2. 自然数 l , 及び優形式 $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i$, $\lambda_n \geq -l$ に対して単項式 $\{(\det q)^{-l} z_\pi; \pi \in \text{STab}(\lambda + l\Lambda_{n+1})\}$ は右 $A(G)$ -余加群 $A(B^- \setminus G; z^\lambda)$ の基底をなす。 //

§3 座標環 $A(GL_q(N; \mathbb{C}))$ の既約分解.

本節では $A(GL_q(N; \mathbb{C}))$ の両側 $GL_q(N; \mathbb{C})$ の作用の既約分解を述べる。優形式 $\lambda \in L_N$ に対して前節で構成した $A(G)$ -余加群を次のようにおく。ただし $G = GL_q(N; \mathbb{C})$ 。

$$V^R(\lambda) = A(B^- \setminus G; z^\lambda) \quad (\text{右 } A(G)\text{-余加群})$$

$$V^L(\lambda) = A(G/B^+; z^\lambda) \quad (\text{左 } A(G)\text{-余加群})$$

補題 3.1. $\lambda, \mu \in L_N$ を優形式とする。このとき、

$$(a) \quad \dim_{\mathbb{C}} (V^R(\lambda) \cap V^L(\lambda)) = 1.$$

$$(b) \quad V^R(\lambda) \cap V^L(\mu) = 0 \quad \text{if } \lambda \neq \mu. //$$

この補題より $V^R(\lambda), V^L(\lambda)$ はそれぞれ λ の“最高ウェイトベクトル”をもつことをわかる。量子包絡環 $U_q(\mathfrak{sl}(N; \mathbb{C}))$ 上の有限次元加群に対する完全可約性定理 [R] を用いて次のことを帰結できる。

定理 3.2. 優形式 $\lambda \in L_N$ に対して $A(G)$ -余加群 $V^R(\lambda), V^L(\lambda)$ は共に既約である。 //

さて今 M を有限次元の右 $A(G)$ -余加群とする:

$$R: M \rightarrow M \otimes A(G).$$

このとき M の双対空間 $M^V = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(M; \mathbb{C})$ は次のようにして

左 $A(G)$ -余加群の構造 $L: M^V \rightarrow A(G) \otimes M^V$ を持つ:

$$(L(v), u) = (v, R(u)) \quad (u \in M, v \in M^V).$$

そこで $(v, u) = v(u)$ とある。すると $M^V \otimes M$ は両側 $A(G)$ -余加群の構造が入り準同型 Φ_M の

$$\Phi_M: M^V \otimes M \rightarrow A(G) : v \otimes u \mapsto (v, R(u))$$

により定義される。この Φ_M による像を $W(M)$ と書く。特に $M = V^{R(\lambda)}$ のときは単に $\Phi_\lambda, W(\lambda)$ と書く。 λ が正の整数式 α とするときは $W(\lambda) \subset A(\text{Mat}_q(N; \mathbb{C}))$ とある。 M の基底を $\{u_i\}_{i \in I}$ としてこの基底に関する行列要素を w_{ij} とする。すなわち

$$R(u_j) = \sum_{i \in I} u_i \otimes w_{ij} \quad (j \in I).$$

双対空間 M^V の $\{u_i\}_{i \in I}$ に関する双対基底を $\{v_j\}_{j \in I}$ とする。 M^V の左 $A(G)$ -余加群の構造より

$$L(v_i) = \sum_{j \in I} w_{ij} \otimes v_j \quad (i \in I)$$

であることがわかる。すなわち M と M^V は同じ行列要素を持つ。

$$\Phi_M(v_i \otimes u_j) = w_{ij} \quad (i, j \in I)$$

であるから $W(M)$ は行列要素 $\{w_{ij}; i, j \in I\}$ で張られた部分空間ということになる。この $W(M)$ の両側 $A(G)$ -余加群の構造は以下で与えられる。

$$\Delta(w_{ij}) = \sum_{k \in I} w_{ik} \otimes w_{kj}, \quad \varepsilon(w_{ij}) = \delta_{ij}.$$

また M は $A(\text{Mat}_q(N; \mathbb{C}))$ 又は $A(G)$ の部分余加群であり、これは余単位元 ε の性質により

$$u_j = \sum_{i \in I} \varepsilon(u_i) w_{ij} \quad (j \in I)$$

となり M は $W(M)$ に含まれる。これらの事実から、優形式 $\lambda \in L_N$ に対して

$$V^R(\lambda)^V \cong V^L(\lambda)$$

であることがわかる。さらに証明は省くが最終的に次の定理を得る。

定理 3.3. (a) 優形式 $\lambda \in L_N$ に対して

$$\Phi_\lambda: V^R(\lambda)^V \otimes V^R(\lambda) \longrightarrow W(\lambda)$$

は両側 $A(G)$ -余加群としての同型写像である。

(b) $G = GL_q(N; \mathbb{C})$ の左標環の既約分解は、

$$A(G) = \sum_{\lambda}^{\oplus} W(\lambda), \quad W(\lambda) \cong V^L(\lambda) \otimes V^R(\lambda)$$

で与えられる。ここで和はすべての優形式 $\lambda \in L_N$ をわたる。

(c) $X = \text{Mat}_q(N; \mathbb{C})$ の左標環の既約分解は、

$$A(X) = \sum_{\lambda}^{\oplus} W(\lambda), \quad W(\lambda) \cong V^L(\lambda) \otimes V^R(\lambda)$$

で与えられる。ここで和は正の優形式 $\lambda \in L_N$ をわたる。 //

この定理は古典的 ($q=1$, i.e., $A(X), A(G)$ が可換環の場合)

には I. Schur が 1901 年、学位論文 [5] で得ているものである。

§4 量子球面 $SU_q(n) \setminus SU_q(n+1)$ とその上の帯球函数.

本節において q は 0 でない実数とする。まず量子群 $SL_q(n+1; \mathbb{C})$ の “コンパクト実形” である $SU_q(n+1)$ を定義しよう。

§2 で定義した $SL_q(n+1; \mathbb{C})$ の座標環 A_{n+1}^{SL} の上には双役線型な逆準同型 $*$: $A_{n+1}^{SL} \rightarrow A_{n+1}^{SL}$: $a \mapsto a^*$ で生成元に対しては

$$x_{ji}^* = S(x_{ij}) = (-q)^{i-j} \sum_{\alpha} \alpha_j^i \quad (0 \leq i, j \leq n)$$

となるものが唯一存在する。この $*$ -作用系を合わせて考えた Hopf 代数 $A_{n+1}^{SL} \in A(SU_q(n+1))$ と定義する。今後 $G = SU_q(n+1)$ とおく。部分群 $K \cong SU_q(n)$ を以下のように定義する。

$$A(K) = \mathbb{C}[y_{ij} \quad (0 \leq i, j \leq n)]$$

(基本関係式は (1.2) と同じもの)

$$\pi_K : A(G) \rightarrow A(K)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_K(x_{ij}) = y_{ij}, \quad \pi_K(x_{nn}) = 1, \quad (0 \leq i, j \leq n) \\ \pi_K(x_{in}) = \pi_K(x_{nj}) = 0. \end{array} \right.$$

さて正の優形式 $\lambda \in L_{n+1}$ に対して $G = SU_q(n+1)$ の既約表現 (左 $A(G)$ -余加群) $V^\lambda(\lambda)$ が決まる。また、この既約表現を $K = SU_q(n)$ の表現として既約分解した際、 K の自明な表現が現れるとする。すなわち、ある 0 でない元 $v_0 \in V^\lambda(\lambda)$ に対して

$$L_K(v_0) = 1 \otimes v_0 \quad \text{ただし} \quad L_K = (\pi_K \otimes \text{id}) \circ \Delta$$

と存在する。このとき $V^\lambda(\lambda)$ は K に関して “グラス 1” であるといわれる。Branching に関するいわゆる “Gel'fand pattern” を見ると

により次の命題を得る。

命題 4.1. 正の優形式 $\lambda \in L_{n+1}$ に対して左 $A(G)$ -余加群 $V^\lambda(\lambda)$

が K に関して $\mathbb{Z}$ であるための必要十分条件はある自然

数 l, m があって $\lambda = l\lambda_1 + m\lambda_n$ と書けることである。また

λ と m は左 K -不変ベクトルは定数倍を除いて一意である。//

量子空間 $X \subseteq X = K \backslash G = SU_q(n) \backslash SU_q(n+1)$ とおけばこれは一種の“量子球面”をあらわす。 X の座標環 $A(X)$ は $A(G)$ の右 $A(G)$ -部分余加群であり、既約余加群の直和に分解される。最高ウェイトベクトルを見ることによって次の分解を得る。

命題 4.2. 右 $A(G)$ -余加群として

$$A(X) = \sum_{l, m \in \mathbb{N}}^{\oplus} V(l, m),$$

ここで $V(l, m)$ は $v_0(l, m) = (x_{nn}^*)^m (x_{n0})^l = (\xi_n^*)^m (\xi_0^n)^l \in$
(ウェイト $\lambda = l\lambda_1 + m\lambda_n$ の) 最高ウェイトベクトルとして含む ($V^\lambda(\lambda)$ と同型な) 既約右 $A(G)$ -余加群である。//

以下 $A(X)$ の元 z_k, w_k を

$$z_k = x_{nk}, \quad w_k = z_k^* = (-q)^{k-n} \xi_n^* \quad (0 \leq k \leq n)$$

とおく。これは次の交換関係を満たすことを計算によりわかる。

$$\left\{ \begin{array}{l} z_i z_j = q z_j z_i, \quad q w_i w_j = w_j w_i, \quad (0 \leq i < j \leq n) \\ w_j z_i = q z_i w_j, \quad (0 \leq i, j \leq n, i \neq j) \\ w_k z_k = z_k w_k + (1 - q^2) \sum_{\nu < k} z_\nu w_\nu, \quad (0 \leq k \leq n) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^n z_k w_k = \sum_{k=0}^n q^{2(n-k)} w_k z_k = 1. \right.$$

こゝに実は $A(X) = \mathbb{C}[z_k, w_k \ (0 \leq k \leq n)]$ である。

我々は $A(X)$ の右 K -不変ベクトル V (i.e., $v \in A(K \backslash G / K)$)
 $\in X = K \backslash G$ 上の“帯球函数”と呼ぶ。命題 4.2 により $A(X)$ は右
 $A(G)$ -余加群として既約分解される。各既約成分 $V(l, m)$ は K に
 関して q -ラシ $\pm$ であり、帯球函数 $\varphi(l, m)$ を含む。帯球函数は、
 $\varepsilon(\varphi(l, m)) = \pm 1$ と正規化しておく。今 $V(l, m)$ の基底 $\{v_i \ (0 \leq i < d)\}$
 $(d = \dim_{\mathbb{C}} V(l, m))$ と $v_0 = \varphi(l, m)$ とするようになり、この基底
 に関する行列要素を w_{ij} とおく：

$$\Delta(v_j) = \sum_{i=0}^{d-1} v_i \otimes w_{ij} \quad (0 \leq j < d).$$

こゝに w_{00} は基底ベクトル $v_i \ (0 \leq i < d)$ の並び方に依らず
 に決まりしかる $w_{00} = \varphi(l, m)$ であることが確かめられる。この帯
 球函数を表示するため (2,1) 型の“ q -超幾何級数”を用いる。

$${}_2\varphi_1 \left(\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} ; q, \zeta \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a; q)_k (b; q)_k}{(c; q)_k (q; q)_k} \zeta^k$$

また Jacobi 多項式の q -analogue は、 $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$P_m^{(\alpha, \beta)}(\zeta; q) = {}_2\varphi_1 \left(\begin{matrix} q^{-m} & q^{q+\beta+m+1} \\ q^{q+1} \end{matrix} ; q, q\zeta \right)$$

により定義される。この q -Jacobi 多項式は通常“little” q -
 Jacobi 多項式と呼ばれるものである。他にも (3.2) 型の q -超
 幾何級数を用いて定義される“big” q -Jacobi 多項式と呼ばれ

るものも存在し、これも量子球面上の“球函数”と解釈されることになっている (cf. [NYM 1, 2])。

定理 4.3. 既約右 $A(G)$ -余加群 $V(l, m)$ ($l, m \in \mathbb{N}$) の K に関する帯球函数 $\varphi = \varphi(l, m)$ は変数 $\zeta = \sum_{k=0}^{n-1} z_k w_k = 1 - x_{nn} \zeta_{\frac{n}{n}}$ に関する q -Jacobi 多項式で次のように表わされる。

$$\varphi = \begin{cases} (x_{nn})^{l-m} P_m^{(n-1, l-m)}(\zeta; q^2) & \text{if } l \geq m \\ P_l^{(n-1, m-l)}(\zeta; q^2) (\zeta_{\frac{n}{n}})^{m-l} & \text{if } l \leq m. \end{cases}$$

//

本稿で述べなかったこととしては、量子包絡環 $U_q(\mathfrak{gl}(N; \mathbb{C}))$ との関係、 $SU_q(N)$ 上の Haar 測度、及び内積、表現の指標、Fourier 変換などがある。詳しくは、[NYM 2] を参照されたい。

10/25/89.

文献 (もとより網羅的ではあり得ない)

- [A] 阿部英一: ホウフ代数, 岩波.
- [B] G. M. Bergman: The diamond lemma for ring theory, Adv. Math. 29 (1978), 178-218.
- [D] V. G. Drinfeld: Quantum groups, Proc. ICM, 1986, 798-820.
- [H] 日比孝三: q -analogue の世界, 数学 (1989), 269-274.
- [J] M. Jimbo: A q -difference analogue of $U(\mathfrak{sl}_2)$ and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys. 10 (1985), 13-69.
- [M] T. Masuda, K. Mimachi, Y. Nakagami, M. Noumi & K. Ueno: Representations of the quantum group $SU_q(2)$ and the little q -Jacobi polynomials, to appear in J. Funct. Anal.
- [NM1] M. Noumi & K. Mimachi: Quantum 2-spheres and big q -Jacobi polynomials, to appear in Lett. Math. Phys.
- [NM2] ———: Big q -Jacobi polynomials, q -Hahn polynomials and a family of quantum 3-spheres, to appear in Comm. Math. Phys.
- [NYM1] M. Noumi, H. Yamada & K. Mimachi: Zonal spherical functions on the quantum homogeneous space $SU_q(n+1)/SU_q(n)$, Proc. Japan Acad. 65A (1989), 169-171.

- [NYM2] ——— : Finite dimensional representations of the quantum group $GL_q(n+1; \mathbb{C})$ and the zonal spherical functions on $U_q(n) \setminus U_q(n+1)$, preprint 1989.
- [R] M. Rosso : Finite dimensional representations of the quantum analogue of the enveloping algebra of a complex simple Lie algebra, *Comm. Math. Phys.* 117 (1988), 581 -
- [RTF] N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtajan & L. D. Faddeev :
Quantization of Lie groups and Lie algebras, to appear in *Algebra & Analysis* (in Russian).
- [S] I. Schur : Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen, Dissertation, Berlin 1901, 全集 Vol 1, 1-72.
- [W] S. L. Woronowicz : Compact matrix pseudogroups, *Comm. Math. Phys.* 111 (1987), 613 - 665.
- [M'] 三町勝久 : q -アタロク入門, 数字のあゆみ 29号 (1987), 58 - 72.