

楕円型方程式系の境界値問題

柏原正樹・河合隆裕

(京大・数理研)

“境界値問題”は、現在の所、“代数的解析的に”問題を大域化できる殆んど唯一の道具と思われる。より一般の場合の定式化については 柏原-河合 [1], [2] を参照して頂くとして、ここでは 線型楕円型微分方程式系 $\mathcal{M}$ に対する境界値問題を境界の余次元が 1 の場合に限って簡単に説明したい。 $\mathcal{M}$ が楕円型でない時はどのような定式化をすればよいのか 我々は未だその解答を知らない。尚、更に詳しい議論は 柏原-河合 [1], [2] 及び、数年内に執筆予定の書に譲りたい。

まず記号の準備から始める。

M を実解析的多様体, N をその余次元 1 の部分多様体, X, Y をそれぞれ M, N の複素近傍とする。

問題は局所的に考えることとし, $M = M_+ \cup M_- \cup N$ と分け, $\mathcal{N}$ に M_+ の側を示す余ベクトル ν とする。

更に $Z_{\pm} = M_{\pm} \cup N$ と定める。この時この分割に応じて $S_N^* X = G_+ \cup G_- \cup i S^* M \times_N N$, 但し

$$G_{\pm} = \{ (x, \zeta \infty) \in S_N^* X; \operatorname{Re} \zeta = \pm \vartheta \}$$

という $S_N^* X$ の分割が出来る。今 $\mathcal{M}$ を M 上で定義された楕円型微分方程式系とする。(以下 '線型' は略する。) この時 S.S. $\mathcal{M} \cap iS^* M \times N = \emptyset$ が楕円型の仮定より従う(同値)ことを注意しておこう。

以下記号その他は 佐藤 - 河合 - 柏原 [1] (S-K-K と略する) に従う。

今 p によって $S_N^* X - S_Y^* X$ から $S_N^* Y$ への自然な射影を表わすこととして,

$$\mathcal{M}_{\pm} = p_* (\mathcal{P}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\pi^{-1} \partial_X} \mathcal{M} |_{G_{\pm}})$$

と "正(負)の特性多様体 に付随した" 接(擬微分)方程式系を定義する。明らかに, $\mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{M}_- = \mathcal{M}_Y$ かつ S.S. $\mathcal{M} \cap iS^* M \times N = \emptyset$ 故, 成立する。

以上の準備の後に定理は次の形で与えられる。

定理.
$$\begin{aligned} R\Gamma_{Z_{\pm}} R\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}; \mathcal{B}_M) \\ \cong R\pi_{N*} R\operatorname{Hom}_{\mathcal{P}_N}(\mathcal{M}_{\pm}; \mathcal{C}_N)[-1] \end{aligned}$$

勿論 ここで 通常通り $\mathcal{B}_M$ は M 上の超関数の層,

C_N は $S_N^* Y \cong iS^* N$ 上の マイクロ ファンクショナルの層,
 π_N は $iS^* N$ から N への 射影を表わす。

定理の証明は 補助的な層 $C_{N/X}$ を導入して 2
 段階に分けて行う。第一段階では $\mathcal{M}$ の 楕円性か、
 第二段階では N が $\mathcal{M}$ に関して 非特性的 であること
 (これは N の 余次元が 1 より 大きい時は $\mathcal{M}$ の 楕円性
 とは無縁の事である。今の場合は N の 余次元 1 故、陽
 に仮定しなかった。) が本質的である。

まず "相対 C " $C_{N/X}$ は

$$\mathcal{H}_{S_N^* X}^n (\pi_{N/X}^{-1} \mathcal{O}_X)^a$$

によって 定義された。

この時, この定義より容易に従う 次の 2 つの 事実
 に注意しよう。特に補題 1 は 何故 境界値問題において
 $G_{\pm}$ が, 従って $\mathcal{M}_{\pm}$ が, 本質的かを説明していると
 言えよう。

補題 1. $R\Gamma_{Z_{\pm}}(\mathcal{B}_M) \rightarrow \pi_{N/X}^*(C_{N/X}|_{G_{\pm}})$

なる 写像が存在する。

(S-K-K Chap. 1. Prop. 1.2.4 参照)

補題 2. 次の完全系列が存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{O}_X|_N & \\
 \swarrow & & \searrow^{+1} \\
 \mathcal{A}_N^n(\mathcal{O}_X)[1] & \longrightarrow & R\pi_{N/X*} C_{N/X}[1]
 \end{array}$$

(S-K-K Chap. 1. Prop. 1.2.5 参照)

今定理に言う同型の左辺を $C_{N/X}$ -解に関するコホモロジー群として表わそう。補題 1 により次の写像 ϕ_1 が存在することは自明。

$$\begin{aligned}
 & R\Gamma_{Z_{\pm}} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}; B_M) \\
 &= R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}; R\Gamma_{Z_{\pm}}(B_M)) \\
 &\xrightarrow{\phi_1} R\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}; R\pi_{N/X*}(C_{N/X}|_{G_{\pm}})) \\
 &= R\pi_{N/X*}(R\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}_X(\pi^*\mathcal{D}_X)}(\mathcal{P}_X \otimes \mathcal{M}, C_{N/X})|_{G_{\pm}})
 \end{aligned}$$

この写像 ϕ_1 が実は同型であることを言いたい。それには、 $\mathcal{B}$ の脆弱性より従う、次復可換図式 (の上半分に現われる完全系列) に注意しよう。勿論その図式の下半分は補題 2 の系である。

⌘

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{R}\Gamma_N \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}; \mathcal{B}_M) & & \\
 & \swarrow & \downarrow & \nwarrow & \\
 \mathrm{R}\Gamma_{Z^+} \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}; \mathcal{B}_M) \oplus \mathrm{R}\Gamma_{Z^-} \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}; \mathcal{B}_M) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}; \mathcal{B}_M) & & \\
 \downarrow \scriptstyle \theta_1 & & \downarrow \scriptstyle i & & \downarrow \scriptstyle j \\
 & \swarrow & \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}; \mathcal{A}_N^1(\mathcal{O}_X)) & \nwarrow & \\
 \mathrm{R}\pi_{N/X*} \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}; \mathcal{C}_{N/X})|_{\mathcal{G}^+} \oplus \mathrm{R}\pi_{N/X*} \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}; \mathcal{C}_{N/X})|_{\mathcal{G}^-} & & & \nearrow \scriptstyle +1 & \\
 \parallel & & & & \\
 \mathrm{R}\pi_{N/X*} \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}; \mathcal{C}_{N/X}) & & & & \\
 \parallel & & & & \\
 \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathrm{R}\pi_{N/X*} \mathcal{C}_{N/X}) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}; \mathcal{O}_{X/N}) & &
 \end{array}$$

ここで i は定義により, j は $\mathcal{M}$ の楕円性より従う
 $\mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}; \mathcal{B}_M) = \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_M)$ なる同型により,
 いずれも同型である。従って 従って上に定義された準同型
 θ_1 も同型である。

次に 定理にいう 同型の右辺と $R\mathrm{Hom}_{P_X}(\mathcal{M}; C_{N/X})|_{G_{\pm}}$ との関係調べよう。

今 N が, 従って Y が, $\mathcal{M}$ に関して非特性的故,
 $R\mathrm{Hom}_{P_Y}(\mathcal{M}_Y; P_Y) \longrightarrow R\mathrm{Hom}_{P_X}(\mathcal{M}, P_{X \leftarrow Y})[1]$
 なる自然な準同型が存在する。(S-K-K p. 415 参照)
 この準同型により, 次の準同型 θ_2 を得ることが出来る。

$$R\mathrm{Hom}_{P_Y}(\mathcal{M}_Y; C_N) \xrightarrow{\theta_2} R\mathrm{Hom}_{P_X}(\mathcal{M}; C_{N/X})[1]$$

実際,

$$\begin{aligned} & R\mathrm{Hom}_{P_Y}(\mathcal{M}_Y; C_N) \\ & \longrightarrow R\mathrm{Hom}_{P_Y}(\mathcal{M}_Y; P_Y) \underset{P_Y}{\overset{L}{\otimes}} C_N \\ & \longrightarrow R\mathrm{Hom}_{P_X}(\mathcal{M}; P_{X \leftarrow Y}) \underset{P_Y}{\overset{L}{\otimes}} C_N[1] \\ & \longrightarrow R\mathrm{Hom}_{P_X}(\mathcal{M}; P_{X \leftarrow Y} \underset{P_Y}{\overset{L}{\otimes}} C_N)[1] \\ & \longrightarrow R\mathrm{Hom}_{P_X}(\mathcal{M}; C_{N/X})[1] \end{aligned}$$

$\mathcal{M}_Y = \mathcal{M}_+ \oplus \mathcal{M}_-$ に注意すれば, この準同型を用いて
 得られる

$$R\pi_{N*} R\mathrm{Hom}_{P_Y}(\mathcal{M}_Y; C_N) \xrightarrow{\theta_2} R\pi_{N/X*} R\mathrm{Hom}_{P_X}(\mathcal{M}; C_{N/X})[1]$$

なる写像が同型であることを言えば、前半の所論と合わせて定理に言う同型が示されたことになる。しかるに、 N が $\mathcal{M}$ に対して非特異的なことにより、Riemann-Hilbert-Plemelj 型の境界値問題に対する同型 (たとえば S-K-K Chap. 2, Cor. 3.5.8 参照) により下の可換図式の b_3 は同型, α , 同様に k も Cauchy-Kowalevsky の定理により同型, 従って求める同型が得られる。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y; \mathcal{B}_N/a_N) & & \\
 & \swarrow +1 & \downarrow & \nwarrow & \\
 \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y; a_N) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y; \mathcal{B}_N) & & \\
 & \downarrow b_2 & & & \\
 & \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\pi_{N/X*} C_{N/X}[1]) & & & \\
 & \swarrow & \nwarrow & & \\
 \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}; \mathcal{O}_X|_N) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}; H_N^n(\mathcal{O}_X)) & & \\
 & \downarrow k & & \downarrow b_3 & \\
 & & & &
 \end{array}$$

註. 以上では M が楕円型 であることを仮定したが, その仮定は少し弱め得る. 実際 $\text{Supp } M \cap G_{\pm}$ の近傍 $U_{\pm}$ を $U_+ \cap U_- = \emptyset$ なるようにとることができ, しかも 超関数の範囲で M に対し存在, 正則性定理が成立立つなら (N が M に関して非特異的, という仮定の下に) 定理が成立することは見易い. このような作用素の最も簡単な例は, 所謂 溝畑 の作用素

$$\frac{\partial}{\partial x_1} + i x_1^k \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (N = \{x_1 = 0\} \subset M = \mathbb{R}^2, k: \text{偶数})$$

である. もっと豊富な例については 柏原-河合 [3] (Micro-hyperbolic pseudo-differential operator I.) 参照. 但しこの論文では未だ単独の作用素しか扱われていない所に 問題が残っている. (応用上)

文献 (詳しくは下記の文献の文献表参照)

相原-河合 : [1] Proc. Japan Acad. 48 (1972) 712-715

—— : [2] Proc. Japan Acad. 49 (1973) 164-168

—— : [3] Submitted to J. Math Soc Japan.

佐藤-河合-相原 : [1] (S-K-K) Lecture Notes in
Mathematics No. 287, Springer, Part II.
pp. 265-529