

# Mean values of Goss $L$ -functions and Dedekind sums

岡山理科大学・理学部 浜畑 芳紀

Yoshinori Hamahata

Faculty of Science, Okayama University of Science

## 1 古典的結果

互いに素な整数  $a$  と  $c > 0$  に対して, 古典的 Dedekind 和は

$$D(a, c) = \frac{1}{4c} \sum_{k=1}^{c-1} \cot\left(\frac{\pi ak}{c}\right) \cot\left(\frac{\pi k}{c}\right)$$

によって定義される. この和は有理数で, 相互法則と呼ばれる等式を満たす.  $n$  を 2 以上の整数とする.  $\chi$  は  $n$  を法とする指標とし,  $L(s, \chi) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi(l)}{l^s}$  は  $\chi$  に対応する Dirichlet  $L$ -関数とする. 上述の Dedekind 和を用いて, Dirichlet  $L$ -関数の積の平均値を計算することができる. Walum [9], Louboutin [8], Zhang [11] は

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\chi \bmod n \\ \chi(-1)=-1}} L(1, \chi) L(1, \bar{\chi}) &= \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \phi(n) \sum_{b|n} b \mu\left(\frac{n}{b}\right) D(1, b) \\ &= \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{\phi(n)^2}{12} \left( n \prod_{\substack{p|n \\ p:\text{prime}}} \left(1 + \frac{1}{p}\right) - 3 \right) \end{aligned} \quad (1)$$

を証明した. 但し,  $\bar{\chi}$  は  $\chi$  の複素共役,  $\phi(n)$  は Euler 関数,  $\mu(n)$  は Möbius 関数である.  $m_1, \dots, m_d$  は非負整数とする. Bayad と Raouj は [4] の中で, 次のような平均値

$$\sum_{\chi_1, \dots, \chi_d} \prod_{i=1}^d \bar{\chi}_i(a_i) L(m_i + 1, \chi_i) \quad (2)$$

を考察した. ここで  $\sum_{\chi_1, \dots, \chi_d}$  は,  $n$  を法とする指標  $\chi_1, \dots, \chi_d$  で,  $\chi_1 \cdots \chi_d = 1$  かつ  $\chi_i(-1) = (-1)^{m_i+1}$  ( $i = 1, \dots, d$ ) となるもの全体の和を表す. 彼らは上記の (1) を拡張するために次のような Dedekind 和を用いている.  $b_0, b_1, \dots, b_d$  は正整数で  $b_1, \dots, b_d$  は  $b_0$  とそれぞれ互いに素とする.  $m_0, m_1, \dots, m_d$  は非負整数とするとき

$$C(b_0; b_1, \dots, b_d | m_0; m_1, \dots, m_d) = \frac{1}{b_0^{m_0+1}} \sum_{j=1}^{b_0-1} \cot^{(m_1)}\left(\frac{\pi b_1 j}{b_0}\right) \cdots \cot^{(m_d)}\left(\frac{\pi b_d j}{b_0}\right)$$

を多重 Dedekind–Rademacher 和という. ここで  $\cot^{(m)}(x)$  は  $\cot(x)$  の  $m$  階導関数である. 特に  $m_0 = m_1 = \cdots = m_d = 0$  とするとこの和は, Zagier [10] の定義した高次元 Dedekind 和になる. この多重 Dedekind–Rademacher 和は有理数であり, 相互法則と呼ばれる法則を満たす ([3]). Bayad と Raouj [4] の主結果は次の通りである. (2) において  $a_d = 1$  とし,  $a_1, \dots, a_{d-1}$  は  $n$  とそれぞれ互いに素と仮定する.  $m_1, \dots, m_d$  は非負整数で,  $m_1 + \cdots + m_d + d$  が偶数となるものとする. その

とき

$$\begin{aligned} & \sum_{\chi_1, \dots, \chi_d} \prod_{i=1}^d \bar{\chi}_i(a_i) L(m_i + 1, \chi_i) \\ &= \frac{(-1)^d}{2^d m_1! \dots m_d!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{m_1 + \dots + m_d + d} \phi(n)^{d-1} \sum_{b|n} b\mu\left(\frac{n}{b}\right) C(b; a_1, \dots, a_d | 0; m_1, \dots, m_d). \quad (3) \end{aligned}$$

本稿では, (3) の関数体類似を与える.

## 2 A-格子と Dedekind 和

### 2.1 A-格子

$\mathbb{F}_q$  を  $q$  個の元からなる有限体とし,  $A := \mathbb{F}_q[T]$ ,  $K := \mathbb{F}_q(T)$ ,  $K_\infty := \mathbb{F}_q((1/T))$  とおく.  $C_\infty$  は,  $K_\infty$  の代数的閉包の完備化とする.  $\Lambda$  が  $C_\infty$  中の階数  $r$  の  $A$ -格子であるとは,  $\Lambda$  が階数  $r$  の有限生成  $A$ -加群で,  $C_\infty$  中で離散であるもののことである. そのような  $\Lambda$  に対して, 無限積  $e_\Lambda(z) = z \prod_{0 \neq \lambda \in \Lambda} (1 - z/\lambda)$  を定義すると,  $C_\infty$  の各点で収束してリジッド解析的な意味で整関数になる.  $e_\Lambda(z)$  を微分すると 1 になることが知られている. 各  $a \in A$  に対して,  $\phi_a(e_\Lambda(z)) = e_\Lambda(az)$  をみたす多項式  $\phi_a(z) = \phi_a^\Lambda(z) = \sum l_i(\phi_a) z^i$  が一意的に存在する.  $\tau = z^q$  とし,  $C_\infty\{\tau\}$  は  $\tau$  に関する非可換環で,  $c^q \tau = \tau c$  ( $c \in C_\infty$ ) の条件を満たすものとする.  $\Lambda$  の階数が  $r$  のとき

$$\phi_a(z) = \sum_{i=0}^{r \deg a} l_i(\phi_a) \tau^i \quad (l_0(\phi_a) = a)$$

と表せる. 写像  $\phi: A \rightarrow C_\infty\{\tau\}$ ,  $a \mapsto \phi_a$  を  $C_\infty$  上の階数  $r$  の Drinfeld 加群という.  $\phi$  は  $\mathbb{F}_q$ -線型環準同型写像なので,  $\phi$  の像是  $\phi_T$  によって定まる. 階数 1 の Drinfeld 加群  $\rho: A \rightarrow C_\infty\{\tau\}$  で  $\rho_T = Tz + z^q$  で定義されるものを Carlitz 加群という.

$A$ -格子  $\Lambda$  に対して,  $S_{k,\Lambda} = \sum_{\lambda \in \Lambda} (z + \lambda)^{-k}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $S_{0,\Lambda} = 0$  とおく. このとき  $k$  次モニック多項式 (Goss 多項式という)  $G_{k,\Lambda}(X) \in C_\infty[X]$  で次の条件を満たすものが存在する: (G1)  $S_{k,\Lambda} = G_{k,\Lambda}(e_\Lambda(z)^{-1})$ ; (G2)  $e_\Lambda(z) = \sum_{i=0}^\infty \alpha_i z^{q^i}$  のとき,  $G_{k,\Lambda}(X) = X(G_{k-1,\Lambda}(X) + \alpha_1 G_{k-q,\Lambda}(X) + \dots + \alpha_i G_{k-q^i,\Lambda}(X) + \dots)$ ; (G3)  $G_{k,\Lambda}(0) = 0$ ; (G4)  $G_{k,\Lambda}(X) = X^k$  if  $k \leq q$ ; (G5)  $G_{pk,\Lambda}(X) = G_{k,\Lambda}(X)^p$ ; (G6)  $X^2 G'_{k,\Lambda}(X) = k G_{k+1,\Lambda}(X)$ .

詳細については, Goss [6, 7] を参照されたい.

### 2.2 Dedekind 和

$a_0, a_1, \dots, a_d$  ( $d \geq 1$ ) は  $A \setminus \{0\}$  の元で,  $a_1, \dots, a_d$  はそれぞれ  $a_0$  と互いに素とする. また,  $m_0, \dots, m_d$  は非負整数とする.

**定義 1 ([2])**  $A$ -格子  $\Lambda$  に対する多重 Dedekind–Rademacher 和  $s_\Lambda(a_0; a_1, \dots, a_d | m_0; m_1, \dots, m_d)$  を

$$s_\Lambda(a_0; a_1, \dots, a_d | m_0; m_1, \dots, m_d) = \frac{1}{a_0^{m_0+1}} \sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda/a_0\Lambda} e_\Lambda\left(\frac{a_1\lambda}{a_0}\right)^{-m_1-1} \dots e_\Lambda\left(\frac{a_d\lambda}{a_0}\right)^{-m_d-1}$$

によって定義する. ただし,  $\Lambda/a_0\Lambda = \{0\}$  のとき, この和を 0 として定義する.

特に  $m_0 = m_1 = \dots = m_d = 0$  の場合の Dedekind 和は高次元 Dedekind 和と呼ばれ, Zagier [10] の定義した Dedekind 和の関数体類似となる ([1] を参照のこと) .

$\Lambda$  に対応する Drinfeld 加群  $\phi$  を用いて, Dedekind 和の別の表示を与えることができる :

$$s_\Lambda(a_0; a_1, \dots, a_d | m_0; m_1, \dots, m_d) = \frac{1}{a_0^{m_0+1}} \sum_{0 \neq x \in \phi[a_0]} \phi_{a_1}(x)^{-m_1-1} \dots \phi_{a_d}(x)^{-m_d-1}.$$

但し,  $\phi[a] := \{x \in C_\infty \mid \phi_a(x) = 0\}$  は  $\phi$  の  $a$ -分点全体の集合である. [2] では, この Dedekind 和に対する相互法則や Knopp 恒等式を証明している. 第 1 節で紹介した古典的な多重 Dedekind–Rademacher 和  $C(b_0; b_1, \dots, b_d | m_0; m_1, \dots, m_d)$  は,  $m_1 + \dots + m_d + d$  が奇数のとき 0 であることが知られている. 関数体の場合,  $q-1$  の倍数が偶数の類似である.  $q-1$  が  $m_1 + \dots + m_d + d$  を割らないとき,  $s_\Lambda(a_0; a_1, \dots, a_d | m_0; m_1, \dots, m_d)$  は 0 になる. 実際, 定義の式で  $\lambda \in \Lambda/a_0\Lambda \setminus \{0\}$  を  $\zeta\lambda$  ( $\zeta \in \mathbb{F}_q^*$ ) に取りかえることで示すことができる.  $L = \pi A$  は階数 1 の  $A$ -格子で Carlitz 加群  $\rho$  に対応するものとする. このとき,  $s_L(a_0; a_1, \dots, a_d | m_0; m_1, \dots, m_d)$  が第 1 節で定義された多重 Dedekind–Rademacher 和の関数体類似であり,  $K$  に値をとる. 特に

$$s_L(a, c) := s_L(c; a, 1 | 0; 0) = \frac{1}{c} \sum_{0 \neq l \in L/cL} e_L\left(\frac{al}{c}\right)^{-1} e_L\left(\frac{l}{c}\right)^{-1}$$

は第 1 節で定義された古典的 Dedekind 和  $D(a, c)$  の関数体類似である.

### 3 Goss $L$ -関数の平均値

#### 3.1 Goss $L$ -関数

$A_+$  を  $A$  のモノック元全体の集合とする.  $M \in A_+$  で  $\deg M = l > 0$  となるものとする.  $(A/MA)^*, C_\infty^*$  はそれぞれ,  $A/MA, C_\infty$  の単数群とする. 群準同型  $\chi : (A/MA)^* \rightarrow C_\infty^*$  を  $M$  を法とする指標という. これは  $\chi : A \rightarrow C_\infty^*$  に

$$\chi(a) = \begin{cases} \chi(a + MA) & ((a, M) = 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

によって拡張できる. 像が  $\{1\}$  になる指標は主指標と呼ばれる. 指標  $\chi$  に対して,  $\bar{\chi}$  を

$$\bar{\chi}(a) = \begin{cases} \chi(a + MA)^{-1} & ((a, M) = 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

によって定義する.

$$L(s, \chi) = \sum_{a \in A_+} \frac{\chi(a)}{a^s} \quad (s \in \mathbb{N}),$$

を Goss  $L$ -関数という. この  $L$ -関数の値について次のことが知られている.  $\chi$  が主指標のとき,  $L(s, \chi)$  は  $K$  上超越的である.  $L(s, \chi)/\pi^s$  が  $K$  上有理的, 代数的, 超越的となる  $s, \chi$  がある ([5] を参照のこと). それゆえこの  $L$ -関数の積の平均値を調べることは実に興味深い. [2] では次の結果を証明した. 単数群  $(A/MA)^*$  の位数を  $\Phi(M)$  で表す.

定理 2 ([2])

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\chi \bmod M \\ \chi|_{\mathbb{F}_q^*} = \text{id}}} L(1, \chi) L(1, \bar{\chi}) &= -\frac{\pi^2 \Phi(M)}{M^2} \sum_{N|M} N \mu\left(\frac{M}{N}\right) s_L(1, N) \\ &= \begin{cases} -\frac{\pi^2 \Phi(M)}{M^2(T^3 - T)} \sum_{N|M} \mu\left(\frac{M}{N}\right) (N^2 - 1) & (q = 3 \text{ のとき}), \\ -\frac{\pi^2 \Phi(M)}{M^2(T^4 + T^2)} \sum_{N|M} \mu\left(\frac{M}{N}\right) (N^2 - 1) & (q = 2 \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases} \end{aligned}$$

但し  $\sum_{N|M}$  は,  $M$  を割る  $N \in A_+$  に関する和である.

これは第 1 節の (1) の結果の関数体類似である.

### 3.2 主結果

3.1 で与えた結果を拡張して次のような結果を得た.

**定理 3**  $a_1, \dots, a_d \in A \setminus \{0\}$  はそれぞれ  $M$  と互いに素であるとし, 特に  $a_d = 1$  とする.  $m_1, \dots, m_d$  は非負整数で  $m_1 + \dots + m_d + d$  は  $q - 1$  で割り切れるものとする. そのとき

$$\begin{aligned} \sum_{\chi_1, \dots, \chi_d} \prod_{i=1}^d \bar{\chi}_i(a_i) L(m_i + 1, \chi_i) \\ = \left(\frac{\pi}{M}\right)^{m_1 + \dots + m_d + d} (-\Phi(M))^{d-1} \sum_{\substack{b \in A_+ \\ \deg b < \deg M \\ (b, M) = 1}} \prod_{i=1}^d G_{m_i+1, L} \left( e_L \left( \frac{\pi a_i b}{M} \right)^{-1} \right) \quad (4) \end{aligned}$$

が成立する. 但し  $\sum_{\chi_1, \dots, \chi_d}$  は,  $\chi_1 \cdots \chi_d = 1$ ,  $\chi_i(\zeta) = \zeta^{m_i+1}$  ( $\zeta \in \mathbb{F}_q^*$ ,  $i = 1, \dots, d$ ) となる  $M$  を法とする指標  $\chi_1, \dots, \chi_d$  の和である.

この結果の条件を強めて次のような結果が得られる.

**定理 4** 定理 3 と同様の条件を仮定する. さらに各  $m_i$  は,  $p^{n_i} k_i - 1$  ( $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $1 \leq k_i \leq q$ ) の形で書けると仮定する. そのとき

$$\begin{aligned} \sum_{\chi_1, \dots, \chi_d} \prod_{i=1}^d \bar{\chi}_i(a_i) L(m_i + 1, \chi_i) &= -\left(\frac{\pi}{M}\right)^{m_1 + \dots + m_d + d} \Phi(M)^{d-1} \\ &\quad \times \sum_{N|M} N \mu\left(\frac{M}{N}\right) s_L(N; a_1, \dots, a_d | 0; m_1, \dots, m_d). \quad (5) \end{aligned}$$

但し  $\sum_{\chi_1, \dots, \chi_d}$  は,  $\chi_1 \cdots \chi_d = 1$ ,  $\chi_i(\zeta) = \zeta^{m_i+1}$  ( $\zeta \in \mathbb{F}_q^*$ ,  $i = 1, \dots, d$ ) となる  $M$  を法とする指標  $\chi_1, \dots, \chi_d$  の和であり,  $\sum_{N|M}$  は,  $M$  を割る  $N \in A_+$  に関する和である.

定理 4 は, Bayad-Raouj [4] の結果 (3) の関数体類似である. ここで  $\pi$  が  $K$  上超越的である ([7]) という結果を思い出すと,  $s_L(a_0; a_1, \dots, a_d | m_0; m_1, \dots, m_d) \in K$  より, (5) の平均値は 0 でなければ,  $K$  上超越的であることがわかる.

## 4 主結果の証明の概略

次の結果を用いる.

**補題 5**  $m$  は非負整数で,  $M \in A_+$  の次数は  $\deg M = l > 0$  とする. 指標  $\chi : (A/MA)^* \rightarrow C_\infty^*$  で  $\chi(\zeta) = \zeta^{m+1}$  ( $\zeta \in \mathbb{F}_q^*$ ) となるものに対して,

$$L(m+1, \chi) = \left(\frac{\bar{\pi}}{M}\right)^{m+1} \sum_{\substack{b \in A_+ \\ \deg b < l}} \chi(b) G_{m+1, L} \left( e_L \left( \frac{\bar{\pi}b}{M} \right)^{-1} \right).$$

さらに  $m$  が  $m = p^n k - 1$  ( $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \leq k \leq q$ ) の形で書けるとき,

$$L(m+1, \chi) = - \left(\frac{\bar{\pi}}{M}\right)^{m+1} \sum_{\substack{b \in A/MA \\ (b, M)=1}} \chi(b) e_L \left( \frac{\bar{\pi}b}{M} \right)^{-m-1}.$$

補題 5 より, (4) の左辺は以下のように変形できる.

$$\begin{aligned} (\bar{\pi}/M)^{m_1+\dots+m_d+d} \sum_{\chi_1, \dots, \chi_d} \sum_{\substack{b_d \in A_+ \\ \deg b_d < \deg M \\ (b_d, M)=1}} \chi_d(b_d) G_{m_d+1, L}(e_L(\bar{\pi}b_d/M)^{-1}) \\ \times \prod_{i=1}^{d-1} \bar{\chi}_i(a_i) \sum_{\substack{b_i \in A_+ \\ \deg b_i < \deg M \\ (b_i, M)=1}} \chi_i(b_i) G_{m_i+1, L}(e_L(\bar{\pi}b_i/M)^{-1}). \end{aligned}$$

ここで  $\chi_d(b_d) = \bar{\chi}_1(b_d) \cdots \bar{\chi}_{d-1}(b_d)$  を用いると

$$\begin{aligned} (\bar{\pi}/M)^{m_1+\dots+m_d+d} \sum_{\substack{b_1, \dots, b_d \in A_+ \\ \deg b_1, \dots, \deg b_d < \deg M \\ (b_1, M)=\dots=(b_d, M)=1}} G_{m_d+1, L}(e_L(\bar{\pi}b_d/M)^{-1}) \\ \times \prod_{i=1}^{d-1} G_{m_i+1, L}(e_L(\bar{\pi}b_i/M)^{-1}) \sum_{\chi_i} \chi_i(b_i) \bar{\chi}_i(a_i b_d). \end{aligned}$$

これより定理 3 の結果が得られる. ここからは各  $m_i$  は  $p^{n_i} k_i - 1$  ( $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \leq k_i \leq q$ ) の形で書けているとする. 補題 5 より, (5) の左辺は次のように変形できる.

$$\begin{aligned} (-1)^d (\bar{\pi}/M)^{m_1+\dots+m_d+d} \sum_{\chi_1, \dots, \chi_d} \sum_{\substack{b_d \in A/MA \\ (b_d, M)=1}} e_L(\bar{\pi}b_d/M)^{-m_d-1} \\ \times \prod_{i=1}^{d-1} \bar{\chi}_i(a_i b_d) \sum_{\substack{b_i \in A/MA \\ (b_i, M)=1}} \chi_i(b_i) e_L(\bar{\pi}/M)^{-m_i-1}. \end{aligned}$$

ここで  $\chi_d(b_d) = \bar{\chi}_1(b_d) \cdots \bar{\chi}_{d-1}(b_d)$  を用いると

$$\begin{aligned} (-1)^d (\bar{\pi}/M)^{m_1+\dots+m_d+d} \sum_{\substack{b_1, \dots, b_d \in A/MA \\ (b_1, M)=\dots=(b_d, M)=1}} e_L(\bar{\pi}b_d/M)^{-m_d-1} \\ \times \prod_{i=1}^{d-1} e_L(\bar{\pi}b_i/M)^{-m_i-1} \sum_{\chi_i} \chi_i(b_i) \bar{\chi}_i(a_i b_d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^d \left( \frac{\bar{\pi}}{M} \right)^{m_1 + \dots + m_d + d} \left( \frac{\Phi(M)}{q-1} \right)^{d-1} \sum_{\substack{b_d \in A/M A \\ (b_d, M)=1}} \prod_{i=1}^d e_L(\bar{\pi} a_i b_d / M)^{-m_i-1} \\
&= - \left( \frac{\bar{\pi}}{M} \right)^{m_1 + \dots + m_d + d} \Phi(M)^{d-1} \\
&\quad \times \sum_{N|M} \mu(M/N) \sum_{0 \neq b \in A/NA} \prod_{i=1}^d e_L(\bar{\pi} a_i b / N)^{-m_i-1}.
\end{aligned}$$

これより定理 4 の結果が得られる。

## 参考文献

- [1] A. Bayad and Y. Hamahata, Higher dimensional Dedekind sums in function fields, *Acta Arithmetica* **152** (2012), 71–80.
- [2] A. Bayad and Y. Hamahata, Multiple Dedekind–Rademacher sums in function fields, *Int. J. Number Theory* **10** (2014), 1291–1307.
- [3] A. Bayad and A. Raouj, Arithmetic of higher dimensional Dedekind–Rademacher sums, *J. Number Theory* **132** (2012), 332–347.
- [4] A. Bayad and A. Raouj, Mean values of  $L$ -functions and Dedekind sums, *J. Number Theory* **132** (2012), 1645–1652.
- [5] G. Damamme, Etude de  $L(s, \chi)/\pi^s$  pour des fonctions  $L$  relatives à  $\mathbb{F}_q((T^{-1}))$  et associées à des caractères de degré 1, *J. Théorie Nombres Bordeaux* **11** (1999), 369–385.
- [6] D. Goss, The algebraist’s upper half-plane, *Bull. Amer. Math. Soc.* **2** (1980), 391–415.
- [7] D. Goss, *Basic Structures of Function Field Arithmetic*, Springer, 1998.
- [8] S. Louboutin, Quelques formules exactes pour des moyennes de fonctions  $L$  de Dirichlet, *Canad. Math. Bull.* **36** (1993), 190–196.
- [9] H. Walum, An exact formula for an average of  $L$ -series, *Illinois J. Math.* **26** (1982), 1–3.
- [10] D. Zagier, Higher dimensional Dedekind sums, *Math. Ann.* **202** (1973), 149–172.
- [11] W. Zhang, On the mean values of Dedekind sums, *J. Théorie Nombres Bordeaux* **8** (1996), 429–442.