

# $h$ -assignment から見た単体的複体の shelling 集合とその解析

東京大学大学院・情報理工学研究科・コンピュータ科学専攻 森山 園子 (Sonoko Moriyama)  
Department of Computer Science, Faculty of Information Science and Technology,  
The University of Tokyo,

## Abstract

Shellable である単体的複体には, shelling と呼ばれる facet の全順序が存在する. しかし, この shelling 集合が持つ構造については知られていない. 本研究では, 新しい概念  $h$ -assignment を導入することで, shelling 集合  $S$  を antimatroid 構造を持つ同値類  $\{C_i\}$  へと分解する. Shelling に対応する  $h$ -assignment を特に *appropriate  $h$ -assignment* と呼ぶ. Appropriate  $h$ -assignment を特徴付けることで, 単体的複体における shellability の別定義を与える.

## 1 Introduction

Shellability はトポロジーの分野で古くから研究されてきた性質の1つである. しかし, Bruggesser and Mani による多面体の境界複体に関する研究 [2] 以降は, 組合せ論の分野においても重要性が認識されている. それ以降, shellability に関する研究が数多くなされたが [3][9][10], shelling 集合  $S$  が持つ構造については言及されていない.

本研究では, 新しい概念として  $h$ -assignment を導入することにより,  $S$  が antimatroid 構造を持つ shelling 部分集合へと同値類分解されることを示す. まず最初に,  $S$  における同値関係  $\sim$  を以下のように定義する: shelling  $a$  に対応する  $h$ -assignment が shelling  $b$  に対応する  $h$ -assignment に等しいとき,  $a$  と  $b$  の間には同値関係  $a \sim b$  が成立する. 同値関係  $\sim$  の元で同値類分解された  $S$  の各同値類  $\{C_i\}$  は antimatroid  $M_i$  の構造を持ち,  $\{C_i\}$  における shelling 集合は  $M_i$  の basic words 集合に対応する.

Shelling に対応する  $h$ -assignment を特に *appropriate  $h$ -assignment* と呼ぶ. この appropriate  $h$ -assignment は以下のように特徴付けることが可能である: 単体的複体の facet と ridge の関係を示す facet-ridge 接続グラフ  $G(C)$  が  $h$ -assignment  $A$  により向き付けられるとき,  $G(C)$  の向き付けがある次数条件を満たし, かつ acyclic ならば,  $A$  は appropriate である. Appropriate  $h$ -assignment に与えた特徴付けと実装技術の工夫により, 単体的複体の shellability 判定アルゴリズムを開発した [7].

## 2 Definitions and Basic Properties

$\sigma \in C$  かつ  $\tau \subset \sigma$  ならば  $\tau \in C$  を満たす有限集合  $V = \{1, \dots, n\}$  の部分集合族  $C$  を抽象的単体的複体という. この  $C$  の要素は *face* という. 特に, 集合の包含関係において極大な face を *facet* という.  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\} = \{\tau \mid \tau \text{ is a face of } \sigma_i \text{ for some } i\}$ , つまり  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  は  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  を faces として含む最小の単体的複体である. Face  $\sigma$  の次元  $\dim \sigma$  は  $|\sigma| - 1$  である.  $C$  の次元は  $\max_{\sigma \in C} \dim \sigma$  で与えられる.  $C$  の全ての facet が同じ次元であるとき,  $C$  は純であるという. 本研究では, 単体的複体は純であると仮定する.

純な単体的複体において、次元が  $\dim C - 1$  である face を *ridge* という。特に、1つの facet にのみ含まれる ridge を *boundary ridge* といい、この boundary ridge を持つ facet を *boundary facet* という。  $d$  次元の純な単体的複体の表記を  $d$ -単体的複体とする。

$C$  の  $i$ -face の数を  $f_i(C)$  と表すとき、 $C$  の  $f$ -vector は  $f(C) = (f_{-1}(C), f_0(C), f_1(C), \dots, f_d(C))$  となる。 $C$  の  $h$ -vector  $h(C) = (h_0(C), h_1(C), h_2(C), \dots, h_{d+1}(C))$  は  $h_k := \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} \binom{d+1-i}{d+1-k} f_{i-1}$  ( $0 \leq k \leq d+1$ ) により定義される。

$d$ -単体的複体  $C$  の *shelling* は、以下を満たす facet の全順序である:  $\overline{F_i} \cap (\cup_{j=1}^{i-1} \overline{F_j})$  は  $(d-1)$ -単体的複体 ( $2 \leq i \leq t$ ) である。 $C$  が *shelling* を持つとき、 $C$  は *shellable* であるという。単体的複体が *shellable* ならば、*Cohen-Macaulayness* である [5]。

*Shellable* な単体的複体  $C$  において、 $C$  の  $h$ -vector と *shelling* の間に以下のような関係が存在することが知られている。Shelling  $F_1, F_2, \dots, F_t$  において、face  $F_j$  の *restriction*  $Res(F_j)$  は、 $F_j - \{v\}$  が既出 facet 集合の 1 つに含まれるような頂点集合  $v \in V$  として定義される:  $Res(F_j) := \{v \in F_j : F_j - \{v\} \subseteq F_i \text{ for some } 1 \leq i < j\}$ 。この *shelling* に従って  $C$  を構成するとき、第  $j$  ステップ目における新しい face 集合は  $\{G | Res(F_j) \subseteq G \subseteq F_j\} = [Res(F_j), F_j]$  に等しい。これは  $C$  の *partition* を構成する。また、 $|\{j : |Res(F_j)| = i\}| = h_i(C)$  であることが知られている。

単体的複体と *shellability* についての詳細は [10] を参照されたい。

### 3 An Appropriate $h$ -assignment and Its Properties

#### 3.1 A New Concept: An $h$ -assignment

*Shellable* である単体的複体の  $h$ -vectors の性質を用いて、新しい概念  $h$ -assignment を導入し、更に  $h$ -assignment の *shellability* を以下のように定義した:

**Definition 1**  $h$ -assignment とは、ラベル  $i$  を持つ facet の数が  $h_i$  に等しいという条件を満たす、ラベル  $0 \leq i \leq d+1$  の割当てである。 $A(F)$  は、 $h$ -assignment  $A$  において facet  $F$  に割当てられたラベルを示す。

**Definition 2** ある *shelling* における *restriction* のサイズに従って  $C$  の各 facet がラベル付けられるとき、 $h$ -assignment はこの *shelling* に対応する。*Shellable  $h$ -assignment* とは、 $C$  のある *shelling* に対応する  $h$ -assignment である。

$t$  個の facet を持つ単体的複体  $C$  における  $h$ -assignment の数は  $\frac{t!}{h_0!h_1!\dots h_d!h_{d+1}!}$  に等しく、また  $C$  が *shellable  $h$ -assignment* を持つとき、 $C$  は *shellable* である。

$C$  が *shellable* であり、かつ  $A$  が *shellable  $h$ -assignment* であるとき、*shelling* における各ステップは以下を満たす: 新しく加えられた facet のラベルが  $k$  であるとき、その facet は  $d+1-k$  個の boundary ridge を持つ。ここで、以下の *proposition* を与える。

**Proposition 3**  $t$  個の facet を持つ  $d$ -単体的複体を  $C$  とし、 $C$  の  $h$ -assignment を  $A$  とする。以下の 2 つを満たす facet を  $G$  とする: (1)  $A(G) = k$ , (2)  $G$  は  $d+1-k$  個の boundary ridges を持つ。 $G$  以外の facet により生成された単体的複体を  $C'$  とする。 $C'$  は  $A$  から誘導される  $h$ -assignment  $A'$  を持つ。このとき、 $A'$  が  $C'$  の *shellable  $h$ -assignment* であることと、 $A$  が  $C$  の *shellable  $h$ -assignment* であることは同値である。この *proposition* において  $G$  が満たす条件を *removability condition* と呼び、 $C$  から  $G$  を削除する操作を *removing step* と呼ぶ。

この proposition は,  $C$  の  $h$ -assignment  $A$  が shellable であることと,  $C$  の全ての facet が削除されるまで removing step が適用可能であることが同値であることを示している. また, 与えられた  $h$ -assignment が shellable であるか否かは  $O(t)$  時間で判定可能である. 各 removing step において削除される facet  $G$  は, その時点で構成されている複体に存在する shelling において最後に配置される facet と考えられる. 全ての  $t$  個の facet に removing step を適用することで, 逆順に並べられた shelling, *reverse shelling* を列挙できる.

### 3.2 An Appropriate $h$ -assignment and Its Characterization

**Definition 4** Facet  $\{F_i\}$  と ridge  $\{R_j\}$  を持つ単体的複体を  $C$  とする.  $C$  の facet-ridge 接続グラフとは, facet  $F_i$  に対応するノード  $v_{F_i}$  と ridge  $R_j$  に対応するノード  $v_{R_j}$  を持ち,  $F_i \supset R_j$  であるときに枝  $v_{F_i} v_{R_j}$  を持つようなグラフである.

**Definition 5**  $h$ -assignment  $A$  において,  $G(C)$  に対する向き付けが以下の次数条件を満たすとき, この  $h$ -assignment は appropriate である:

- $\deg_{in}(v_{F_i}) = A(F_i)$ ,  $\deg_{out}(v_{F_i}) = d+1 - A(F_i)$ ,
- $\deg_{in}(v_{R_j}) = 1$ ,  $\deg_{out}(v_{R_j}) = \#\{F_i | F_i \supset R_j\} - 1$ ,
- 全体の向き付けが acyclic である.

Shellable  $h$ -assignment を以下のように特徴付けられることから,  $C$  における appropriate  $h$ -assignment の存在が  $C$  の shellability に対応することがわかる.

**Theorem 6**  $t$  個の facet を持つ単体的複体を  $C$  とし,  $C$  の  $h$ -assignment を  $A$  とする.  $h$ -assignment  $A$  が shellable であることと,  $A$  が appropriate であることは同値である.

この theorem では, 与えられた appropriate  $h$ -assignment  $A$  に対して  $G(C)$  を向き付ける方法を示している. つまり, removability condition を満たす facet を連続的に削除して, 削除された facet からその boundary ridge へと向き付けることにより  $A$  から  $G(C)$  を向き付けられる. 同時に,  $A$  に対応した向き付けがユニークに決定されることが観察できる.

## 4 The Antimatroid Structure in A Set of All Shellings

### 4.1 Decomposition of All Shellings by $h$ -assignments

ここでは, Language に関して antimatroid の順序版を議論する. 有限台集合  $E$  に対して, アルファベット  $E$  上の全ての word の free monoid を  $E^*$  で表記する.  $E^*$  の word を  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  で表し,  $E$  の要素である文字を  $x, y, z, \dots$  で表す.  $\alpha$  と  $\beta$  の連結を  $\alpha\beta$  を表す. 任意の word  $\alpha \in E^*$  において,  $|\alpha|$  は  $\alpha$  内の文字数を示す.  $\alpha$  の supports  $\tilde{\alpha}$  は  $\alpha$  内の文字集合を示す. ある word が同じ文字を 1 つ以上含まないとき, つまり  $|\alpha| = |\tilde{\alpha}|$  であるとき, この word を *simple* であるという.  $E$  上の language  $\mathcal{L}$  とは,  $E$  上の word 集合  $\mathcal{L} \subseteq E^*$  であり,  $\mathcal{L}$  内の全ての word が simple であるとき  $\mathcal{L}$  を *simple* であるという.

$\mathcal{F}$  が以下の 3 条件を満たすとき,  $\mathcal{F}$  は空でない有限台集合  $E$  上の antimatroid である: (1) 任意のアルファベットは  $\mathcal{F}$  内の word に出現する (normal), (2) (i)  $\emptyset \in \mathcal{F}$ , (ii)  $\alpha\beta \in \mathcal{F}$  ならば  $\alpha \in \mathcal{F}$  (hereditary), (3)  $\tilde{\alpha} \not\subseteq \tilde{\beta}$  を満たす  $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$  に対して,  $\beta x \in \mathcal{F}$  を満たす  $x \in \tilde{\alpha}$  が存在する.  $\mathcal{F}$  の各

要素は *feasible word* といい, 特に support が  $E$  に等しい feasible word を  $\mathcal{F}$  の basic word という.

Poset  $P = (E, \leq)$  上で以下の条件を満たすよう定義された antimatroid を *poset shelling* という:  $x_i$  が  $P \setminus \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$  の極小要素となる, poset  $P$  の要素  $x_1, \dots, x_k$  が feasible word である. Antimatroid の詳細については [6] を参照されたい.

Shellable な単体的複体  $\mathcal{C}$  の appropriate  $h$ -assignments は,  $\mathcal{C}$  における shelling に対して以下の同値関係を与える.

**Definition 7**  $\mathcal{C}$  の 2 つの shellings  $a$  と  $b$  に対して,  $a$  と  $b$  の両方が同じ *appropriate  $h$ -assignment* に対応するならば, 2 つの shelling 間の関係を  $a \sim b$  と表す. この関係は同値関係であり, これは shelling 集合を同値類  $\{C_i\}$  に分解する.

$G(\mathcal{C})$  がある appropriate  $h$ -assignment に対応するとき,  $G(\mathcal{C})$  の全ての頂点  $\{v_{F_k}\}$  を示す全ての facet  $\{F_k\}$  を台集合  $E$  とし,  $v_{F_i} \rightarrow v_R \rightarrow v_{F_j}$  を満たす ridge  $R$  が存在するとき  $F_i \leq F_j$  と定義して,  $F(\mathcal{C})$  を生成する. この関係  $\leq$  は  $E$  上の半順序関係である. 従って, appropriate  $h$ -assignment を持つ  $F(\mathcal{C})$  は poset とみなせる. ここで, removing step により削除される facet は  $F(\mathcal{C})$  の極小要素にあたるのが観察できる. つまり, ある appropriate  $h$ -assignment から生成された reverse shelling は poset  $F(\mathcal{C})$  における poset shelling である. 従って, 同値類  $C_i$  に含まれる全ての shelling 集合は antimatroid (poset shelling) の basic word 集合である.

**Theorem 8**  $C_i$  が antimatroid (poset shelling) の basic word 集合であるとき, reverse shelling 集合は全ての  $C_i$  の disjoint union に等しい.

## References

- [1] A. Björner, *The homology and shellability of matroids and geometric lattices*, in *Matroid Applications*. N. White ed., Cambridge (1991).
- [2] H. Bruggesser and P. Mani, *Shellable decompositions of cells and spheres*, Math. Scand. 29 (1971), 197–205.
- [3] G. Danaraj and V. Klee, *Which spheres are shellable?*, Annals of Discrete Mathematics 2 (1978), 33–52.
- [4] G. Danaraj and V. Klee, *A Representation of 2-dimensional pseudomanifolds and its use in the design of a linear-time shelling algorithm*, Annals of Discrete Mathematics 2 (1978), 53–63.
- [5] T. Hibi, *Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes*, Carlsaw Publications (1992).
- [6] B. Korte, L. Lovász and R. Schrader, *Greedoids*, Springer-Verlag (1991).
- [7] S. Moriyama, A. Nagai, and H. Imai, *Fast and Space-efficient Algorithms for Deciding Shellability of Simplicial Complexes of Large Size Using  $h$ -assignments*, to appear in Proc. of International Congress of Mathematical Software (ICMS'02).
- [8] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Birkhäuser (1996), 84.
- [9] G. M. Ziegler, *Shelling Polyhedral 3-Balls and 4-Polytopes*, Discrete Comput. Geom. 19 (1998), 159–174.
- [10] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag (1994).