

周期ソリトンの共鳴相互作用

阪府大 エ 田尻 昌義 (Masayoshi TAJIRI)

村上 洋一 (Yuuichi MURAKAMI)

§1. はじめに

Kadomtsev-Petviashvili (K-P) 方程式

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3su_{yy} = 0, \quad (1)$$

は Kadomtsev and Petviashvili (1970) によって、弱い分散性をもつ非線形媒質中の 1 次元ソリトンに横方向の長波長擾乱を加えたときの安定性を議論するために導出された。彼らは、負の分散の場合 ($s=+1$)、平面ソリトンは線形安定であり、正の分散の場合 ($s=-1$)、線形不安定であることを示した。このことより、正の分散の場合、新しい 2 次元的に局在化したソリトンの形成が予想される。このようなソリトンの一つが Manakov 等 (1977) と Ablowitz and Satsuma (1978) によって得られた代数ソリトンで、もう一つは Zaitsev (1983) と Abramyan and Stepanyants (1985) によって見出された周期ソリト

ンである。周期ソリトンを描くと代数ソリトン列のように見える。最近, Tajiri and Murakami (1989) は N -周期ソリトン解を得て, それらの相互作用を調べることも可能になった。

Miles (1977) は Satsuma (1976) が得た K - P 方程式の N -ソリトン解を使って, 平面ソリトン間の相互作用を調べ, 負の分散の場合, 波面間の交差点がある小さな値のとき, 2つのソリトンはその交点より共鳴ソリトンをつくるように強く相互作用する, いわゆるソリトン共鳴を発見した。一方, 正の分散の場合共鳴条件を満足しない。この共鳴は2ソリトン解が発散するパラメータ領域と発散しない領域の境界線上のソリトン間でおこる。

我々は正の分散の場合, 周期ソリトン間, 周期ソリトンと他種のソリトン間に解が発散とは無関係な共鳴現象のあることを見出した。ここでは, 特に y 方向に周期構造をもつ y 周期ソリトンと平面ソリトン, y 周期ソリトンと代数ソリトン及び y -周期ソリトン間の共鳴を示す。

y 周期ソリトン解は次式で与えられる

$$2\alpha^2 K \frac{[1 - (1/\sqrt{K}) \cosh(\alpha x - \Omega t + \sigma) \cos(\delta y + \theta)]}{[\sqrt{K} \cosh(\alpha x - \Omega t + \sigma) - \cos(\delta y + \theta)]^2} \quad (2)$$

$$\Omega = \alpha^3 + 3\delta^2/\alpha, \quad K = \delta^2/(\delta^2 - \alpha^4), \quad (3)$$

ここで, σ, θ は任意定数。(2)式が発散しない条件は $K > 1$,

すなわち,

$$\delta^2 > \alpha^4 \quad (4)$$

で与えられる。伝播速度は $\alpha^2 + 3\delta^2/\alpha^2$ で与えられ、存在条件(4)のもとで α の減少関数になっている。この特異な伝播特性が周期ソリトンの共鳴相互作用の可能性を生む。

§2. γ 周期ソリトンと平面ソリトン間の共鳴

γ 周期ソリトンと平面ソリトン間の相互作用を記述する解は次式で与えられる (Tajiri and Murakami 1989),

$$u = 2(\log f)_{xx}, \quad (5)$$

with

$$f = 1 + \frac{K}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) - \frac{1}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \cos(\eta) + \exp(\xi_2) \left[1 + \frac{KL^2}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) - \frac{L}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \cos(\eta) \right], \quad (6)$$

ここで

$$K = \frac{\delta^2}{\delta^2 - \alpha^4}, \quad L = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\delta/\alpha_1)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\delta/\alpha_1)^2}, \quad (7)$$

$$\xi_1 = \alpha_1 x - \Omega_1 t + \sigma_1, \quad \xi_2 = \alpha_2 x - \Omega_2 t + \sigma_2,$$

$$\eta = \delta y + \theta, \quad \Omega_1 = \alpha_1^3 + 3\delta^2/\alpha_1, \quad \Omega_2 = \alpha_2^3,$$

σ_1, σ_2 と θ は任意定数である。 $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \Omega_1/\alpha_1 > \Omega_2/\alpha_2$ を仮定するとき、衝突前と後で十分離れたときの γ 周期ソリトンと平面ソリトンはそれぞれ次のように与えられる,

$$f(\xi_1, \eta) = 1 + \frac{K}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) - \frac{1}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \cos(\eta), \quad (8)$$

$$f(\xi_2, L) = \frac{K}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) [1 + L^2 \exp(\xi_2)], \quad (9)$$

と

$$f(\xi_1, \eta, L) = \exp(\xi_2) \left[1 + \frac{KL^2}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) - \frac{L}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \cos(\eta) \right], \quad (10)$$

$$f(\xi_2) = 1 + \exp(\xi_2). \quad (11)$$

$f = \exp(ax+b)$ をかけても u の表現は変わらないことを考慮するとき、衝突は次のように表現できる

$$\begin{aligned} & [f_1(\xi_1, \eta), f_2(\xi_2 + \Gamma)] \rightarrow \\ & \begin{cases} [f_1(\xi_1 + \Gamma, \eta), f_2(\xi_2)], & \text{for } L > 0, \\ [f_1(\xi_1 + \Gamma, \eta + \pi), f_2(\xi_2)], & \text{for } L < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $\Gamma = \log |L|$. これは衝突による位相のズレが係数 L によってのみ決定されることを示している。伝播方向の位相のズレは L の大きさで、横方向のズレは L の符号によって決められる。 $L = \pm\infty$ は伝播方向の位相のズレが無限大、 $\Gamma \rightarrow \infty$ に対応している。 $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ の場合、このことは相互作用の期間または中間状態が無限に続くことを意味している。これは γ -周期ソリトンと平面ソリトンの共鳴と考えられる。その条件は L の分母が零より得られる (Murakami and Tajiri)

$$\delta/\alpha_1^2 = \alpha_2/\alpha_1 + 1, \quad (13)$$

$$\delta/\alpha_1^2 = -\alpha_2/\alpha_1 - 1, \quad (14)$$

事実、(13) または (14) の条件が満足されるとき、 γ -周期ソリ

トンと平面ソリトンは新しい平面ソリトン u_r

$$u_r = 2\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right)^2 \operatorname{sech}^2\left\{\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right)x - \left(\Omega_1 + \frac{\Omega_2}{2}\right)t + \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{2}\right\}, \quad (15)$$

をつくるように相互作用する。そして、(13)を使って u_r に対する分散関係

$$2\Omega_1 + \Omega_2 = (2\alpha_1 + \alpha_2)^3 \quad (16)$$

が成立っていることを証明出来る。また保存則の1つ

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_r dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_1 dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_2 dx = 4\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2}\right), \quad (17)$$

を満足していることを注意しておく。ここで u_1, u_2 は衝突前の γ 周期ソリトンと平面ソリトンである。

次に、 $L=0$ は伝播方向の位相のズレがマイナス無限大、 $P \rightarrow -\infty$ に対応する。これは、2つのソリトンが無限に離れて相互作用することを意味している。これも共鳴相互作用の1種と考えられる。その条件は L の分子を零とみくことによつて得られる

$$\delta/\alpha_1^2 = \alpha_2/\alpha_1 - 1, \quad (18)$$

$$\delta/\alpha_1^2 = -\alpha_2/\alpha_1 + 1, \quad (19)$$

(13), (14) 及び (18), (19) を使って、パラメタ領域を分けることが出来る。図1で (13) と (18) 式の曲線がそれぞれ γ と S で示されている。 $L > 0$ は領域 E_1, E_{21} と E_{22} で満足され、 $L < 0$ は領域 D_1 と D_2 で満足されている。曲線 γ は $|L|=1$, すなわち $P=0$, に対応する。 D_1 と E_1 で $|L| > 1$, D_2, E_{21} と E_{22} で

$|L| < 1$ であることを注意しておく。

図2は共鳴条件を満足する曲線 γ に近いパラメータ点 (P) のソリトン間の相互作用のスナップショットを示す。(丁度 γ 上の値をとると係数 L が無限大になるので、これを避けるため γ に近い値を選んだ。) 相互作用は予想通り中間状態の平面ソリトンが形成され比較的長くその状態が続く。 y 周期ソリトンが平面ソリトンに衝突したとき、 y 周期ソリトンはあたかも平面ソリトンにのみこまれるように減衰して(図2(c)-(e)), 1つの平面ソリトンが形成される(図2(f))。図に示されていないが十分長い時間の後、この中間状態の平面ソリトンは2つのソリトンに分かれる。これは厳密な共鳴条件(13)を満足していないためである。パラメータ点を γ に近くとればとるほど、この中間状態はながくなる。この意味において(13) (と(14)) は共鳴条件である。一方、 $L \rightarrow 0$ ($P \rightarrow -\infty$) の条件を満足する曲線 S の近くにパラメータ点 (P') をとるとき、図3にみるように遠距離相互作用を示す。衝突の間、2つのソリトンは十分離れていることを注意しておく。 S に近いパラメータをとればとるほど、ますます離れた位置で相互作用が始まる。

§3. y 周期ソリトンと代数ソリトン間の共鳴

γ 周期ソリトンと代数ソリトン間の相互作用を記述する解は次式で与えられる

$$\begin{aligned} f = v_1 v_2 \left[\left\{ \frac{1}{4L^2} + |\zeta|^2 \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha^2} \exp(\zeta) \cos(\eta) \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{\alpha^2} \exp(\zeta) \left\{ M_1 M_2 \cos(\eta + \phi_1 - \phi_2) + M_1 (\zeta_r \cos(\eta + \phi_1) \right. \right. \\ \left. \left. + \zeta_i \sin(\eta + \phi_1)) + M_2 (\zeta_r \cos(\eta - \phi_2) - \zeta_i \sin(\eta - \phi_2)) \right\} \right. \\ \left. + \frac{K}{4\alpha^4} \exp(2\zeta) \left\{ \frac{1}{4L^2} + |\zeta + M_1 + M_2|^2 \right\} \right] + O(v^3), \end{aligned} \quad (20)$$

ここで

$$\begin{aligned} K = \frac{\delta^2}{\delta^2 - \alpha^4}, \quad M_1 = \frac{4\alpha}{(2L + \frac{\delta}{\alpha})^2 - \alpha^2}, \quad M_2 = \frac{4\alpha}{(2L - \frac{\delta}{\alpha})^2 - \alpha^2}, \\ \zeta = \alpha x - \Omega t + \sigma, \quad \eta = \delta y + \theta, \quad \zeta = x - 2iLy - 12L^2 t, \\ \Omega = \alpha^3 - \frac{3\delta^2}{\alpha}, \end{aligned} \quad (21)$$

γ 周期ソリトンと平面ソリトンの相互作用と同じ議論により γ 周期ソリトンは衝突による位相のズレをうけず、代数ソリトンは伝播方向に $(M_1 + M_2)$ の値によって決まる位相のズレをうける。 α, δ, L を正と仮定するとき、 $(M_1 + M_2) \rightarrow \pm\infty$ の条件は M_2 の分母を零とおくことによって与えられる

$$\delta/\alpha^2 = 2L/\alpha + 1, \quad \delta/\alpha^2 = 2L/\alpha - 1. \quad (22a, b)$$

図4の曲線 γ_1 と γ_2 はそれぞれ (22b) と (22a) に対応する。領域 E_1 と E_2 で $(M_1 + M_2) > 0$, D_1 と D_2 で $(M_1 + M_2) < 0$. 曲線 γ の下の領域では代数ソリトンの方が γ 周期ソリトンより伝播速度が早く、上の領域ではおそい。このことを考慮すると

き, γ_1 と γ_2 に下から近づくパラメタ一点に対応するソリトン間の相互作用は, いわゆる共鳴相互作用で, 上より γ_1 と γ_2 に近づくパラメタ一点は遠距離相互作用になる。

§4. γ 周期ソリトン間の共鳴

γ 周期ソリトン間の相互作用を言述する解は次式で与えられる (Tajiri and Murakami 1989)

$$\begin{aligned}
 f = & 1 + \frac{K}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) + \frac{K_2}{4\alpha_2^4} \exp(2\xi_2) + \frac{K_1 K_2 L_1^2 L_2^2}{16\alpha_1^4 \alpha_2^4} \exp(2(\xi_1 + \xi_2)) \\
 & - \frac{1}{\alpha_1^2} \exp(\xi_1) \left\{ 1 + \frac{K_2 L_1 L_2}{4\alpha_2^4} \exp(2\xi_2) \right\} \cos(\gamma_1) \\
 & - \frac{1}{\alpha_2^2} \exp(\xi_2) \left\{ 1 + \frac{K_1 L_1 L_2}{4\alpha_1^4} \exp(2\xi_1) \right\} \cos(\gamma_2) \\
 & + \frac{1}{2\alpha_1 \alpha_2} \exp(\xi_1 + \xi_2) \{ L_1 \cos(\gamma_1 + \gamma_2) + L_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2) \},
 \end{aligned} \tag{23}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 K_j = \frac{\delta_j^2}{\delta_j^2 - \alpha_j^4}, \quad L_1 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 - \delta_2/\alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 - \delta_2/\alpha_2)^2}, \quad L_2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 + \delta_2/\alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - (\delta_1/\alpha_1 + \delta_2/\alpha_2)^2}, \\
 \xi_j = \alpha_j x - \Omega_j t + \sigma_j, \quad \gamma_j = \delta_j y + \theta_j, \quad \Omega_j = \alpha_j^3 + \frac{3\delta_j^2}{\alpha_j},
 \end{aligned} \tag{24}$$

§2 と同じ議論によつて, 衝突による伝播方向の位相のズレは $(L_1 L_2)$ の大きさで, 横方向のズレは $(L_1 L_2)$ の符号によつて決められることがわかる。 $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ を仮定するとき, $|L_1 L_2| \rightarrow \infty$, すなわち共鳴条件は L_1 と L_2 の分母を零とみくことによつて得られる,

$$\delta_1/\alpha_1 = \delta_2/\alpha_2 \pm (\alpha_1 + \alpha_2), \quad \delta_1/\alpha_1 = -\delta_2/\alpha_2 \pm (\alpha_1 + \alpha_2) \quad (25a, b)$$

条件(25)を満足するとき, 2つのソリトンは1つの新しい
周期ソリトン u_r をつくるように相互作用する (Tajiri and Murakami
1990)

$$u_r = 2\alpha^2 K \frac{[1 - \frac{1}{\sqrt{K}} \cosh(\alpha x - \Omega t + \sigma) \cos(\delta y + \theta)]}{[\sqrt{K} \cosh(\alpha x - \Omega t + \sigma) - \cos(\delta y + \theta)]^2}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \\ K &= \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{(\delta_1 + \delta_2)^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^4}, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2, \\ \Omega &= \Omega_1 + \Omega_2. \end{aligned} \quad (27)$$

$|L_1 L_2| \rightarrow 0$, すなわち, 2つの周期ソリトンが無限に離
れて相互作用する条件は L_1 と L_2 の分子を零とおくことによ
って得られる (Murakami and Tajiri)

$$\delta_1/\alpha_1 = \delta_2/\alpha_2 \pm (\alpha_1 - \alpha_2), \quad \delta_1/\alpha_1 = -\delta_2/\alpha_2 \pm (\alpha_1 - \alpha_2). \quad (28a, b)$$

(25) と (28) 式を使って, パラメタ領域を分けることができ
る。図5は共鳴条件(25a)に近いパラメタをとるソリトン
間の相互作用を示す。衝突は中間状態の周期ソリトンを形
成して(図5(d)), 比較的ながい時間続く。図6は条件(28a)
に近いパラメタをとる周期ソリトン間の遠距離相互作用
の例を示す。追いついてきたソリトンが周期ソリトンを発
射し, 前方のソリトンに衝突させることによって, 相互作用
をしているのがわかる。

§5. まとめ

正の分散をもつ K-P 方程式の平面ソリトンは波面の境みに対して不安定であるため、多次元特有の空間的に局在した構造をもつ、代数ソリトンおよび周期ソリトンが存在する。我々は周期ソリトンと平面ソリトン、周期ソリトンと代数ソリトンおよび周期ソリトン間の相互作用を調べ、それらの間に解の発散と関係のないソリトン共鳴が存在することを示した。共鳴には2種類あり、1つは2つのソリトンが衝突して融合する、いわゆるソリトン共鳴で、他は無限に離れて相互作用する長距離相互作用である。これは2次元波動場のダイナミックスの理解に重要と思われる。

参考文献

- B.B.Kadomtsev and M.I.Petviashvili: Sov. Phys. Dokl. 15 (1970) 539.
 S.V.Manakov, V.E.Zakharov, L.A.Bordag, A.R.Its and V.B.Matveev: Phys. Lett. A63 (1977) 205.
 M.J.Ablowitz and Satsuma: J. Math. Phys. 19 (1978) 2180.
 A.A.Zaitsev: Sov. Phys. Dokl. 28 (1983) 720.
 L.A.Abramyan and Yu.A.Stepanyants: Radiophys. and Quantum Electron 28 (1985) 26.
 M.Tajiri and Y.Murakami: J. Phys. Soc. Jpn. 58 (1989) 3029.
 J.W.Miles: J. Fluid Mech. 79 (1977) 157, 171.
 J.Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. 40 (1976) 286.
 Y.Murakami and M.Tajiri: submitted to Physica D.
 Y.Murakami and M.Tajiri: submitted to Wave Motion.
 M.Tajiri and Y.Murakami: Phys. Lett. 143 (1990) 217.

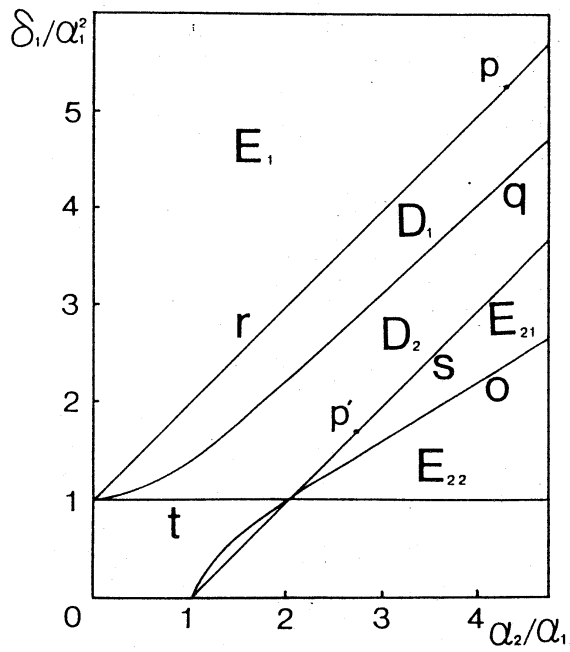


Fig. 1

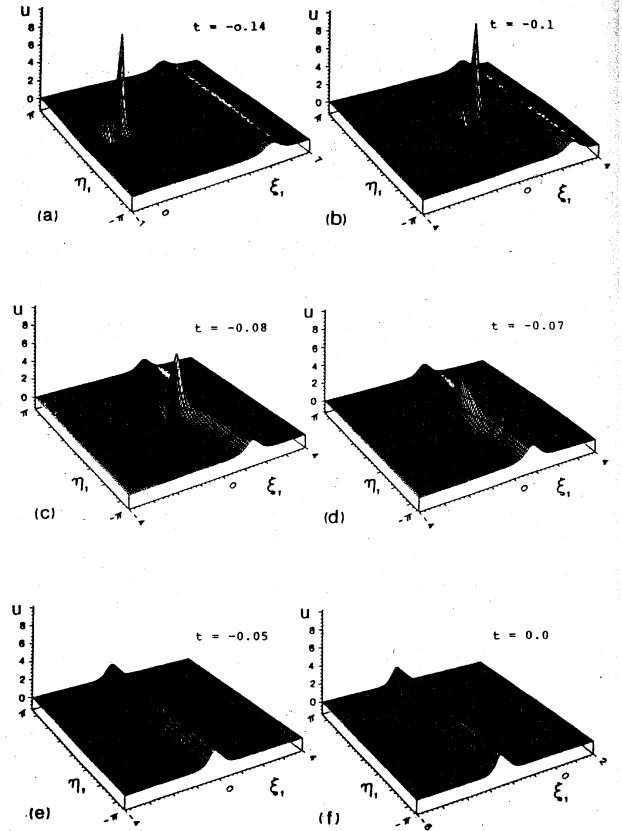


Fig. 2

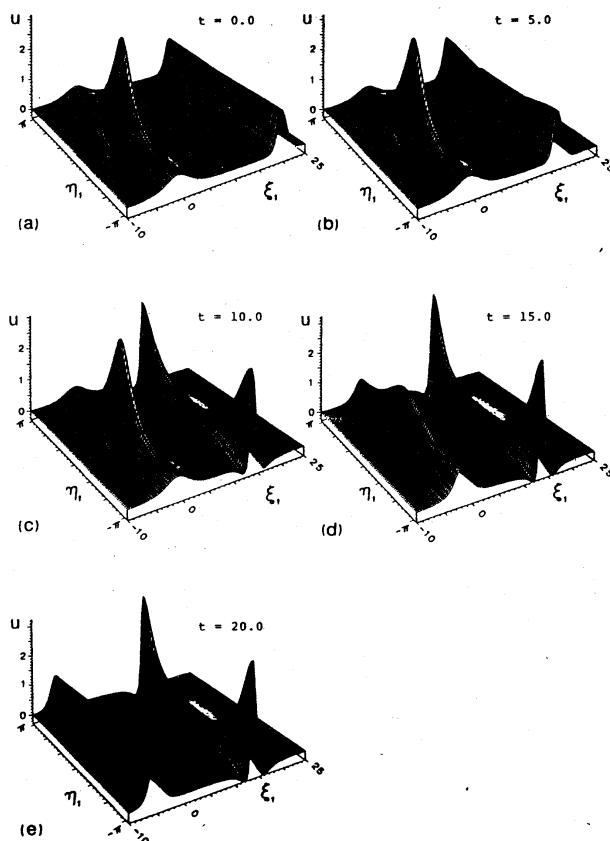


Fig. 3

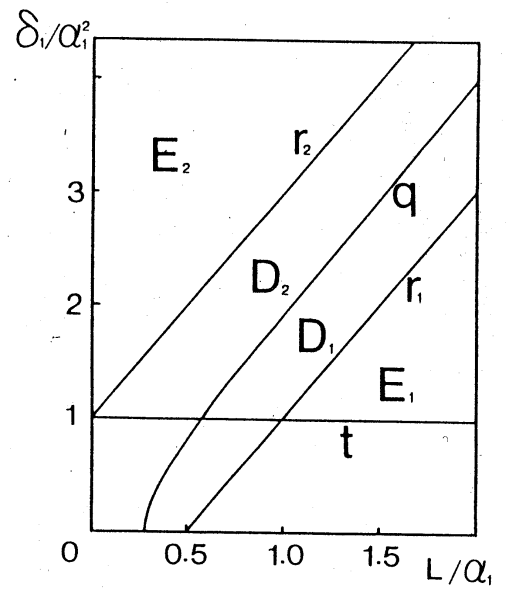


Fig. 4

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (0.5, 0.41)$$

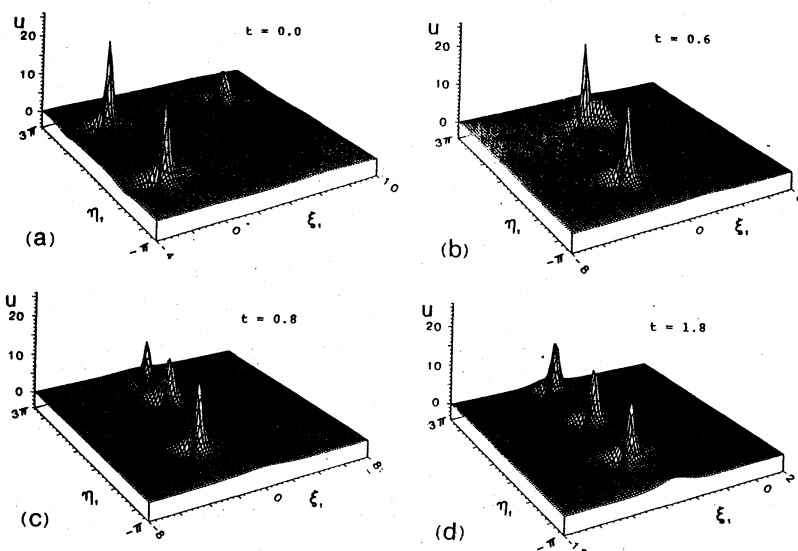


Fig. 5

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (0.6, 0.345)$$

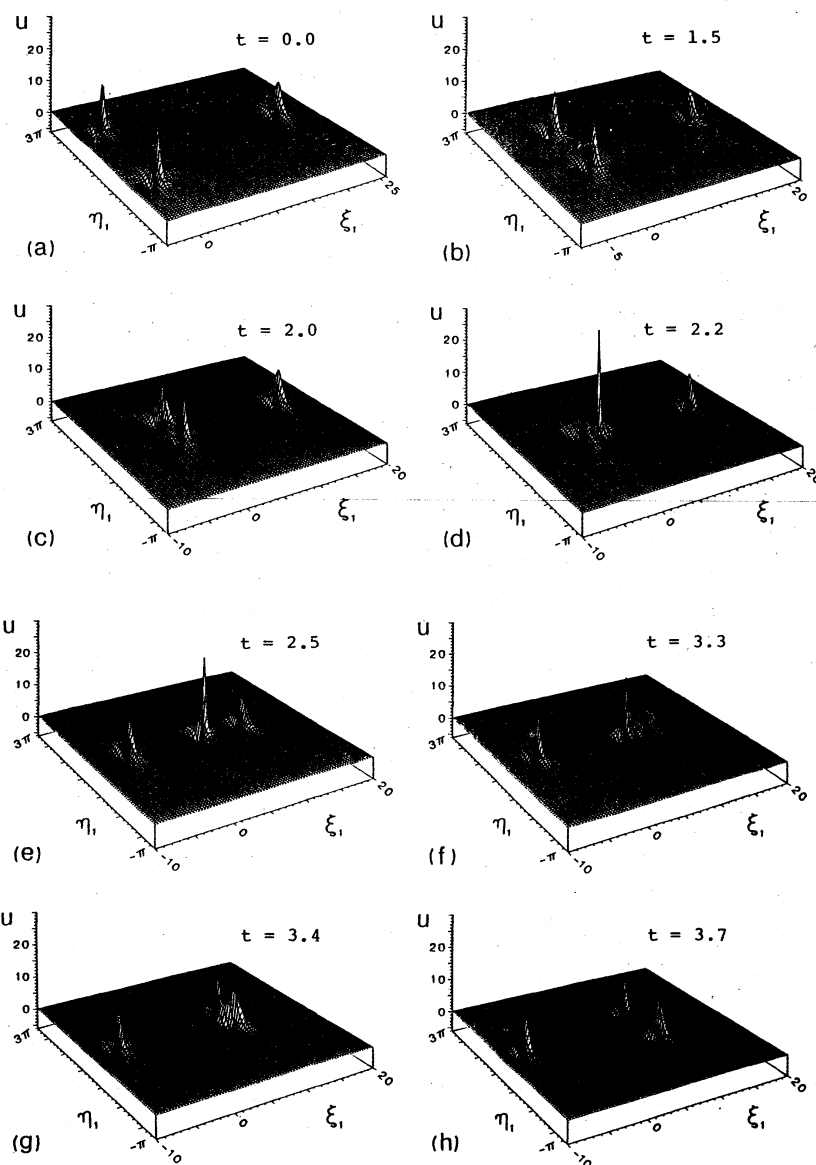


Fig. 6