

例外領域上の theta 関数について

北大 理学部 長岡昇勇

複素 2ℓ 次元空間 $\mathbb{C}^{2\ell}$ 内の例外型 tube 領域 $\mathcal{D}$ 上の保型形式は W.L. Baily, Jr. によって研究された [1]. 彼は, この論文の中で上記の領域 $\mathcal{D}$ に推移的に作用する E_ℓ 型の代数群 G のある算術的部分群 Γ の性質を調べ, Γ に関する Eisenstein 級数の Fourier 展開係数の有理性を証明している.

一方, Jordan 代数に対する theta 関数の一般論は H.L. Resnikoff によって研究がなされている [3]. ここでの目的は, Resnikoff の idea に従って 例外領域 $\mathcal{D}$ 上の theta 関数を定義し, Γ に関する保型形式を実際に構成することにある.

1. 例外領域 $\mathcal{D}$

まず, L_R を実数体 $\mathbb{R}$ 上の Cayley 代数とし, その標準的な basis を $e_0, e_1, \dots, e_\ell$ で表す. non associative な

$\mathbb{Q}$ -多変環 $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}e_0 + \mathbb{Q}e_1 + \cdots + \mathbb{Q}e_7$ 中の integral Cayley 数のなす maximal order を $\mathcal{O}$ で表す. $M_3(\mathcal{L}_{\mathbb{R}})$ を $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ 上の 3×3 行列全体のなす集合とし, $\mathcal{J}_{\mathbb{R}} = \{X \in M_3(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}) \mid {}^t\bar{X} = X\}$ とおく. 明らかに $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{J}_{\mathbb{R}} = 27$. $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$ の元 X, Y に対して, $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$ と積を定義することにより, $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$ は例外型の単純 Jordan 代数となる. $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$ 上には多項式関数 $\det$ が定義されていることに注意しておく.

$\mathcal{A} = \{X \circ X \mid X \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}\}$ とおく. さらに $\mathcal{A}$ の部分集合 $\mathcal{A}^+$ を $\mathcal{A}^+ = \{Y \in \mathcal{A} \mid \det Y \neq 0\}$ と定義する. $\mathcal{A}^+$ は既約な自己双対等質 cone の一例となっている.

$\mathbb{C}^{27}$ を $\mathcal{J}_{\mathbb{C}} = \mathcal{J}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ と同一視し $\mathcal{T}$ をこの中の tube 領域

$$\mathcal{T} = \{Z = X + iY \mid X \in \mathcal{J}_{\mathbb{R}}, Y \in \mathcal{A}^+\},$$

と定義する. $\mathcal{T}$ は non compact 型の Hermite 対称空間で例外領域と呼ばれる.

2. 例外領域 $\mathcal{T}$ 上の theta 関数

まず次の様な記号を導入する.

$$X \in M_{3 \times m}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}), Z \in \mathcal{J}_{\mathbb{C}} \text{ に対して } Z \langle X \rangle = \frac{1}{2} \{ {}^t\bar{X}(ZX) + ({}^t\bar{X}Z)X \}$$

$$X, Y \in M_{n \times m}(\mathcal{L}_{\mathbb{C}}), \mathcal{L}_{\mathbb{C}} = \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \text{ に対して } t_2(X, Y) = \text{trace} \left[\frac{1}{2} ({}^t\bar{Y}X + {}^t\bar{X}Y) \right].$$

$$M_{3 \times m}(\mathcal{L}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}^{24m} \text{ 内の lattice } \mathcal{L} \text{ と } M_m(\mathbb{R}) \subset M_m(\mathcal{L}_{\mathbb{R}})$$

と見たとき, $V \in M_m(\mathbb{R})$ で ${}^tV = V > 0$ (正定値) なる行列 V を考える. そこで, $\mathcal{L}$ と V に付随する, theta 関数を

$$\theta_{\mathcal{L}}(Z; V) = (\text{vol } \mathcal{L})^{\frac{1}{2}} \sum_{M \in \mathcal{L}} \exp[\pi i \text{tr}(Z \langle M \rangle, V)],$$

で定義する.

ここで $Z \in \mathbb{H}$, $\text{vol } \mathcal{L}$ は $\mathcal{L}$ の基本領域の, $M_{3 \times m}(\mathbb{L}_{\mathbb{R}})$ 上の標準的 Haar 測度に関する体積を表す.

主結果の一つは 次の様に述べられる.

定理 2.1 関数 $\theta_{\mathcal{L}}(Z; V)$ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数であり, 次の変換則を満たす.

$$\theta_{\hat{\mathcal{L}}}(-Z^{-1}; V^{-1}) = |-iZ|^{\frac{m}{2} \times 8} |V|^{\frac{3}{2} \times 8} \cdot \theta_{\mathcal{L}}(Z; V),$$

ここで $\hat{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ の dual lattice, Z^{-1} は Z の Jordan 代数としての inverse, $|Z| = \det(Z)$.

関数 $f: M_{3 \times m}(\mathbb{L}_{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(X) = \exp[-\pi \text{tr}(S \langle X \rangle, V)],$$

で定義する. ここで $S \in \mathfrak{d}^+$, V は上で定義したものとする. すると, $f(X)$ の Fourier 変換は

$$\hat{f}(Y) = \int_{M_{3 \times m}(\mathbb{L}_{\mathbb{R}})} \exp[-\pi \text{tr}(S \langle X \rangle, V)] \exp[-2\pi i \text{tr}(X, Y)] dX,$$

ここで dX は $M_{3 \times m}(\mathbb{L}_{\mathbb{R}})$ 上の Haar 測度.

定理 2.1 は、次の命題から証明される。

命題 2.2 S と V を上の様にとる。すると、次式が成立する。

$$\hat{f}(Y) = \exp[-\pi \operatorname{tr}(S^{-1}\langle Y \rangle, V^{-1})] \cdot |S|^{-\frac{m}{2} \times 8} |V|^{-\frac{3}{2} \times 8}.$$

命題 2.3 同様の仮定のもとで、次式を得る。

$$\begin{aligned} & (\operatorname{vol} \mathcal{L}) \sum_{M \in \mathcal{L}} \exp[-\pi \operatorname{tr}(S \langle M \rangle, V)] \\ &= |S|^{-\frac{m}{2} \times 8} |V|^{-\frac{3}{2} \times 8} \sum_{N \in \mathcal{L}} \exp[-\pi \operatorname{tr}(S^{-1} \langle N \rangle, V^{-1})] \end{aligned}$$

命題 2.3 は、Poisson 和公式を命題 2.2 に適用して得られる。

また、その式は、定理 2.1 の式が、純虚なる $Z \in \mathbb{H}$ 全体に対して成立することを主張しているから、解析関数の性質から定理 2.1 が証明されるわけである。

注意。 $m \leq 3$ なる条件のときは、定理 2.1 は $V \in \mathcal{H}^+$ としても成立する。

3. theta関数と保型形式

lattice $\mathcal{L}$ を、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}_m = M_{3 \times m}(\mathcal{O})$ 、 $\mathcal{O}$ は integral Cayley 数のなす環、と置いて、以下の議論において固定して考える。

次の補題が成立する。

補題 3.1 (1) $\hat{\mathcal{L}}_m = 2 \mathcal{L}_m$.

$$(2) \text{vol } \mathcal{L}_m = (1/2^4)^{3m}.$$

$$(3) \theta_{\hat{\mathcal{L}}_m}(Z; V) = (\text{vol } \mathcal{L}_m)^{-1} \theta_{\mathcal{L}_m}(Z; 4V).$$

前節の定理 2.1 と上の補題 3.1 を組合わせて

$$\begin{aligned} \theta_{\mathcal{L}_m}(-Z^{-1}; 4V^{-1}) &= (\text{vol } \mathcal{L}_m) \theta_{\hat{\mathcal{L}}_m}(-Z^{-1}; V^{-1}) \\ &= (\text{vol } \mathcal{L}_m) |-iZ|^{\frac{m}{2} \times 8} |V|^{\frac{3}{2} \times 8} \theta_{\mathcal{L}_m}(Z; V) \end{aligned}$$

を得る. ここで $V = 2E^{(m)}$, $E^{(m)}$: m 次単位行列, と置いてみる. すると, 再び補題 3.1 より

$$(i) (\text{vol } \mathcal{L}_m) \cdot |V|^{\frac{3}{2} \times 8} = 1;$$

$$(ii) 4V^{-1} = V.$$

これより, 最終的に

$$\theta_{\mathcal{L}_m}(-Z^{-1}; 4V^{-1}) = \theta_{\mathcal{L}_m}(-Z^{-1}; V) = |Z|^{4m} \theta_{\mathcal{L}_m}(Z; V).$$

定理 3.2 $\theta_{\mathcal{L}_m}(Z; 2E^{(m)}) = \theta_m(Z)$ と置く. すると

$$(1) \theta_m(-Z^{-1}) = |Z|^{4m} \theta_m(Z)$$

$$(2) \theta_m(Z+B) = \theta_m(Z) \text{ for any } B \in \mathcal{J}_Q = \{X \in M_3(\mathbb{Q}) \mid {}^t X = X\}.$$

(2)の結果は定義にもとって $\exp[\pi i \text{tr}(B \langle N \rangle, V)] = 1$ を

確かめればよい

4. 例外モジュラー群 Γ

前記の例外領域 $\mathcal{V}$ の解析的自己同型群は, Freudenthal によって記述された [2].

$$W = X \oplus \Xi \oplus X' \oplus \Xi'$$

X と X' は $\mathcal{J}_{\mathbb{R}}$ と同型なる $\mathbb{R}$ -vector 空間, Ξ と Ξ' は一次元 $\mathbb{R}$ -vector 空間, とする

E_7 型の代数群 $\mathcal{G}$ は, W のある quartic form Q と, skew-symmetric bilinear form $\{, \}$ を不変にする $GL(W)$ の元となる群として定義される. (詳細は, [1] 参照). すると, $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ は例外群 E_7 の real form $E_{7(-25)}$ である. さらに, $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{V}$ 上に推移的に作用し, $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ をその center $\{\pm \text{id.}\}$ で割ったものは, $\mathcal{V}$ の解析的自己同型群 $\text{Hol}(\mathcal{V})$ に同型である.

$$\mathcal{G}_{\mathbb{R}} / \{\pm \text{id.}\} \cong \text{Hol}(\mathcal{V}).$$

W の lattice $W_{\mathbb{Z}}$ を次の様に定義する

$$W_{\mathbb{Z}} = X_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}e \oplus X'_{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}e',$$

$$X_{\mathbb{Z}} = X'_{\mathbb{Z}} = \mathcal{J}_{\mathbb{Z}}, \quad e = (0, 1, 0, 0) \quad e' = (0, 0, 0, 1).$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^-$$

$$\Gamma = \{ g \in \mathcal{G} \mid g W_{\mathbb{Z}} = W_{\mathbb{Z}} \}$$

とおく.

Γ は例外モジュラー群と呼ばれ, その性質は Bailey によって詳しく調べられている.

定理 4.1 (Bailey) i) 群 Γ は, その部分群 $P_B^+ = \{P_B' \in \mathcal{G} \mid B \in \mathcal{J}_0\}$ と $\mathcal{Z} \in \mathcal{G}$ によって生成される.

ただし P_B' と $\mathcal{Z}$ は, $\mathcal{F}$ の元 Z に, $Z \cdot P_B' = Z + B$ (translation), $Z \cdot \mathcal{Z} = -Z^{-1}$ (Z^{-1} は Jordan algebra inverse), と作用する.

ii) 群 Γ は $\mathcal{G}$ の maximal discrete な部分群である.

$g \in \mathcal{G}$ と $Z \in \mathcal{F}$ に対して, $J(Z, g)$ を変換 g の Z における函数行列式とする. $J(Z, P_B') = 1$, $J(Z, \mathcal{Z}) = \det(Z)^{-18} = |Z|^{-18}$ が確かめられる. そこで 偶整数 $m > 0$ について

$j(Z, g)^{18m} = J(Z, g)$ を満たす保型因子 $j(Z, g)$ を固定する. 例外領域 $\mathcal{F}$ 上の正則関数 $f(Z)$ が Γ に関する重さ l の保型形式であるとは,

$$\text{偶整数 } l > 0 \text{ について } f(Z \cdot \gamma) j(Z, \gamma)^l = f(Z),$$

$$Z \in \mathcal{F}, \quad \gamma \in \Gamma,$$

を満たしているときを言う.

これだけの準備のもとに 定理 3.2 は次の様に言い換えられる.

定理 3.2 の系 $\theta_{L_m}(Z; 2E^{(m)}) = \theta_m(Z)$ は Γ に関する
重 $\frac{1}{2}$ が, $4m$ の保型形式である.

注意, $\theta_m(Z)$ の Fourier 展開の公式も 最近得られた. これ
を使うと, 例外領域 $\mathbb{H}$ 上の singular modular form の例が
得られる.

文献

- [1] W.L. Baily, Jr., An exceptional arithmetic group
and its Eisenstein series, Ann. Math., 91 (1970).
- [2] H. Freudenthal, Beziehungen der E_7 und E_8 zur
Oktavenebene I, Proc. Koninkl. ned. Akad. Wet.,
Series A, 57 (1954).
- [3] H.L. Resnikoff, Theta functions for Jordan
algebras, Invent. Math., 31 (1975).
- [4] ———, Automorphic forms of singular
weight are singular forms, Math. Ann.,
215 (1975).