

DE変換公式の最適性について

筑波大 電子情報 杉原 正顕 (Masaaki Sugihara)

§1. はじめに

1974年, DE変換公式がある種の最適性をもつ変数変換型の数値積分公式として数値解析の分野に登場してからすでに10年をこえる歳月を経た。その間に, この公式は多くの数値積分問題に応用され, その有効性が実証されるとともに, その限界もまた明らかとなった。その結果, DE変換公式の導出にあたっての最適性に関する議論を精査化する必要性のあることが明らかとなった。一方, 近年, 数値積分公式の研究が大きく進み ([3]), 関数空間上の数値積分公式 (特に最適積分公式, 即ち, 最小ノルム公式) に関する研究について多くの成果が得られた。本研究では, これらの研究結果をふまえて, DE変換公式の最適性について考察を加える。

まず, §2 において, DE変換公式の最適性を導くにあたっての議論を取りあげ, その精査化の必要性を指摘する。

§3 では、関数空間上の数値積分公式(最適積分公式等)の研究として典型的、かつ、DE変換公式の最適性と関連する H^p 空間上の数値積分公式に関する Stenger 等によ、て得られた結果を紹介し、§4 で行なう DE変換公式の最適性に関する考察への橋渡しとなる考察を行なう。§4 においては、ある関数空間を導入し、DE変換公式の最適性を導くにあたり、この議論を精密化する。§5 では、今後の課題について記す。

§2. "DE変換公式の最適性"に関する高橋・森による議論とその問題点

ここでは、"DE変換公式の最適性"に関する議論と文献 [10], [11] に従って再生し、その議論の問題点を指摘する。

まず、[10], [11] では、次の"無限区間 $(-\infty, \infty)$ における解析関数の積分に対する台形則の最適性"を導く。

"無限区間で積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ を数値積分公式 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k f(a_k)$ で近似するときの誤差の特性関数を Φ_A とする:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k f(a_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \Phi_A(z) f(z) dz.$$

そして、誤差の特性関数の漸近減衰率 r を

$$r = \lim_{|d| \rightarrow \infty} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R+id}^{R+id} \left\{ -\frac{\partial}{\partial y} \log |\Phi_A(z)| \right\} dz \right)$$

で定義する (この量が, 任意の積分公式に対して, 定義され得るものではないことに注意せよ). さらに, この漸近減衰率 r が最大となる数値積分公式を最適の公式と定義する. この時, 台形則は, 単位長あたり (標本点 (分点) の個数が一定の数値積分公式のうちで最適の公式である."

ここで, 問題となる点は, 台形則の最適性の議論が誤差の特性関数の性質を基にしている点である. 自然には, やはり, 台形則が生成する誤差そのものに關する最適性の議論が行なわれるのが望ましい.

次に [10], [11] では, 以下のように議論をすすめる.

"無限区間 $(-\infty, \infty)$ において, 台形則が最適であることが明らかとなる. たとえば, $(-1, 1)$ 上の積分 $\int_{-1}^1 f(x) dx$ に対しては, 適当な変数変換 $x = \varphi(u)$ を用いて, $(-\infty, \infty)$ 上の積分に変換し, 変換後の被積分関数に対して, 台形則を適用すればよいことがわかる. ただし, 無限和の台形則値 $h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\varphi(k \cdot h)) \varphi'(k \cdot h)$ を求めることは出来ないので, h に關する無限和を適当な $-N_1$ から N_2 までは打ち切る. この時, 数値積分誤差は, 無限区間における台形則の特性関数 $\Phi_{台形則}(z)$ を用いて, 次のように評価できる.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du - \sum_{k=-N_1}^{N_2} h \cdot f(\varphi(k \cdot h)) \cdot \varphi'(k \cdot h) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h \cdot f(\varphi(k \cdot h)) \varphi'(k \cdot h) \right| \\
&\quad + \sum_{\substack{k > N_2 \\ k < -N_1}} h |f(\varphi(k \cdot h)) \cdot \varphi'(k \cdot h)| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi_{\text{台形型}}(z) f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz \right| + \sum_{\substack{k > N_2 \\ k < -N_1}} h |f(\varphi(k \cdot h)) \cdot \varphi'(k \cdot h)| \quad \dots\dots(2.1)
\end{aligned}$$

そこで,

$$\Phi_{\text{台形型}}(z) = \begin{cases} \frac{-2\pi i}{1 - \exp(-\frac{2\pi i}{h} z)} & (\operatorname{Im} z > 0) \\ \frac{2\pi i}{1 - \exp(\frac{2\pi i}{h} z)} & (\operatorname{Im} z < 0), \end{cases}$$

また, 積分路 C は 図1 のようにとる.

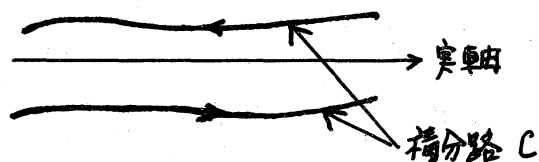


図1. 積分路 C

設差評価 (2.1) の第1項は, $2\pi |\operatorname{Im} z| \gg h$ の時, $|\Phi_{\text{台形型}}(z)| \sim 2\pi \exp(-\frac{2\pi}{h} |\operatorname{Im} z|)$ と評価されることからわかるように, $f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)$ の虚軸方向の増大度によつて決まる ($f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z)$ の虚軸方向の増大度が小さい方が, この項は小さくてよい). また, 第2項は, $f(\varphi(z)) \varphi'(z)$ の実軸方向の減少度によつて決まる ($f(\varphi(z)) \varphi'(z)$ の実軸方向の減少度が大いほど, この項は小さくてよい). ところが, 一般に, 解析関数の絶対値が実軸上

で $z=x \rightarrow \pm\infty$ の時, 急減少であればあるほど, 虚軸方向で $z=iy \rightarrow \pm i\infty$ の時, 増大が急になること, (2.1) の σ_1 項と σ_2 項と同時に小さくなることは出来ず, 両者がバランスするような変換 $x=\varphi(u)$ に対して誤差は最も小さくなる."

そこで, [10], [11] では, 典型的な変数変換の例: $\varphi(u)=\tanh(u^m)$, $\tanh(\frac{\pi}{2} \sinh(u^m))$, ($m=1, 2, \dots$) の場合に, 応用上重要と思われる関数 $(1-x^2)^d f(x)$ ($f(x)$ は, $[-1, 1]$ を含む区間集合上で解析的関数) について, 具体的に (2.1) の評価を行ない, $\varphi(u)=\tanh(\frac{\pi}{2} \sinh(u))$ (= 二重指数関数型変数変換) が最適であると結論づけている。

ここで, 当然, 問題となる点は, 典型的な変数変換, 及び, 被積分関数についての誤差解析をしている点であり, もう少し一般的な状況 (変数変換や被積分関数) において, 二重指数関数型変数変換の最適性という必要がある。

[10] においては, さらに, それまでの考察をもとに, 一般の解析関数の積分に関して, 次の "二重指数関数の原理" をもとにして, 数値積分公式を構成すればよいことが述べられている。

《二重指数関数の原理》

"与えられた積分 $\int_{[a,b]} f(x) dx$ に対して, 区間 $[a, b]$ を $(-\infty, \infty)$ に変換し, かつ, 変数変換後の被積分関数 $f(\varphi(u)) \varphi'(u)$ が

$|u| \rightarrow \infty$ で二重指数関数的に減衰するよう変換 $x = \varphi(u)$ を施し、
変換した積分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$ に対して等間隔 $\pm I$ の
幅の台形則を適用する。”

しかし、この原理は原理にすぎない。実際、 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh x}{x} dx$ に
この原理にしたがって [10] に与えられている変数変換 $x = \sinh$
 $(\frac{\pi}{2} \sinh(u))$ を適用しても、よい数値積分結果は得られない(
[0, 1] 区間では、 $\int_0^1 \sinh(\frac{1}{\sqrt{x}})/\sqrt{x} dx$ ([12]) などは、二重指
数関数型変数変換をしても、ダメである。また、この種の積分に
INT 公式などを適用しても同様である。) 従って、この原理を改
訂する必要がある。

以上、3つの問題点をあげたが、これらの問題点が従来 D
 E 変換公式の最適性の議論にあることを示して、以下、 DE
変換公式の最適性について考察する。なお、従来の議論に
いてあげたような問題点のありことは、 DE 変換公式の発明
(発見?) 者の 1 人である森正武教授御自身よくご存知であり、
実際の問題における DE 変換公式の有効性を見て、 DE 変換
公式の最適性に因りてより精密な議論が可能であることを私
に示唆されたのは、森正武教授御自身である。

§3. H^p 空間における数値積分公式 (最適数値積分公式) の 研究結果について

近年, 数値積分公式の研究の1つとして, 関数空間 (Banach 空間) 上の数値積分公式 (最適数値積分公式等) の研究が, 盛んに行なわれるようになってきた。ここでは, DE 変換公式の最適性に関して §4 で述べるような形で考察に到るに及んで, 端緒となる, H^p 空間における数値積分公式に関する研究結果について記す。

まず, $H^p(\mathbb{D})$ (Hardy 空間 $H^p(\mathbb{D})$: $\mathbb{D}$ (単位円) 内で解析的で, $\lim_{r \rightarrow 1-0} (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta)^{1/p}$ が有界となるような関数族) のノルム $\|f\|_p = \lim_{r \rightarrow 1-0} (\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta)^{1/p}$ で入れた関数空間) における数値積分公式の研究結果を記す。

$\int_{-1}^1 f(x) dx$, $f \in H^p(\mathbb{D})$ に対する数値積分公式 $\sum_{j=1}^N A_j f(a_j)$ について誤差生成作用素 $E_N(a_1, \dots, a_N; A_1, \dots, A_N)$ を

$$E_N(a_1, \dots, a_N; A_1, \dots, A_N)(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx - \sum_{j=1}^N A_j f(a_j)$$

で定義し, その作用素ノルムを

$$\|E_N\| = \sup_{f \in H^p(\mathbb{D})} \left(\frac{|E_N(f)|}{\|f\|_p} \right)$$

とする。この時, 次の成立する ([1], [2])。

$$C_1 \frac{1}{N^{1/p}} \exp(-\pi \sqrt{\frac{N}{p}}) \leq \inf_{a_j, A_j \in \mathbb{R}} \|E_N(a_1, \dots, a_N; A_1, \dots, A_N)\| \leq C_2 \frac{1}{N^{1/p}} \exp(-\pi \sqrt{\frac{N}{p}}), \quad (3.1)$$

ここで, $1 < p \leq +\infty$ であり, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ における定数。

しかし、この評価を達成するよう具体的な数値積分公式はわかっていない。具体的な数値積分公式に対する誤差生成作用素のノルム評価としては、 $\tanh$ -則:

$$h \cdot \sum_{j=-N/2}^{N/2} f(\tanh(\frac{1}{2}j \cdot h)) \cdot \tanh'(\frac{1}{2}j \cdot h) \quad (h = \pi \sqrt{\frac{2g}{N}})$$

に対して

$$\|E_N(\tanh \text{ 則})\| \leq C_2' \exp(-\pi \sqrt{\frac{N}{2g}}) \quad \dots\dots\dots (3.2)$$

なることはわかっている ([9]).

(3.1) や (3.2) の評価は、誤差生成作用素のノルムに関する評価という形をとっているが、数値積分誤差に対する評価として解釈することができ、実際、(3.2) は " $H^p(0)$ に属する任意の関数 f に対して、 $\tanh$ 則を用いた時の数値積分誤差が $M_f \cdot \exp(-\pi \sqrt{\frac{N}{2g}})$ (M_f : f におと定まる定数) でおさえられる" と解釈できる。また、(3.1) の下からの評価は "任意の 0 に収束する正数列 $\{\xi(N)\}_{N=1}^{\infty}$ 、及び、任意の数値積分公式列に対する誤差生成作用素列 $\{E_N\}_{N=1}^{\infty}$ に対して、

$$\sup_N (\|E_N\| \cdot \frac{1}{\xi(N)} \cdot N^{1/8} \cdot \exp(\pi \sqrt{\frac{N}{g}})) = +\infty$$

が成立する" ことと同値であり、ここで、 $H^p(0)$ が Banach 空間であり、誤差生成作用素が有界作用素であることに注意して、同様有界性定理 ([4], [5], [7]) の Baire's category 定理を

用いにくい興味深い証明がある) を用いると,

" 任意の 0 に収束する正数列 $\{\xi(N)\}_{N=1}^{\infty}$, 及び, 任意の数値積分公式列に対する誤差生成作用素列 $\{E_N\}_{N=1}^{\infty}$ に対して, $HP(U)$ に属するある関数 f が存在して

$$\sup_N (|E_N(f)| \cdot \frac{1}{\xi(N)} \cdot N^{\frac{1}{2}} \cdot \exp(\pi \sqrt{\frac{N}{\xi}})) = +\infty$$

が成立する" ことと同値であることがわかる。これは, さらに,

" (ある 0 に収束する正数列 $\{\xi(N)\}_{N=1}^{\infty}$, 及び, ある数値積分公式列が存在して

$HP(U)$ に属する任意の関数 f に対して,

$$|数値積分誤差| \leq M_f \cdot \xi(N) \cdot \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp(-\pi \sqrt{\frac{N}{\xi}})$$

となる,

ことはない." と言いかえることが出来る。つまり, 数値積分誤差 $\leq \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp(-\pi \sqrt{\frac{N}{\xi}})$ をこえて改良することは出来ないのである。

これらの $HP(U)$ 空間上の数値積分誤差生成作用素に関する評価の解釈等に鑑みるとき, ある種の数値積分公式の最適性に関する議論は, 適当な関数空間を設定し, その関数空間上で, 問題の数値積分公式を用いた時の誤差生成作用素のノルムと, 誤差生成作用素のノルムの最小値(これは, 下からの評価)との比較を行なうことによつて, 実行できることがわかる。

また、これらの解釈をもとに、(3.1), (3.2) の評価を見る時、
 $\tanh$ 則が $H^p(U)$ の関数に変数変換 $\varphi(u) = \tanh(\frac{1}{2}u)$ を施し、
 その後、台形則を適用する公式であることを注意すると、 $H^p(U)$
 に属する関数に対しては、“変数変換 $\varphi(u) = \tanh(\frac{1}{2}u)$ + 台形則”
 が (見方にもよるか) はほぼ最適であると考えることができろ。
 そこで、自然に、 $H^p(U)$ 空間上で “二重指数関数型変数変換
 $\varphi(u) = \tanh(\frac{\pi}{2} \sinh(u))$ + 台形則 = DE変換公式” を考えるこ
 とを思いつく。しかし、 $H^p(U)$ 空間上での数値積分誤差の下
 限 $\frac{1}{N^{1/8}} \exp(-\pi \sqrt{\frac{N}{8}})$ と DE変換公式によつて得られる誤差の
 評価 $\exp(-c N / \log N)$ とは、相容れぬ。従つて、§2で述べた
 ような DE変換公式に関する高橋・森の議論を精密化するに
 めには、別の関数空間を考える必要がある。

ところが、F. Stenger は [9] の中で次のことを注意して
 いる

“まず、 U (単位円) に $\varphi(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ で写像 (等角写像) して
 得る領域 $D = \{w \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} w| < \pi/2\}$ 上で” 解析的で、かつ、

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi(C_r)} \left| \frac{g(w)}{\frac{d}{dw} \varphi^{-1}(w)} \right|^p \cdot \left| \frac{d}{dw} \varphi^{-1}(w) \right| dw \right)^{1/p} \\ & \quad C_r: \text{半径 } r \text{ の円周} \\ &= \lim_{r \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi(C_r)} |g(w)|^p \cdot |2 \cosh(\frac{1}{2}w)|^{p-1} dw \right)^{1/p} \\ & \quad C_r: \text{半径 } r \text{ の円周} \end{aligned}$$

が有界となるような関数族 K , この積分値でノルムを導入した関数空間 (これを $H^p(D)$ と書く) を考える. この時, $H^p(D)$ 上の関数 $g(y)$ の積分 $\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy$ に代わる数値積分公式 $\sum_{j=1}^N B_j g(b_j)$ の誤差生成作用素 $\tilde{E}_N(b_1, \dots, b_N; B_1, \dots, B_N)$ ($\tilde{E}_N(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy - \sum_{j=1}^N B_j g(b_j)$) の作用素ノルムと, $H^p(D)$ 上の数値積分誤差生成作用素 E_N の作用素ノルムとを

$$\|E_N(a_1, \dots, a_N; A_1, \dots, A_N)\| = \|\tilde{E}_N(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_N); \frac{A_1}{\frac{d\varphi}{dy}(\varphi(a_1))}, \dots, \frac{A_N}{\frac{d\varphi}{dy}(\varphi(a_N))})\|$$

なる関係がある (といふよりは, こういう関数 K により $H^p(D)$ 上のノルムを定めた). 従つて, $H^p(D)$ 上の誤差生成作用素のノルムに関する評価 (3.1) から,

$$C_1 \frac{1}{N^{1/2}} \exp(-\pi \sqrt{\frac{N}{2}}) \leq \inf_{b_j, B_j \in \mathbb{R}} \|\tilde{E}_N(b_1, \dots, b_N; B_1, \dots, B_N)\| \leq C_2 \frac{1}{N^{1/2}} \exp(-\pi \sqrt{\frac{N}{2}}) \quad \dots\dots\dots (3.3)$$

が成立し, また, $\|E_N(\tanh \text{則})\| = \|\tilde{E}_N(\text{台形則})\|$ となるから,

$$\|\tilde{E}_N(\text{台形則})\| \leq C_2' \exp(-\pi \sqrt{\frac{N}{2}}) \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

が成立する."

この注意に述べられている結果を見ると, $H^p(D)$ という空間は, 大雑把にいつて, D において $|w| \rightarrow \infty$ となるとき $O(|\cosh^2(\frac{1}{2}w)|^{1/p})$ で減衰している (exponential に減衰しているといふ方がよいかもしれない) 関数の族であり, といふ関数族に対して, 台形則がかなりよい公式であることがわかる. このことから,

自然に, D において $|w| \rightarrow \infty$ とするとき, double exponential に減衰する関数族を設定することが思いうかぶ。§4 では, このような考えに基づいて, D において double exponential に減衰する関数族の成る空間を導入し, 数値積分公式を研究する。

§4. DE 変換公式の最適性に関する高橋・森の議論の精査化

§3 で述べた考えに従って, D で double exponential に減衰する関数族の成る空間を設定する。まず, 次の記号を導入する。

$$D(d) \triangleq \{ z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2} d \},$$

$$\mathcal{A}(D(d)) \equiv \{ D(d) \text{ 上の解析関数} \}.$$

そして, $H_{\text{double}}(D(d); A, B)$ ($B < 1/d$) を, $f \in \mathcal{A}(D(d))$ であって, $\sup_{z \in D(d)} \{ |f(z)| \cdot \exp(A \cosh(Bz)) \}$ が有界であるような関数族にノルム $\|f\|_{\text{double}}$ を $\sup_{z \in D(d)} \{ |f(z)| \cdot \exp(A \cosh(Bz)) \}$ で与えた関数空間とする。ここで, $B < 1/d$ は制約は, $H_{\text{double}}(D(d); A, B)$ が Banach 空間となるための条件 ($D(d)$ 上で $|\exp(A \cosh(Bz))|$ が $e^{-\infty}$ になることはないこと) からつく制約である。

D で double exponential に減衰する関数の空間 $H_{\text{double}}(D(d); A, B)$ 上の数値積分公式を研究するにあたり, 研究の指針と

なる D で exponential に減衰する関数の空間, $H_{\text{single}}(D(d); A)$ ($A \neq \emptyset$): $f \in \mathcal{A}(D(d))$ であって, $\sup_{z \in D(d)} \{ |f(z)| \cosh(Bz) \}$ が有限であるような関数族にノルム $\|f\|_{\text{angle}} \equiv \sup_{z \in D(d)} \{ |f(z)| \cosh(Bz) \}$ で与えられた関数空間, についての結果も記す. $H_{\text{single}}(D(d); A)$ における数値積分公式を研究することは, 先に述べた $H^{\infty}(D)$ における数値積分公式の研究とはほとんど同じであり, すでに結果が得られているとも言えるが, 前記の $H^p(D)$ に関する結果は, $H^p(U)$ の結果を変換して得られるものであり, H_{double} 上の数値積分公式の研究を行なうにあたっては役に立たない. ここで, より直接的に, H_{single} に関する結果を導く. なお, その結果, $H^p(U)$ で, (3.1) の下からの評価や, (3.2) の評価を導くよりも, $H^p(D)$ で, 直接的に (3.3) の下からの評価や, (3.4) の評価を導く方が容易であることがわかった (以下の結果の証明と [1] と与えられた証明を見較べよ).

4.1. $H_{\text{single}}, H_{\text{double}}$ における数値積分誤差生成作用素のノルムの評価

《I》 $\|E_N(\text{台形則})\|$ の評価

まず, 台形則に対して, 誤差生成作用素のノルム $\|E_N(\text{台形則})\|$ の評価を与える. まず, 評価の基礎となる補題 4.1 をあげる.

補題 4.1 (Stenger [8])

$f(z) \in \mathcal{A}(D(d))$ が次の 2 条件を満足するとする.

$$ii) N_D(f) \triangleq \lim_{c \rightarrow d-0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x + \frac{\pi}{2} \cdot c)| + |f(x - \frac{\pi}{2} \cdot c)| dx \right) < +\infty,$$

$$iii) 0 \leq \forall c < d \text{ に対して } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-c \cdot \frac{\pi}{2}}^{c \cdot \frac{\pi}{2}} |f(x+iy)| dy = 0,$$

この時, $h > 0$ に対して

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(jh) \right| \leq \frac{\exp(-\frac{\pi^2}{h} d)}{1 - \exp(-\frac{\pi^2}{h} d)} \cdot N_D(f)$$

この補題 4.1 を用いて, $H_{\text{single}}, H_{\text{double}}$ における $\|E_N(\text{台形則})\|$ の評価, 次の定理 4.2 を得る.

定理 4.2

i) $H_{\text{single}}(D(d); A)$ において, 台形則 $h \sum_{j=-N}^N f(jh)$ に対して,

$$\|E_N(\text{台形則})\| \leq C \cdot \exp(-\sqrt{\pi^2 d A} \cdot \sqrt{\frac{2N+1}{2}}) \quad \dots (4.1)$$

ii) $H_{\text{double}}(D(d); A, B)$ において, 台形則 $h \sum_{j=-N}^N f(jh)$ に対して

$$\|E_N(\text{台形則})\| \leq C' \cdot \exp(-C'' \frac{N}{\log N}) \quad \dots (4.2)$$

(証明) i): 補題 4.1 から, 台形則の生じる誤差に対して, 次の評価が成り立つ.

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{j=-N}^N f(jh) \right| \leq \frac{\exp(-\frac{\pi^2}{h} d)}{1 - \exp(-\frac{\pi^2}{h} d)} \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|\cosh(A(x + \frac{\pi}{2} d))|} \cdot \|f\|_{\text{single}} + h \sum_{|j| > N} |f(jh)|.$$

ここで、この評価のオ2項は、以下のよう に評価できる。

$$\begin{aligned} h \cdot \sum_{|j|>N} |f(j \cdot h)| &\leq h \sum_{|j|>N} |\cosh(Aj \cdot h)|^{-1} \cdot \|f\|_{\text{single}} \\ &\leq h \sum_{|j|>N} 2 \cdot \exp(-Aj \cdot h) \cdot \|f\|_{\text{single}} \\ &\leq 4 \cdot h \cdot \frac{\exp(-A(N+1)h)}{1 - \exp(-Ah)} \cdot \|f\|_{\text{single}}. \end{aligned}$$

$\frac{\pi^2 d}{h} = A(N+1)h$ とおきよすに $h \in \sqrt{\frac{\pi^2 d}{A} \cdot \frac{1}{(N+1)}}$ とおくと、以上の評価から

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \cdot \sum_{j=-N}^N f(j \cdot h) \right| \leq C \cdot \exp\left(-\sqrt{\pi^2 d A} \cdot \sqrt{\frac{2N+1}{2}}\right) \cdot \|f\|_{\text{single}}$$

を得る。これは、(4.1) の評価を意味する。

(ii): (i) とほとんど同様である。 $h \sum_{|j|>N} |f(j \cdot h)|$ の評価は、次のよう
になる。

$$\begin{aligned} h \cdot \sum_{|j|>N} |f(j \cdot h)| &\leq h \cdot \sum_{|j|>N} |\exp(A \cosh(Bj \cdot h))|^{-1} \cdot \|f\|_{\text{double}} \\ &\leq C \exp(-A \cosh(BNh)) \cdot \|f\|_{\text{double}}. \end{aligned}$$

そこで、 $\frac{\pi^2 d}{h} \doteq A \cosh(BNh)$ とおきよすに $h = \frac{\log N}{N}$ とおくと、

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \cdot \sum_{j=-N}^N f(j \cdot h) \right| \leq C' \cdot \exp\left(-c \frac{N}{\log N}\right) \cdot \|f\|_{\text{double}}$$

が得られる。これは、(4.2) の評価そのものである。 □

$H_{\text{double}}(D(d); A, B)$ における台形則の誤差の order が $\exp(-c \frac{N}{\log N})$ であることは、DE変換公式について得られている誤差

の order が $\exp(-c \frac{N}{\log N})$ であることを受けるとき, H_{double}^m , DE 変換を施した後の被積分関数の N 空間として, 適当であることを意味する.

《II》 $\inf_{q_j, A_j \in \mathbb{R}} \|E_N(a_1, \dots, a_N; A_1, \dots, A_N)\|$ の評価.

次の結果が成立する.

定理 4.3

(i) $H_{\text{single}}(D(d); A)$ において

$$\inf_{q_j, A_j \in \mathbb{R}} \|E_N(a_1, \dots, a_N; A_1, \dots, A_N)\| \geq 2 \sqrt{\frac{\pi^2 d N}{A}} \cdot \exp(-\sqrt{\pi^2 d A} \cdot \sqrt{N}) \quad \dots (4.3)$$

(ii) $H_{\text{double}}(D(d); A, B)$ において

$$\inf_{q_j, A_j \in \mathbb{R}} \|E_N(a_1, \dots, a_N; A_1, \dots, A_N)\| \geq C \exp(-c \frac{N}{\log N}) \quad \dots (4.4)$$

(証明) (i) について.

数値積分公式 (分点 a_j , 重み A_j ($j=1, \dots, N$)) が任意に与えられるとき,

$$f(z) = \prod_{j=1}^N \left(\tanh\left(\frac{1}{2A}(z - a_j)\right) \right)^2 \cdot (\cosh(A(z)))^{-1}$$

なる関数を与える.

まず, $|\operatorname{Im} z| \leq \pi/4$ において $|\tanh(z)| \leq 1$ であることから, $\|f\|_{\text{single}} \leq 1$ が導かれたことに注意する.

$f(z)$ に与えられる数値積分公式を適用した時, 誤差は以下のよう評価される.

$$\int_{-a}^{\infty} f(x) dx - \sum_{j=1}^N A_j f(a_j) = \int_{-a}^{\infty} f(x) dx$$

$$\geq 2R \int_{-R}^R f(x) \cdot \frac{dx}{2R} \quad (\because f(x) \geq 0)$$

$$\geq 2R \cdot \exp\left(\int_{-R}^R \log f(x) \cdot \frac{dx}{2R}\right)$$

$$(\because \text{Jensen の不等式: } f(x) \text{ 上に凸ならば } E[f(x)] \leq f(E(x)))$$

$$= 2R \cdot \exp\left(\frac{1}{2R} \sum_{j=1}^N 2 \int_{-R}^R \log |\tanh(\frac{1}{2d}(x-a_j))| dx - \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log(\cosh Ax) dx\right)$$

$$\geq 2R \cdot \exp\left(\frac{1}{2R} \sum_{j=1}^N 2 \int_{-a}^{\infty} \log |\tanh(\frac{1}{2d}(x-a_j))| dx - \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log(\exp Ax) dx\right)$$

$$(\because \int_{-R}^R \log |\tanh x| dx > \int_{-a}^{\infty} \log |\tanh x| dx, \cosh Ax < \exp Ax)$$

$$= 2R \cdot \exp\left(\frac{1}{2R} \sum_{j=1}^N 2 \int_{-a}^{\infty} \log |\tanh \frac{x}{2d}| dx - \frac{AR}{2}\right)$$

$$= 2R \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 d}{2R} N - \frac{AR}{2}\right).$$

$$\left(\because \int_{-a}^{\infty} \log |\tanh \frac{x}{2d}| dx = 2d \int_{-a}^{\infty} \log |\tanh y| dy = -\frac{d}{2} \pi^2\right)$$

$$\therefore \text{c}, \quad \frac{\pi^2 d}{2R} N = \frac{AR}{2} \text{ とおくと } R = \sqrt{\frac{\pi^2 d N}{A}} \text{ とおくと, 上の評価が}$$

$$\int_{-a}^{\infty} f(x) dx - \sum_{j=1}^N A_j f(a_j) \geq 2 \sqrt{\frac{\pi^2 d N}{A}} \cdot \exp(-\sqrt{\pi^2 d A} \sqrt{N})$$

を得る。これは、先述の $\|f\|_{\infty} \leq 1$ に注意すれば、(4.3) が成立する

ことを意味する。

に ついて.

任意に数値積分公式 (分点 a_j , 重み A_j ($j=1, \dots, N$)) が与えられとき,

$$f(z) = \prod_{j=1}^N \left(\tanh \frac{1}{2a} (z - x_j) \right)^2 \cdot (\exp(A \cosh(Bz)))^{-1}$$

を 考 へ る.

まず, $\|f\|_{\text{double}} \leq 1$ であり, $f(z)$ が 与 え ら れ る 数 値 積 分 公 式 と 適 用 し た 時 の 誤 差 は, (4.4) の 場 合 と 同 様 に 以 下 の (4.5) に 評 価 さ れ る.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \sum_{j=1}^N A_j f(a_j) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &\geq 2R \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 d}{2R} N - \frac{1}{2R} \int_{-R}^R \log(\exp(A \cosh Bx)) dx\right) \\ &\geq 2R \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 d}{2R} N - \frac{1}{2R} \int_{-R}^R A \cosh Bx dx\right) \\ &= 2R \cdot \exp\left(-\frac{\pi^2 d}{2R} N - \frac{A}{RB} \cdot \sinh BR\right). \end{aligned}$$

こ こ で, $R = \log N$ と 仮 定 し

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \sum_{j=1}^N A_j f(a_j) \geq C \exp\left(-c \frac{N}{\log N}\right)$$

と な り, (4.4) の 評 価 が 得 ら れ る. □

以 上 の 結 果 (定 理 4.2, 定 理 4.3) か ら, H_{single} , H_{double} に お い て 台 形 則 が け っ こ う 最 適 に 近 い 数 値 積 分 公 式 で あ る こ と が わ か る.

こ の 結 果 は, あ る 意 味 で, §2 で 述 べ た "無 限 区 間 $(-\infty, \infty)$ に お

ける解析関数の積分に対する台形則の最適性"に対応する結果と見ることが出来る。

4.2. H_{triple} 空間 等は存在するか?

定理4.2や定理4.3では、 $D(d)$ 内で $|z| \rightarrow \infty$ となる時、single exponential, 又は, double exponential に減衰する関数族について考えて来た。それでは、 $D(d)$ 内でもっとはやく減衰する関数族を考えたほうが、どのようなことになるのか? 例えは、 $D(d)$ 内で $|z| \rightarrow \infty$ となる時、triple exponential に減衰する関数族はないかと考えると、この空間においては、定理4.2の証明からわかるように、 $\|E_N(\text{台形則})\|$ が $O(\exp(-\frac{1}{\log \log N}))$ となることなどが期待される。ところが、次の定理が証明でき、 $D(d)$ 内で、triple exponential に減衰する関数はない $f(z) \equiv 0$ 以外にないことがわかる。

定理 4.4

$f(z)$ が次の3つの条件:

i) $f(z)$ は、 $D(d)$ で正則で、 $\overline{D(d)}$ で連続。

ii) $f(z)$ は、 $\overline{D(d)}$ で有界: $|f(z)| \leq M$ 。

iii) ある正数 ε に対して、 $f(x) = O(\exp(-A \exp(\frac{1+\varepsilon}{d}|x|)))$ が実軸上で成立する。

を満足するならば、 $f(z) \equiv 0$ 。

定理4.4の証明にあたっては、次の Phragmén - Lindelöf の補題を使用するために、 $D(d)$ 上の関数 $f(z)$ を、 $f(d \log w) \equiv$

$g(w)$ を変数変換して, $P = \{w \in \mathbb{C} \mid |\arg w| < \pi/2\}$ の関数に変換して考える.

Phragmén-Lindelöf の補題 ^[13]

角領域 $\Delta \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z - \theta_0| < \pi/2\alpha\}$ を考える.

$f(z)$ は, 次の条件を満足するとする.

(i) $f(z)$ は Δ で正則, $\overline{\Delta} - \{0\}$ で連続.

(ii) ある $\delta > 0$ に対して, Δ に属する任意の z に対して

$$|f(z)| \leq M \exp(|z|^{\alpha-\delta}).$$

(iii) 任意の正数 r に対して, $|f(re^{i(\pi/2\alpha + \theta_0)})| \leq M$.

この時, Δ に含まれる任意の z に対して $|f(z)| \leq M$ が成り立つ.

$g(w)$ に関して, 定理 4.4 を書きかえると次のようになる.

定理 4.4'

$g(w)$ が次の 3 つの条件:

(i) $g(w)$ は, P で正則で, $\overline{P} - \{0\}$ で連続.

(ii) $g(w)$ は, $\overline{P} - \{0\}$ で有界: $|g(w)| \leq M$.

(iii) ある正数 ε に対して, $g(r) = O(\exp(-Ar^{1+\varepsilon}))$ が正の実軸上で成立する.

を満足するならば, $g(w) \equiv 0$.

(証明)

$$\rho(w) \equiv \exp\left(A\left(1 + i \frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}\right)w^{1+\varepsilon}\right) \text{ と, } F(w) \equiv \rho(w) \cdot g(w)$$

を考える.

まず, $\Delta = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}\}$ とし, $F(w)$ に Phragmén-Lindelöf の補題を適用する. 条件 (i) は明らかに成立する. したがって, 定理 4.4' の条件 (i) から条件 (ii) も成立する. 条件 (iii) については, 次の評価:

$$|F(re^{i0})| \leq |\exp(A(1+i \frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}})r^{1+\varepsilon})| \cdot |\exp(-Ar^{1+\varepsilon})| \cdot M'' = M'.$$

$$\begin{aligned} |F(re^{i\frac{\pi}{2}})| &\leq |\exp(A(1+i \frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}})r^{1+\varepsilon} \cdot (\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2} + i \sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}))| \cdot M \\ &= M. \end{aligned}$$

が成立することから, 成り立つ. 従って, ある定数 M があって, Δ に含まれる任意の w に対して $|F(w)| \leq M$. つまり,

$$\begin{aligned} |g(w)| &\leq M \cdot |\rho(w)|^{-1} \\ &= M \cdot \exp\left((-A \cos(1+\varepsilon)\theta + A \frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}} \sin(1+\varepsilon)\theta\right) r^{1+\varepsilon} \end{aligned}$$

なる評価が, 任意の $w = re^{i\theta} \in \Delta$ に対して成立する. 同様に $\Delta' = \{w \in \mathbb{C} \mid 0 > \arg w > -\frac{\pi}{2}\}$ についても Phragmén-Lindelöf の補題を用いることによつて, 任意の $w = re^{i\theta} \in \Delta'$ に対して,

$$|g(w)| \leq M' \cdot \exp\left((-A \cos(1+\varepsilon)\theta + A \frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}} |\sin(1+\varepsilon)\theta|)\right) r^{1+\varepsilon}$$

と得ることになる. 今さら, 定理 4.4' の条件 (iii) を考へる

と、この形の $g(w)$ に対する評価式は、 $\mathbb{R}$ 全体で成立するに
とかわかる。

よって $H(w) \equiv \exp(K \cdot w^{1+\varepsilon}) \cdot g(w)$ とすると、

$$|H(w)| \leq M''' \cdot \exp\left(((-A+K) \cos(1+\varepsilon)\theta + A \frac{\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}} |\sin(1+\varepsilon)\theta|) r^{1+\varepsilon}\right)$$

なる評価が成立する。この評価式から、 $\theta_0 = \pm \frac{1}{1+\varepsilon} \tan^{-1}\left(\frac{-A+K}{A} \cdot \frac{\sin(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}{-\cos(1+\varepsilon)\frac{\pi}{2}}\right)$
とすると、 $|\theta_0| < \frac{1}{1+\varepsilon} \cdot \frac{\pi}{2}$ であり、 $|H(re^{i\theta_0})| \leq M'''$ であるこ
とがわかる。ここで、再び、Phragmén-Lindelöf の補題を用い
ると、 $w = re^{i\theta}$ ($|\theta| \leq |\theta_0|$) に対して

$$|g(w)| \leq M'' \exp(-K \cdot r^{1+\varepsilon} \cos(1+\varepsilon)\theta)$$

であることが導かれる。今、 K が十分大ならば、 θ は K の
単調増加関数であり、この評価から、十分大となる K に対
して、任意の実数 x について

$$|g(x)| \leq M'' \cdot \exp(-K \cdot x^{1+\varepsilon})$$

となることがわかる。従って、 $K \rightarrow \infty$ として、任意の実数 x
に対して $g(x) \equiv 0$ となることがわかる。よって、一致の定理か
ら $g(w) \equiv 0$ が $\mathbb{R}$ 全体で成立する □

この定理の結果は、§2 で述べた (p.4~p.5) 解析関数の一
般的性質 “実軸上で $z=x \rightarrow \pm\infty$ の時、急減少であればある
ほど、虚軸方向で $z=iy \rightarrow \pm i\infty$ の時、増大が急になる” の現

われと考えることが出来る。

4.3 DE 変換公式の最適性, および, 二重指数関数の原理 (改訂版)

定理 4.4 の結果から, $\mathcal{A}(D(d))$ 上の $\{0\}$ 以外の関数を含む関数空間としては, double exponential よりはやい減衰を有する関数の空間は考え得ないことがわかる。このことから (大変大雑把な言い方であるが), $\mathcal{A}(D(d))$ 上では H_{double} ぐらいの関数空間を考えるのが限界であることがわかる。従って, 定理 4.2, 4.3, 4.4 の結果が, DE 変換公式の最適性を物語っているといえる (これも, 再び, かなり大雑把な言い方であるが)。より厳密に DE 変換公式の最適性を言うのであれば, $\mathcal{A}(D(d))$ 上に, $D(d)$ 内で $|z| \rightarrow \infty$ となるとその関数の減衰度に応じて関数空間族 $\{H_{w_N}\}_{N \in \mathbb{N}}$ を導入し, $H_{w_N} \neq \{0\}$ なる任意の H_{w_N} 上で $\inf_{a_j, A_j \in \mathbb{R}} \|E_N(a_1, \dots, a_N; A_1, \dots, A_N)\|_{H_{w_N}} \geq C \exp(-\frac{N}{d_0 N})$ が成立することとを証明する必要がある。しかし, 現状では, 再び, このように精密な結果は得られていない (本当に成立するかどうかともわからない...).

§2 で必要性のありことを指摘した《二重指数関数の原理 (改訂版)》については, これを正しく得られたい意見をもてなければ, あつた, 次のようになる。

《二重指数関数の原理 (改訂版)》

"与えられた積分 $\int_{a,b} f(x) dx$ に対し, 区間 $(a, b) \in (-\infty, \infty)$

に変換し、かつ、変換後の被積分関数 $f(\varphi(u))\varphi'(u)$ が H_{double} に入るような変数変換 $x=\varphi(u)$ を施し、変換された積分問題 $\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ に対して、等間隔きざみ幅の台形則を適用する。

ただし、この原理の中で述べられているような適当な変数変換が存在するとは限らないことに注意せよ。そのような場合には、他の手段を用いて数値積分を実行する必要がある。

§5. おわりに

以上の議論によつて、DE変換公式の最適性に関する議論がある程度精密化できたとはいえる。ただし、§4の終りにおいても述べたように、厳密な意味での最適性の証明はまだ得られていない。また、次の一連の問題もある：

- (1) §2 で述べた無限区間における台形則(無限和)の最適性を誤差そのものを用いて評価すること(今回のDE変換公式の議論では、台形則(無限和)の最適性は用いなかったが、理論的には興味ある問題である)。
- (2) $[0, 1]$ から $[0, 1]$ へ変数を変換して台形則を用いるIMT型の数値積分公式とDE変換公式のかかわりを明確にすること(IMT型の数値積分公式の場合、対象となる被積分関数の族が明らかではない、すなわち、それを明確にする必要がある)。

(3) [10], [11] で用いられた "応用上重要な" 積分問題

$\int_{-1}^1 (1-x^2)^d f(x) dx$ ($d > -1$, $f(x)$ は, $[-1, 1]$ を含むある区間集合上解析的な関数) に対して, DE 変換公式を用いると, 数値積分誤差は $O(\exp(-c \frac{N}{\log N}))$ となることがわかったが, これ以上改善の余地があるのかどうかを明らかにすること.

(4). (大問題であるが) これまでに得られた結果を多次元の場合に拡張すること.

今後の研究によって, これらの問題が解決されることを期待したい.

参考文献

- [1] J.E. Andersson: Optimal quadrature of H^p functions, Math. Z., Vol.172(1980), pp.55-62.
- [2] J.E. Andersson and B.D. Bojanov: A note on the optimal quadrature in H^p , Numer. Math., Vol.44(1984), pp.301-308.
- [3] P.J. Davis and P. Rabinowitz: "Methods of Numerical Integration," 2nd-ed., Academic Press(1984).
- [4] F. Hausdorff: Zur Theorie der linearen metrischen Räume, J. Reine Angew. Math., Vol.167(1932), pp.294-311.
- [5] G.G. Lorentz: "Approximation of Functions," Holt, Rinehart and Winston (1966).
- [6] D.J. Newman: "Approximation with Rational Functions," Regional Conference Series in Math., No.41(1979).
- [7] M.J.D. Powell: "Approximation Theory and Method," Cambridge Univ. Press(1981).
- [8] F. Stenger: Integration formulas based on the trapezoidal formula, J. Inst. Math. Appl., Vol.12(1973), pp.103-114.
- [9] F. Stenger: Optimal convergence of minimum norm approximation on H^p , Numer. Math., Vol.29(1978), pp.345-362.
- [10] 森正武: "数値解析と複素関数論," 筑摩書房 (1975).
- [11] 高橋秀俊, 森正武: 変数変換による, 2 得られた積分公式(2), 数理解析研究所講究録, No.172 (1973), pp.88-104.
- [12] 戸田英雄, 小野令美: 数値解析における一つの話題—DE 変換数値積分公式の有効性と発振上での注意—, 日本物理学会誌, Vol.37 (1982), pp.655-663.
- [13] 辻正次: "複素関数論," 桐書店 (1968).