

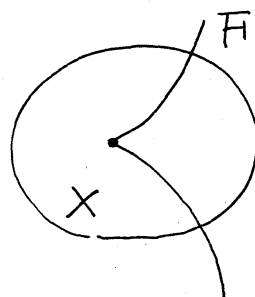
平面曲線に台を持つ holonomic 系の Rosenlicht 型 構造定理について。

新潟大・教養 田島 慎一

(Shinichi TAJIMA)

§1. F は 原点 $(0,0)$ の近傍 $X \subset \mathbb{C}^2$ における
既約平面曲線とし、 $f=0$ をその定義方程式とする。

X 上の正則函数のなす層を $\mathcal{O}_X$
とし、 X 上の正則函数を係数と
する線型偏微分作用素のなす層を
 $\mathcal{D}_X$ とおく。



このとき、 F に台を持つ algebraic local cohomology

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X) &\stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{f^k} \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_X/(f)^k, \mathcal{O}_X) \\ &= \mathcal{O}_X(*F)/\mathcal{O}_X \end{aligned}$$

は自然に $\mathcal{D}_X$ -加群の構造を持ち、holonomic 系

に存在することも知られている [5]。

$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}''$ は $\mathcal{D}_X$ -加群 $\mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X)$ の具体的な構造を初等的に決定することを考える。

例 $\mathbb{F} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x, y) = y^2 - x^3 = 0\}.$

今
$$P = -\frac{1}{27} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{1}{8} \frac{\partial^3}{\partial y^3} y + \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} x - \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial y^2},$$

$$b(s) = (s+1)(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6}) \quad \text{とおけば}$$

$$P f^{s+1} = b(s) f^s \quad \text{が成り立つから}$$

$$P f^{-1} = (b(-2)) f^{-2}, \quad P^2 f^{-1} = b(-2) b(-3) f^{-3}$$

等々を得る。従って $\mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{D}_X$ -加群として、 $u = \frac{1}{f} \pmod{\mathcal{O}_X}$ から生成される。更に

$$\mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X) = \mathcal{D}_X / \mathcal{J}.$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{D}_X f + \mathcal{D}_X (2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 6) + \mathcal{D}_X (2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y})$$

となる。

一般に F の特異点の幾何的構造と $\mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ の $\mathcal{O}_X$ -加群としての構造の関係を知りたいという好奇心が以下の計算の主な動機である。

注意 最近, Doorn-Essen, Smith-Stafford ほか Vigne' の仕事等をふまえて, 特異点を持つ曲線 F 上の $\mathcal{O}_F$ -加群のなす category を森田同型を使って調べている。

F が特異点を持たないときの $\mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ の構造はよく知られているが, 復習しておく。

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2\}, \quad Y = \{(x, y) \in X \mid x = 0\}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{H}_{[Y]}^1(\mathcal{O}_X) \quad \text{とおく。}$$

$\mathcal{M}$ は $u = \frac{1}{x}$ によって $\mathcal{O}_X$ 上生成されており, しかも $xu = 0$ ($x \frac{1}{x}$ は正則関数), $\frac{\partial}{\partial y} u = 0$ をみたすことから

$$\mathcal{M} = \mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X x + \mathcal{O}_X \frac{\partial}{\partial y} = B_Y / X$$

を得るが, 更に次の形の結果がある。

命題 $Y \hookrightarrow X$ が non-singular ならば、次の
なりたつ。

$$(1) \int_{X \leftarrow Y} \mathcal{O}_Y = \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{O}_Y = \mathcal{M},$$

$$(2) \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}, \mathcal{M}) = \mathcal{O}_Y.$$

特に Y 上の最も簡単な $\mathcal{D}_Y$ -加群である $\mathcal{O}_Y$ の積分系
として $\mathcal{H}_{[Y]}^1(\mathcal{O}_X)$ が得られることがわかる。

(2) について、証明の方針を与えておく。

$\operatorname{RHom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}, \mathcal{M})$ は $\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}$ を方程式系と

見做して $\mathcal{M}$ に値を持つ“解”を計算すれば求まる。

そこで

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \xleftarrow{x} \mathcal{M} \leftarrow 0$$

の cohomology をとると

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}, \mathcal{M}) = \operatorname{Ker} x \cong \mathcal{O}_Y \quad \text{がわかる。}$$

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{D}_X}^1(\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}, \mathcal{M}) = \operatorname{Coker} x \quad \text{については}$$

たとえば $\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x} = 1$ より, $-x\frac{\partial}{\partial x} = 1 \in xM$ が M の中でわかる。同様の計算をして $\text{coker } x = 0$ を得る。

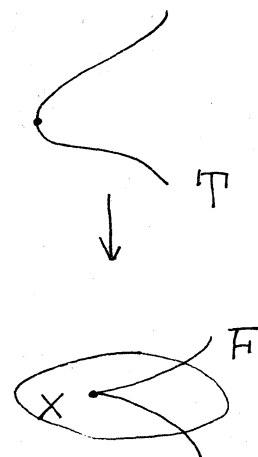
§2. Normalization の導入と予想

F は原点のみに特異点を持つ analytic で既約な plane curve とし, F の normalization を T とおく。

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ P \downarrow & \searrow \pi & \\ F & \longrightarrow & X \end{array} \quad \text{と定める。}$$

$$M = \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X) \text{ とおく。}$$

次のことが予想される。



基本予想 A

$$(1) \int_{\pi} \mathcal{O}_T = \mathcal{I}_{X \leftarrow T} \otimes_{\mathcal{I}_T} \mathcal{O}_T = M$$

$$(2) \text{Hom}_{\mathcal{I}_X}(\mathcal{I}_{X \leftarrow T}, M) = \mathcal{O}_T$$

基本予想 B

(1) M は simple $\mathcal{D}_X$ -加群

(2) M は non-singular part からの minimum 拡張と一致する。

この節の残りを使って、 $\mathcal{D}_X$ -加群 $\mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ を扱うのに、 F の normalization T を導入するのが自然なことを説明する。その為に $F = \{y^2 - x^3 = 0\}$ と例にとり以下を考える。Puiseux 展開 $x = t^2, y = t^3$ をとる。

このとき

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow 2t \frac{\partial}{\partial x} + 3t^2 \frac{\partial}{\partial y} \\ t \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow 2t^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3t^3 \frac{\partial}{\partial y} = 2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} \\ t^2 \frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow 2t^3 \frac{\partial}{\partial x} + 3t^4 \frac{\partial}{\partial y} = 2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

となる。他方、先に計算したように

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X) = \mathcal{D}_X / \mathcal{I} \\ \mathcal{I} = \mathcal{D}_X(y^2 - x^3) + \mathcal{D}_X(2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 6) + \mathcal{D}_X(2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}) \end{cases}$$

がなりたつから、両者を比較すれば、normalization を考え

ること自然と思われる。今 $\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_X / (t)$ とおけば

$$\begin{aligned} p^* \mathcal{O}_F &= \{ p^*(h) \mid h \in \mathcal{O}_F \} \\ &= \{ \sum a_{\alpha\beta} t^{2\alpha} t^{2\beta} \mid \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \in \mathcal{O}_F \} \\ &= \{ \sum c_r t^r \mid c_1 = 0 \} \subset \mathcal{O}_T \end{aligned}$$

となるが、 $t \frac{\partial}{\partial t}$ 及び $t^2 \frac{\partial}{\partial t}$ は $p^* \mathcal{O}_F$ に作用することには注意しよう。

次に $2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 6$ の定数項 6 の意味について考えてみる。もともと方程式系の積分の理論は左加群よりも右加群で考えた方が自然なわけだから、今の場合も“関数”でなく“form”で考えた方が幾何的なこととの関係がはるよりつかめそうである。そこで次の Poincaré residue map を思ったそう。

$$\frac{dx \wedge dy}{f(x, y)} \longrightarrow \left. \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}} \right|_{f=0}$$

今扱っている具体例では

$$\frac{dx \wedge dy}{y^2 - x^3} \longrightarrow \left. \frac{dx}{2y} \right|_{f=0} = \frac{1}{t^2} dt \quad \text{となる。}$$

注意. $\frac{1}{t^2}$ の指数 2 は $f=0$ の Milnor 巻 $\mu = \ell(\mathbb{C}[[X, Y]] / (\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}))$ と一致し, $\delta = \ell(\mathcal{O}_\pi / \mathcal{O}_F)$ とおけば $\mu = 2\delta$ となることはよく知られている。

注意 $\frac{1}{t^2}$ を π に沿って積分してやると

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{t^2} \delta(x-t^2) \delta(y-t^3) dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2} \left\{ x^{-\frac{1}{2}} \delta(x^{\frac{1}{2}}-t) \delta(y-t^3) + \right. \\ & \quad \left. x^{-\frac{1}{2}} \delta(x^{\frac{1}{2}}+t) \delta(y-t^3) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \left\{ \delta(y-x^{\frac{3}{2}}) + \delta(y+x^{\frac{3}{2}}) \right\} \\ &= \delta(y^2-x^3) \quad \text{と得る.} \end{aligned}$$

次の節で, 関数 $\frac{1}{t^2}$ の満たす微分方程式系

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}_T / \mathcal{D}_T(t \frac{\partial}{\partial t} + 2)$$

を考へ.

$$\int_{X \leftarrow Y} \mathcal{N} = \mathcal{D}_{X \leftarrow Y} \otimes \mathcal{N}$$

と $\mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ の関係も調べよう.

§3. 方程式系、の積分系、の計算.

この節では $\int_{\pi} \mathcal{R}$ の計算を実行して、次の結果が
なりたつことを示します.

定理

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \int_{\pi} \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{H}_{[[0,0]]}^2(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

は exact

注意 この結果は dualizing module

$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_X/(f), \mathcal{R}_X^2)$ に対する Rosenlicht の定理
の左 $\mathcal{O}_X$ -加群 版 ともいうべきものになり、いふ。

方程式系 $\mathcal{R}$ の積分の計算を実行するために、
graph による embedding $i: \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P} \times X = \widetilde{X}$
を用意する。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \xrightarrow{i} & \mathbb{P} \times X = \widetilde{X} \\ p \downarrow & \searrow \pi & \downarrow p_X \\ F & \longrightarrow & X \end{array}$$

$$\int_{\pi} m = \int_{Pr} \left\{ \int_i m \right\} \quad \text{がたりたつが、簡単な}$$

計算により

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \int_i m = d\tilde{x} / \tilde{g} \\ \tilde{g} = d\tilde{x} (x-t^2) + d\tilde{x} (y-t^3) + d\tilde{x} (t \frac{\partial}{\partial t} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3t^3 \frac{\partial}{\partial y} + 2) \end{cases}$$

がわかる。

$$\mathbb{R} \int_{\pi} m = \mathbb{R} \int_{Pr} \mathcal{L} = \int_{Pr} \mathcal{L} = \mathcal{L} / \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}$$

とよりから $\mathcal{L} / \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}$ の $d\tilde{x}$ -加群としての構造を計算すればよい。

恒等式

$$\begin{aligned} t \frac{\partial}{\partial t} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3t^3 \frac{\partial}{\partial y} + 2 \\ = \frac{\partial}{\partial t} t + 2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 6 + 2 \frac{\partial}{\partial x} (t^2 - x) + 3 \frac{\partial}{\partial y} (t^3 - y) \end{aligned}$$

より $\text{mod } \tilde{g}$ で

$$\frac{\partial}{\partial t} (-t) \equiv 2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 6 \in \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}$$

を得る。同様に

$$\frac{\partial}{\partial t}(-t^2) \equiv 2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y} \in \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L} \quad \text{等がわかる。}$$

従って, $u = 1 \bmod \tilde{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$ とおける。 $\int_{Pr} u$ は

$$\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X (y^2 - x^3) + \mathcal{D}_X (2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 6) + \mathcal{D}_X (2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y})$$

に対応することがわかる。すなわち $\int_{Pr} (tu)$ は $\mathcal{D}_X$ 上

$\int_{Pr} u$ から生成される $\mathcal{D}_X$ の

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{[Pr]}^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow \int_{Pr} \mathcal{L}$$

は成り立つが、一致しない。そこで $\int_{Pr} (tu)$ のみならず

方程式系を前と同様に計算する必要がある。

$$(\#) \quad \int_{Pr} \mathcal{L} \bmod \mathcal{H}_{[Pr]}^1(\mathcal{O}_X)$$

は $\mathcal{D}_X$ -加群を定める。Leibniz の規則のみを使うことにすると $(\#)$ は

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X (2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + 5) + \mathcal{D}_X (2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}) \\ & + \mathcal{D}_X (y^2 - x^3) \end{aligned}$$

と表すことができる。

更に ideal の計算をしてやれば

$$\mathcal{O}_X / \mathcal{O}_X x + \mathcal{O}_X y = \mathcal{H}_{[(0,0)]}^2(\mathcal{O}_X)$$

と等しくなることが確かめられ子から、結局

$$0 \rightarrow \mathcal{H}_{[\Gamma]}^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow \int_{\pi} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}_{[(0,0)]}^2(\mathcal{O}_X) \rightarrow 0$$

exact

を得る。

注意. 方程式系の言葉ではなく meromorphic differential form の言葉でいいかえてみる。 $\mathcal{M} = \mathcal{O}[\tau^{-1}]$ とおいて、

$m \in \mathcal{M}$ に対して $\int m \in \mathcal{H}_{[\Gamma]}^1(\mathcal{O}_X)$ とする必要十分条件は

$$\int m p^*(h)(t) dt = 0 \quad \forall h \in \mathcal{O}_X$$

となるので、上の結果は dualizing module と Rosenlicht differential の関係に対応する。

注意. Intersection theory に関する Vilsonen の結果と比較せよ。

§ 4. 基本予想との関係.

22. $\mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ が non-trivial な submodule を持たないところから例を以て $\frac{x}{y^2-x^3} \bmod \mathcal{O}_X$ が $\mathcal{O}_X$ 上 $\mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$ に生成されることである。

$$\frac{x}{y^2-x^3} dx \wedge dy \text{ の Poincaré residue は } \frac{x}{2y} dx = dt$$

だから.

$$\int_{\pi} \mathcal{O}_{\pi} = \mathcal{H}_{[F]}^1(\mathcal{O}_X)$$

が成り立つのではたしかに予想である。

実際

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\pi} \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{H}_{[0]}^1(\mathcal{O}_{\pi}) \longrightarrow 0$$

exact

を積分して

$$0 \longrightarrow \int_{\pi} \mathcal{O}_{\pi} \longrightarrow \int_{\pi} \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{H}_{[(0,0)]}^2(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

exact

を得る。

他方

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \int_{\pi} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}_{[\{0,0\}]}^2(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

exact

が既に示してあるから

$$\int_{\pi} \mathcal{O}_{\mathbb{T}} \cong \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X)$$

を得る。

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow \mathbb{T}}, \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X)) \quad \text{に } \gamma \text{ による } \mathbb{Z} \text{ 作用}$$

がある。

$$i(\mathbb{T}) = \{(t, x, y) \in \mathbb{T} \times X \mid x = t^2, y = t^3\} \quad \text{と } \mathcal{M} \subset$$

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow \mathbb{T}} = \mathcal{H}_{[i(\mathbb{T})]}^2(\mathcal{O}_{\mathbb{T}}' \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{T} \times X}) \quad \text{は } \mathcal{D}_X \text{ 上}$$

$$m = \frac{dt}{(x-t^2)(y-t^3)} \quad \text{と } tm = \frac{t dt}{(x-t^2)(y-t^3)}$$

とから生成されることは注意して $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow \mathbb{T}}, \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X))$
を計算してやる (計算は内建 $\mathcal{D}_X$ の $\mathbb{P}^1$ 上の)。

$$\mathcal{O}_{\mathbb{T}} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X \leftarrow \mathbb{T}}, \mathcal{H}_{[\mathbb{F}]}^1(\mathcal{O}_X))$$

を得る。

平面曲線 $f=0$ の Puiseux 展開が簡単な場合には全く同様な方法で—— Leibniz の規則だけで——
 $\mathcal{D}_X$ -加群の計算ができる。

曲面 S に対して algebraic local cohomology
 $R\Gamma_{[S]}(\mathcal{O}_X)$ の $\mathcal{D}_X$ -加群としての構造が具体的に
 に計算できるとおもしろいと思う。

以上.

文献

- [1] J.-L. Brylinski, La classe fondamentale d'une variété algébrique engendre le D-module qui calcule sa cohomologie d'intersection, *Astérisque* 130 (1985), 260-271.
- [2] M.G.M. van Doorn and A.R.P. van Essen, D_n -Modules with support on a curve, preprint.
- [3] A. Grothendieck, Local cohomology, *Lecture Notes in Math.* 41 (1967).
- [4] M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems, *Invent. math.* 38 (1976), 33-53.
- [5] ———, On the holonomic systems of linear differential equations II, *Invent. Math.*, 49 (1978), 121-152.
- [6] K. Kodaira, On compact analytic surfaces I, *Ann. Math.*, 71 (1960), 111-152.

- [7] Lê Dũng Tráng and Z. Mebkhout, Introduction to linear differential systems, Proc. Symposia in Pure Math., 40 (1983), part 2, 31-63.
- [8] M. Lejeune-Jalabert, Le théorème "AF + BG" de Max Noether, Seminaire sur les singularités, Pub. Math. L'univ. Paris VII, (1980), 97-138.
- [9] Z. Mebkhout, Local cohomology of analytic spaces, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 12 Supp. (1977), 247-256.
- [10] S.P. Smith and J.T. Stafford, Differential operators on an affine curve, preprint.
- [11] J.P. Vigué, Opérateurs différentiels sur les espaces analytique, Invent. Math., 20 (1973), 313-336.
- [12] K. Vilonen, Intersection homology D-module on local complete intersections with isolated singularities, Invent. Math., 81 (1985), 107-114.
- [13] T. Yano, Exponents of singularities of plane irreducible curves, Sci. Rep. Saitama Univ., 10,2 (1982), 21-28.