

## (論文内容の要旨)

本論文は、二重対角行列の特異値分解について、十分な並列性能をもつ新しいアルゴリズムを提案し、それを様々な指標と計算機環境で評価実験したものである。

近年、扱うデータ量の増大とともにPCクラスタやマルチコアCPU等の並列計算環境が普及し、特異値分解アルゴリズムには高速性と同時に高い並列性が求められるようになった。従来、QR法が広く用いられているが、高い直交性をもつ特異ベクトルが計算されるものの、QR法による二重対角行列の特異値分解の計算量は行列の次数の3乗のオーダーである。QR法より高速として知られる分割統治法は、問題行列の性質により計算量は2乗から3乗のばらつきがあり、加えて行列の次数の2乗の空間計算量が必要とされる。近年、従来法のもつこれらの欠点を解消したアルゴリズムである2乗の計算量、1乗の空間計算量をもつI-SVD法が提案されているが、特異値計算部の並列化が難しいとされている。

申請者は、本論文において、分割統治法による特異値計算部とI-SVD法におけるツイスト分解による特異ベクトル計算部という高い並列性をもつ2つの部分アルゴリズムを組み合わせた「ダブル分割統治法」(dDC法)を提案している。さらに、その計算量や空間計算量の理論的見積もり、逐次型特異値分解とその並列化実装、特異値がクラスタをなす行列に対する直交性向上のための補助的な計算機能の追加、対称三重対角行列の固有値分解への適用等を行うとともに、いくつかの並列計算機環境における並列計算の速度、精度、並列性能等の評価により、従来法に対するダブル分割統治法の優位性を論じている。

第1章は序章として、研究の背景、目的、論文の構成を述べている。また、論文中で用いる記号や基本的な概念について説明している。

第2章の前半では、提案アルゴリズムの骨格をなす、分割統治法とツイスト分解法に関して述べている。提案アルゴリズムは、まず簡略化された分割統治法により特異値のみを計算する。これは再帰アルゴリズムであるが、計算手順を工夫することで空間計算量が行列の次数の1乗のオーダーに押さえられることを示している。次に、計算された特異値に対応する特異ベクトルをツイスト分解法により計算するというダブル分割統治法の基本アイデアを述べている。

第2章の後半では、簡略化された分割統治法により計算された特異値の計算精度と、ツイスト分解によって計算される特異ベクトルの精度への特異値の精度の影響について議論し、特異ベクトルの直交性が悪化する可能性について議論している。とりわけ、行列の特異値分布にクラスタが存在する場合には、一般に、高い直交性をもつ特異ベクトルの計算が困難になることを示し、これらに対応するため、二重対角行列からGolub-Kahanの三重対角行列を構成し、それに対して修正グラムシュミット法による直交化付き逆反復法を適用することで、計算量は多少増大するものの、ダブル分割統治法の直交性の改善を行っている。また、対称三重対角行列の固有値分解を取り上げ、計算式、空間計算量を抑えるための工夫、行列の正定値化など、特異値分解との違いを明らかにした上で、対称三重対角行列のためのダブル分

割統治法を提案している．さらに，その計算時間を削減するための工夫として，単精度演算と倍精度演算を織り交ぜたアルゴリズムを提案している．

第3章では，提案アルゴリズムの並列化の理論的考察を行っている．まず，通信コストとプロセッサのアイドル時間のそれぞれを考慮した2つの並列化モデルを示し，それらの問題点について論じている．さらに，2つのモデルの特徴を備えた並列化モデルを提案し，MPIによるアルゴリズムを示している．またそれぞれのモデルの通信コストを考慮した総計算コストの見積もりを与えている．

第4章では，まず，提案アルゴリズムによる逐次型特異値分解の実装について，速度，精度の両面からの評価を行っている．速度についてはI-SVD法とともに一般に分割統治法やQR法に比べてかなり高速であるが，分割統治法が得意とするクラスタを含む行列については分割統治法に及ばないことを示している．また，特異値については高い精度が得られるものの，特異値分解の精度については一般に分割統治法やQR法よりやや劣り，I-SVD法と同程度であることを示している．次に，並列型特異値分解についてPCクラスタや京都大学のスーパーコンピュータ，マルチコア型の並列計算機において評価を行い，並列QR法を大きく上回る高速性と高い並列性能が得られることを示している．ただし，大きなクラスタをもつ行列については並列性能が低下する場合があることを示している．対称三重対角行列の固有値分解についても，逐次型ダブル分割統治法を提案し，その評価実験を行って，特異値分解の場合と同様の性能をもつことを確認している．

第5章は結論であり，本論文で得られた成果を要約し，今後の研究の方向として，ツイスト分解法の誤差解析や，より大規模な並列環境における提案アルゴリズムの評価の必要性について言及している．

## (論文審査の結果の要旨)

本論文は、二重対角行列の特異値分解について、十分な並列性能をもつ新しいアルゴリズムを提案し、それらの性質と性能について、理論的考察とともに、様々な指標と計算機環境で評価したものである。

先行研究として、M. Guら(1995)による分割統治法に関する研究と、岩崎ら(2005)によるツイスト分解を用いたI-SVD法の研究がある。申請者の研究は、デフレーションの発生量による分割統治法の実行時間のばらつきと、行列の次数の2乗のオーダーを必要とする空間計算量という分割統治法の欠点、アルゴリズム全体として見た場合のI-SVD法の限定的な並列性を考慮し、これら2つのアルゴリズムの利点を組み合わせることにより「ダブル分割統治法」を提案している。

分割統治法は、全ての特異値と特異ベクトルを同時に計算するのに対し、提案アルゴリズムは簡略化された分割統治法により特異値のみを先に計算する。I-SVD法のツイスト分解をこの特異値を用いて実行することにより、特異ベクトルを計算することができる。これにより、ダブル分割統治法の計算量は、行列の次数の2乗、並列化可能で、空間計算量は行列の次数の1乗となる。本論文では、さらに、特異値がクラスタをなす行列に対する特異ベクトルの直交性向上のため、再直交化のプロセスが必要であることを明らかにし、修正グラムシュミット法による直交化付き逆反復法による改善を行っている。

以上の結果、二重対角行列の特異値分解において、従来法を実装した標準パッケージソフトウェアである米国のLAPACKと比較して、多くのテスト行列についてこれを上回る高速性が確認され、特異値分解の精度の悪化は僅かという評価実験の結果を得ている。また、並列特異値分解では、米国のScaLAPACKの並列QR法を大きく上回る高速性を示している。

申請者は、また、対称三重対角行列に対しても、空間計算量を抑えるための工夫や行列の正定値化など、特異値分解の場合との違いを踏まえて逐次型ダブル分割統治法を提案し、その評価実験を行って、特異値分解の場合と同様の性質と性能をもつことをみている。

申請者の学位申請に係る研究は先行研究から着想を得たものであるが、広く情報処理において重要な特異値分解と固有値分解の両分野に対して適用可能なアルゴリズムのフレームワークを与えているとみることができる。高速で十分な精度を持ち、高効率に並列化可能な特異値分解・固有値分解アルゴリズムに関する研究として、理論的にも応用上も今後のさらなる発展が期待される。

このように本論文は、新しい知見を含むだけでなく、行列の特異値分解、固有値分解とその応用の更なる発展に貢献する研究として高く評価されるものである。

よって、本論文は博士(情報学)の学位論文として価値あるものと認める。

また、平成21年2月23日に実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。