

氏 名	今 西 英 器 いまにし ひで き
学位の種類	理 学 博 士
学位記番号	論 理 博 第 466 号
学位授与の日付	昭 和 49 年 5 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学位論文題目	On the Theorem of Denjoy-Sacksteder for Codimension One Foliations without Holonomy (ホロノミーのない余次元1の葉層に関する Denjoy-Sackstederの 定理について)

(主 査)
論文調査委員 教授 戸 田 宏 教授 島 田 信 夫 教授 永 田 雅 宜

論 文 内 容 の 要 旨

n 次元 (可微分) 多様体 M が $(n-r)$ 次元部分多様体 L_α の和集合であり, 局所的にはユークリッド空間の直積 $R^{n-r} \times R^r$ の構造をもつとき, M は余次元 r の葉層 (foliation) 構造 $F = \{L_\alpha\}$ をもつと云い, 各 L_α を F の葉 (leaf) と云う。局所構造の変換が C^s 一級のとき, F は C^s 一級の葉層構造と云われる。また, これは M 上の微分形式と関係づけて解釈することもできる。とくに, 余次元1の葉層構造は, 積分可能条件 $\omega \wedge d\omega = 0$ をみたす, いたるところ0でない M 上の1-形式 ω の積分多様体のことである。 $\omega(X) \neq 0$ をみたす M 上のベクトル場の生成する1-パラメーター変換群 $\{\rho_t, t \in R^1\}$ をとる。一つの葉 L の上の二点 x, y を結ぶ道 (path) $\ell: [0, 1] \rightarrow L$ を考えると, 十分0に近い ε に対して $\varepsilon = \varepsilon(0)$ をみたす連続関数 $\ell_\varepsilon(t) = \rho_{\varepsilon(t)}(\ell(t))$ は一つの葉の道となるものが存在する。 $x=y$ のとき, ε に $\varepsilon(1)$ を対応させることにより, L の基本群から R の局所微分同相の芽の作る群への準同型が得られる。これは L のホロノミーとよばれ, L に近い葉が L に巻きつく様子を表現するものである。 F の全ての葉 L に対して, ホロノミーが自明であるとき, F をホロノミーのない葉層構造という。

申請者今西英器がこの論文でめざしたものは, コンパクト多様体上のホロノミーのない余次元1の葉層構造に関する, Sacksteder の定理を正確に定式化し, これを輪環面上の流れ (flow) に関する古典的な Denjoy の定理の一般化としてとらえ, その幾何学的な証明を与えることである。定式化された Sacksteder の定理は次のように表現される。

定理1.1. M をコンパクト多様体, F を M 上の余次元1のホロノミーのない C^2 一級の葉層構造とする。このとき M 上の C^0 一級の流れ φ_t が存在して, (i) φ_t は F の葉を F の葉にうつし, (ii) φ_t の軌跡 (orbit) は F の葉に transversal である。

これは更に次のように精密化される。

定理1.2. 定理1.1. の M, F に対して, M 上のいたるところで0でない閉1-形式 ω と M の同相写像 h が存在し, h は F の葉を ω で定義された葉層構造 F_ω の葉に微分同相にうつす。またこのような h は恒等

写像にいくらでも近くとることができる。

申請者の手法によれば、Sacksteder の定理の次の様な一般化を証明できる。

定理1.3. 定理1.1のM, Fにおいて、Fは単に C^1 一級であるとするとき、定理1.1の帰結がなりたつためには、Fが例外的な葉（その閉包がMの中で nowhere dense かつ perfect になる葉）をもたないことが必要十分である。

申請者は、L 中の道 l に対して、前記のような l_ε の存在する ε の上限が有限であれば、自明でないホロノミーをもつ葉の存在すること（定理3.1）を示した。したがって、ホロノミーのないFに対しては、 ρ_t の一つの閉軌道 γ に対して、 $\gamma \in L$ 上の二点を結ぶ道 l より作られる l_ε は γ の微分同相を与える。このような微分同相全体 $G(F)$ は γ の微分同相の作る群 $\text{Diff}(\gamma)$ の free な（単位元以外は不動点をもたない）部分群となる。このようにして、申請者は葉層の問題を古典的な Denjoy の結果と結びつけ、 $\text{Diff}(\gamma)$ の有限生成かつ free な部分群 G が、 γ に C^2 一級で作用するときは $h^{-1}Gh$ が γ の回転群に含まれるような γ の同相写像 h が存在すること、また γ に C^1 一級で作用するときはこのような h の存在は G の軌道が γ で dense ならばなりたつこと（定理2.1）を示した。 $G=G(F)$ のとき、このような h が存在すれば定理1.1の流れ φ_t が ρ_t の速度を調整することによってえられる。

Fが C^2 一級のときは、Novikov の準同型を用いて、 $G(F)$ が有限生成であることが示される。

以上のようにして、定理1.1, 1.3が証明され、さらに Tishler の定理等を用いて定理1.2が証明される。

論文審査の結果の要旨

葉層構造は多様体上の微分方程式の解空間の系または微分形式の積分多様体の系として、古くから知られていたが、その幾何的構造はいまだ十分に説明されているとは云い難い。1764～5年に R. Sacksteder はホロノミーのない余次元1の葉層構造について研究した。この Sacksteder の研究は R^1 に局所微分同相として作用する擬群（pseudo group）の極小集合の研究から導かれるものであるが、その証明には複雑な計算を要し、幾何学的に解り難くかつ定理の定式化も明確さを欠くところがあった。

申請者今西英器は主論文において、Sacksteder の定理の定式化（定理1.1）、その精密化（定理1.2）および C^1 級の場合への一般化（定理1.3）をおこない、これらを輪環面上の流れの研究との類似として把握し、幾何学的な証明を与えた。このため申請者は、コンパクト多様体上のホロノミーのない葉層構造を保つ流れの存在を、円周 γ の微分同相群（ Diff ）の部分群 G に対する $h^{-1}Gh$ が回転群に含まれるような（必ずしも微分同相でない）同相写像 h の存在、という古典的な Denjoy の定理の形のものに帰着させることによって示している。後者の $\text{Diff}(\gamma)$ に関する Denjoy の定理の一般化は、最近の J. Wood の研究結果をも含むものである。

最近の葉層構造の研究は、余次元1の葉層構造の存在性については多くの進展がみられ、申請者の参考論文はその一つの重要な進展でもあるが、葉層構造のもつ性質の研究は、研究手段に乏しくあまり成果はあげられていなかった。申請者の主論文における手法は独創的なもので、定理1.3にみられるように従来の結果を容易に一般化できるものであり、今後この方法による葉層構造の研究の発展に大いに期待される。

ものである。以上のように申請者の研究はこの方面の研究発展に寄与すること多大である。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。