

アメナブル離散量子群

東京大学大学院数理科学研究科 戸松 玲治 (Reiji Tomatsu)
Graduate School of Mathematical Sciences,
University of Tokyo

1. 序

アメナブル離散群の特徴づけとしてよく知られた定理:「離散群がアメナブルであることとその reduced group C^* -環が nuclear であることは同値である。」をアメナブルな離散量子群に対して拡張することを考えた。

まず量子群の定義を復習しよう。以下に続く定義は [K-V] による。

Definition 1.1. 二つ組 (M, Δ) が次の性質を有するとき局所コンパクト量子群とよぶ。:

- (1) M はフォンノイマン環であって写像 $\Delta: M \rightarrow M \otimes M$ は正則単位的な忠実 $*$ 順同型で次の余積律をみたす。

$$(\Delta \otimes \iota)\Delta = (\iota \otimes \Delta)\Delta.$$

- (2) M 上忠実半有限正則荷重 φ (resp. ψ) は左 (resp. 右) 不変である。すなわち次の関係式をみたす。

$$\begin{aligned} \varphi((\omega \otimes \iota)\Delta(x)) &= \omega(1)\varphi(x) \text{ for all } x \in m_\varphi^+, \omega \in M_\varphi^+ \\ \text{(resp. } \psi((\iota \otimes \omega)\Delta(x)) &= \omega(1)\psi(x) \text{ for all } x \in m_\psi^+, \omega \in M_\psi^+). \end{aligned}$$

$\varphi(1) < \infty$ のとき (M, Δ) はコンパクトであるといい、正規化して $\varphi(1) = 1$ としておく。ここで fundamental unitary と呼ばれるユニタリ作用素を導入する。

Definition 1.2. (π, H, Λ) を左不変荷重 φ に付随する M の半巡回表現とする。このときテンソル積ヒルベルト空間上の作用素 W を次で定義する。

$$W^*(\Lambda \otimes \Lambda)(x \otimes y) = (\Lambda \otimes \Lambda)(\Delta(y)(x \otimes 1))$$

W が実際にユニタリになっていることは非自明なことで [K-V] の中で詳しく論じられている。各局所コンパクト量子群 (以下単に量子群と呼ぶ) (M, Δ) に対して双対量子群 $(\hat{M}, \hat{\Delta})$ が定義できる。ここにフォンノイマン環 $\hat{M}$ は $B(H)$ の中で部分空間 $\{(\omega \otimes \iota)(W); \omega \in B(H)_*\}$ の汎弱閉包をとったもの、余積 $\hat{\Delta}$ は $\hat{\Delta}(x) = \hat{W}^*(1 \otimes x)\hat{W}$ として定義される。左、右不変荷重は群フォンノイマン環の Plancherel 荷重の作り方をまねて定義でき、これらが新たに量子群となる。今 (M, Δ) から $(\hat{M}, \hat{\Delta})$ を構成したのと同様の操作を $(\hat{M}, \hat{\Delta})$ に対して行くと、第二双対量子群 $(\hat{\hat{M}}, \hat{\hat{\Delta}})$ が得られる。この量子群は最初の量子群 (M, Δ) と自然に同型である。またさらに先の部分空間のノルム閉包をとったものは C^* -環であり Kustermans と Vaes のいう C^* -環的な量子群の構造を持つ ([K-V])。ここではこの C^* -環を A と記す。同じようにして $(\hat{M}, \hat{\Delta})$ に対応する “ A ” を $\hat{A}$ であらわす。コンパクト量子群の双対を離散量子群とよぶ。

2. アメナビリティと主結果

群の場合と同じようにアメナビリティが定義できる。

Definition 2.1. (M, Δ) が不変状態を有する時に (M, Δ) はアメナブルという。ここに状態 m が左不変とは、等式 $(\omega \otimes m)(\Delta(x)) = \omega(1)m(x)$ がすべての $x \in M$, すべての $\omega \in M_*$ について成立することをいう。

次に二つの条件を導入する。

Definition 2.2. (1) 量子群 (M, Δ) が条件 (W_1) をみたすとは、次のような H の単位ベクトルのネット $\{\xi_j\}_{j \in J}$ が存在するときをいう。任意のベクトル $\eta \in H$ に対して、 $\lim_j \|W(\eta \otimes \xi_j) - \eta \otimes \xi_j\| = 0$ が成り立つ。

(2) 量子群 (M, Δ) が条件 (W_2) をみたすとは、次のような H の単位ベクトルのネット $\{\xi_j\}_{j \in J}$ が存在するときをいう。任意の C^* -環 A の表現 (π, H_π) と任意のベクトル $\eta \in H$ に対して、 $\lim_j \|(\pi \otimes \iota)(W)(\eta \otimes \xi_j) - \eta \otimes \xi_j\| = 0$ が成り立つ。ここに作用素 W が $A \otimes K(H)$ の multiplier に属することに注意しておく。

まずこの二条件にたいして次の結果が分かった ([T])。

Proposition 2.3. 条件 (W_1) と条件 (W_2) は同値である。

これと合わせて次に述べる主結果を得られた。

Theorem 2.4. (M, Δ) を離散量子群とする時、以下は同値である。

- (1) (M, Δ) はアメナブルである。
- (2) (M, Δ) は条件 (W_1) をみたす。
- (3) (M, Δ) は条件 (W_2) をみたす。
- (4) C^* -環 $\hat{A}$ は指標をもつ。
- (5) C^* -環 $\hat{A}$ は指標をもち、且つ *nuclear* である。
- (6) フォンノイマン環 $\hat{M}$ は $\hat{A}$ -linear な状態をもち、且つ *injective* である。

この結果について幾つか Remark しておきたい。この結果で一番肝要なことは $1 \Rightarrow 2$ を証明したことで、 (M, Δ) の離散性を外した場合に成り立つかどうかは未解決である。また離散 Kac 環の場合には Ruan ([R]) によってこれと同様の結果が得られている。Operator Amenability と一般の離散量子群の Amenability との相性のよさあまり分かっていない。量子群のアメナビリティは Bedos、Murphy、Tuset 並びに Conti たちによって研究されている。([B-C-T]、[B-M-T1]、[B-M-T2]、[B-M-T3]) これらの中で先に述べた $1 \Rightarrow 2$ は一切示されていないが、[D-Q-V] の序文で触れられているように Blanchard と Vaes はこの個所を比較的平易に示している (2003 年 4 月の時点で論文は出ていない)。最後に 5 の statement について。本来これは指標の存在の仮定なしに示されるべきものであったが、この試みは未だに成功していない。前出の Ruan の論文がヒントになるような気もするが、まだまだ遠いような気もする。

REFERENCES

- [B-C-T] E. Bedos, R. Conti, L. Tuset, *On amenability and co-amenability of algebraic quantum groups and their corepresentations*, #OA/0111027.
- [B-M-T1] E. Bedos, G. Murphy, L. Tuset, *Co-amenability of compact quantum groups*, J. Geom. Phys. **40** (2001), no. 2, 130–153.
- [B-M-T2] E. Bedos, G. Murphy, L. Tuset, *Amenability and coamenability of algebraic quantum groups*, Int. J. Math. Math. Sci. **31** (2002), no. 10, 577–601.
- [B-M-T3] E. Bedos, G. Murphy, L. Tuset, *Amenability and coamenability of algebraic quantum groups II*, #OA/0111026.
- [D-Q-V] P. Desmedt and J. Quaegebeur and S. Vaes, *Amenability and the bicrossed product construction*, Illinois Journal of Mathematics, to appear, #QA/0111320.
- [E-S1] M. Enock and J.-M. Schwartz, *Algèbres de Kac moyennables*, (French) [Amenable Kac algebras], Pacific J. Math. **125** (1986), no. 2, 363–379.
- [E-S2] M. Enock and J.-M. Schwartz, *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer-Verlag (1992).

- [Ka] G. I. Kac, *Ring groups and the duality principle* (Russian), Trudy Moskov. Mat. Obšč. **12** (1963) 259–301.
- [K-V] J. Kustermans and S. Vaes, *Locally compact quantum groups*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **33** (2000), no. 6, 837–934.
- [M-N] T. Masuda and Y. Nakagami, *A von Neumann algebra framework for the duality of the quantum groups*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30** (1994), no. 5, 799–850.
- [M-V] A. Maes and A. Van Daele, *Notes on compact quantum groups*, Nieuw Arch. Wisk. (4) **16** (1998), no. 1-2, 73–112.
- [R] Z.-J. Ruan, *Amenability of Hopf von Neumann algebras and Kac algebras*, J. Funct. Anal. **139** (1996), no. 2, 466–499.
- [T] R. Tomatsu, *Amenable Discrete Quantum Groups*, preprint.
- [V] S. Vaes, *Locally compact quantum groups*, Ph. D. thesis KU-Leuven (2001).
- [VV] S. Vaes and A. Van Daele, *The Heisenberg commutation relations, commuting squares and the Haar measure on locally compact quantum groups*, Proceedings of the OAMP Conference, Constanța, 2001, to appear.
- [W1] S. L. Woronowicz, *Twisted SU(2) group An example of a noncommutative differential calculus*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **23** (1987), no. 1, 117–181.
- [W2] S. L. Woronowicz, *Compact quantum groups*, Symetries quantiques (Les Houches, 1995), 845–884, North-Holland, Amsterdam, (1998).