

Intertwining by Non-Zero Operators

琉球大学教養部 呉屋 永徳 (Eitoku Goya)

琉球大学理学研究科 星野 朗 (Akira Hoshino)

§1. 序文. 複素ヒルベルト空間 H 上の有界作用素の作る代数を $B(H)$ で表わす. Stampfli-Wadhwa は [1] で hyponormal 作用素の自然な拡張である dominant 作用素を導入し, 一般化された Putnam-Fuglede theorem を証明した. その後で, $T, W, S \in B(H)$ として次の問題を提示した.

問題 : $TW = WS$, T は hyponormal で S は cohyponormal とする. W が dense range を持てば, T は normal か.

この問題は M. Radjabalipour [3: Theorem 3] によ. て肯定的に解決されたがその証明法は T が M -hyponormal, S が codominant のときでも有効である. そこで我々は, T, S に対する条件をかえ, T を dominant, S を co- M -hyponormal としてこの問題を考えた.

この小論の目的は、上記の問題をはじめ Intertwining に関する最近の結果を紹介することである。

§2. まず dominant 作用素の定義から始める。

定義 : $T \in B(H)$ は任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、
 $(T - \lambda I)H \subset (T - \lambda I)^*H$ をみたすとき、dominant という。
 この条件は任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、正の数 M_λ があって、すべての $x \in H$ に対して、 $\|(T - \lambda I)^*x\| \leq M_\lambda \|(T - \lambda I)x\|$ をみたすことと同値であることはよく知られている。もし正の数 M があって、すべての $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して、 $M_\lambda \leq M$ のとき T を M -hyponormal という。hyponormal 作用素は 1-hyponormal 作用素のことである。

さて次の定理1では、0でない作用素と Intertwining する dominant 作用素や coM -hyponormal 作用素の normal direct summands を考える。

定理1. $T, W, S \in B(H)$, $TW = WS$ とする。
 ここに、 T は dominant, S は coM -hyponormal で、 W は任意の 0でない作用素とする。このとき、 T, S は次の如き normal direct summands をもつ。

$$(1) \quad \ker W^* \oplus (\ker W^*)^\perp \text{ で } T = T_1 \oplus T_2,$$

$\ker W \oplus (\ker W)^\perp$ 上 $S = S_1 \oplus S_2$ である。ここに、 T_2, S_2 は normal である。

(2) 特に W が normal なら、 $\ker W \oplus (\ker W)^\perp$ 上、 $T = T_1 \oplus T_2, S = S_1 \oplus S_2$ である。

(証明) $TW = WS$ より、 $\overline{(WH)}$ は T の不変部分空間である。 $\mathcal{E} = \overline{(WH)}$ とおき、 $W_1 : H \rightarrow \mathcal{E}$ を $W_1 x = Wx$ ($x \in H$) で定義するとき、 $W_1 \in B(H, \mathcal{E})$ は dense range をもち、 $(T|_{\mathcal{E}})W_1 = W_1 S$ である。ここで adjoint をとれば、 $S^*W_1^* = (T|_{\mathcal{E}})^*W_1^*$ となる。
 $\mathcal{L} = \overline{(W_1^*\mathcal{E})}$ とおき、 $W_2 : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}$ を $W_2 x = W_1^* x$ ($x \in \mathcal{E}$) で定義すれば、 $\mathcal{L} = \overline{(W^*H)}$ で、 $(S^*|_{\mathcal{L}})W_2 = W_2(T|_{\mathcal{E}})^*$ 、 $W_2 \in B(\mathcal{E}, \mathcal{L})$ は 1:1, dense range をもつ。ここで再び adjoint をとれば、 $(T|_{\mathcal{E}})W_2^* = W_2^*(S^*|_{\mathcal{L}})^*$ である。 $T|_{\mathcal{E}} \in B(\mathcal{E})$ は dominant, $(S^*|_{\mathcal{L}})^* \in B(\mathcal{L})$ は coM-hyponormal, $W_2^* \in B(\mathcal{L}, \mathcal{E})$ は 1:1, dense range をもつから [4: Theorem 3 (a)] により $T|_{\mathcal{E}}, (S^*|_{\mathcal{L}})^*$ は normal (よって、 $S^*|_{\mathcal{L}}$ も normal である)。よって、[1: Lemma 2] により、 $\mathcal{E}, \mathcal{L}$ はそれぞれ T, S^* を reduce する。 $\mathcal{E} = (\ker W^*)^\perp, \mathcal{L} = (\ker W)^\perp$ であるから (1) が示された。

次に, W が normal なら, $\ker W^* = \ker W$ であるから (2) が示された。

(証明終り)

Remark 1. 吉野氏は [6] で各作用素の行列表現を用いて一般化された Putnam Fuglede theorem を証明した。その証明を注意深くよめば彼はそこですでに定理 1 を得ていたことがわかる。しかしながら我々は、作用素の行列表現を用いずに直接これを証明した。定理 1 (2) は [1: Theorem 2] の一般化である。彼等は W が positive, S が normal のとき、これを証明した。

系 1. [4: Corollary 2]。定理 1 の仮定の下で, $\ker W$ が有限次元ならば, S は normal である。

(証明) 定理 1 より, $S = S_1 \oplus S_2$, $S_1 = S|_{\ker W}$, S_2 normal とかける。 $\ker W$ は S の有限次元 reducing subspace で, S^* は M -hyponormal であるから, $S^*|_{\ker W}$ は normal である。よって $S_1 = (S^*|_{\ker W})^*$ も normal となる。これは S の normality を示している。

(証明終り)

Remark 2. M. Radjabalipour による系1の証明は解析的であり、かなり複雑である。

系2. 定理1の仮定の下で、 $\ker W^*$ が有限次元（特に W が dense range を持つ）ならば、 T は normal である。もし W が dense range をもち、 S が coisometry ならば、 T は unitary である。

（証明） 定理1より $T = T_1 \oplus T_2$ とかける。ここに、 T_2 は normal で、 $T_1 = T|_{\ker W^*}$ 、 $\ker W^*$ は T の有限次元な reducing subspace である。よって、 T_1 は normal となり、 T も normal である。次に、 W が dense range を持ち、 S が coisometry とする。このとき [6] より $T^*W = WS^*$ である。[5: Theorem 1] より、 T は coisometry である。 T は normal であるから、 T は unitary でなければいけない。

（証明終り）

Remark 3. 系2は T , S^* が dominant のときは成立しない。実際 T , T^* が dominant である nonnormal 作用素 T が存在する [2]。

系 3. 定理 1 の仮定の下で、 T , S は nontrivial reducing subspace をもつ。

(証明) W が dense range を持てば、系 2 より T は normal である。 W が dense range を持たなければ、定理 1 より $\ker W^*$ は T の nontrivial reducing subspace となる。次に W が $1:1$ なら、定理 1 より $S = S_2$ は normal である。 W が $1:1$ でないとき、定理 1 より、 $\ker W$ は S の nontrivial reducing subspace となる。

(証明終り)

定理 2. 次の三つの主張は同値である。

(1) 定理 1.

(2) $T, W, S \in B(H)$; $TW = WS$ とする。 T が dominant, S が coM-hyponormal, W が $1:1$ で dense range を持てば, T, S は normal である。

[4 : Theorem 3 (a)].

(3) $T \in B(K)$ を dominant, $S^* \in B(H)$ を M-hyponormal とする。 $TW = WS$ ($W \in B(H, K)$) ならば, $T^*W = WS^*$

である。[6]。

(証明) (1) から (2), (3) から (2) を示せば十分である。

はじめに (1) を仮定し, T, W, S は (2) の条件をみたすものとする。そのとき, $\ker W = \ker W^* = \{0\}$ であるから, 定理 1 より, $T = T_2, S = S_2$ は normal である。

次に (3) を仮定し, T, W, S は (2) の条件をみたすものとする。 $TW = WS$ であるから, (3) より $T^*W = WS^*$ を得る。[5: Theorem 1] の証明と全く同様にして, 我々は T^* が M -hyponormal であることを示すことが出来る。よって [4: Theorem 2] により, すべての $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $(T - \lambda I)(T - \lambda I)^* \geq D^2$ ($D \geq 0$) である。ここに, D は十分小さな $\delta > 0$ に対して $D = \delta |TT^* - T^*T|$ である。 T は dominant であるから, このとき D が 0 でなければいけないことはよく知られている。これは T の normality を意味している。また $S^*W^* = W^*T^*$ であるから, [1: Theorem 1] より S は normal となる。

(証明終り)

我々は定理 1 を T が dominant, S が coM-hypo-

normal という設定の下で考えて来たが、[5: Theorem 2] を用いることにより、 T が paranormal contraction, S が coisometry でも成り立つことがわかる。

参 考 文 献

- [1] J. G. STAMPFLI AND B. L. WADHWA : An asymmetric Putnam-Fuglede theorem for dominant operators, Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 359 - 365.
- [2] J. G. STAMPFLI AND B. L. WADHWA : On dominant operators, Monatshefte für Math. 84(1977), 143 - 153.
- [3] M. RADJABALIPOUR : Ranges of hyponormal operators, Illinois J. Math. 21 (1977), 70 - 75.
- [4] M. RADJABALIPOUR : ON MAJORIZATION AND NORMALITY OF OPERATORS, Amer. Math. soc., 62 (1977), 105 - 110.

- [5] E. GOYA AND T. SAITO : ON
INTERTWINING BY AN OPERATOR
HAVING A DENSE RANGE, Tohoku
Math. J. 33 (1981), 127-131.
- [6] T. YOSHINO : REMARK ON THE
GENERALIZED PUTNAM-FUGLEDE THE-
OREM, Proc. Amer. Math. soc.,
(to appear).