

ANR 空間からホモロジー球面への集合値 写像の次数

明治大学 四反田義美 (Shitanda Yoshimi)

Meiji University School of Political Science and Economics

1 序

位相空間 X の各点 x に位相空間 Y の空でない閉集合 $\varphi(x)$ を対応させるとき, この対応を集合値写像という. この論文では, 集合値写像をギリシャ文字で $\varphi: X \rightarrow Y$ と記し, 通常の写像をローマ字で $f: X \rightarrow Y$ と記すことにする. 集合値写像は, 上半連続であるものとする (cf. [5]).

不動点定理や同変点定理は, 多くのトポロジストにより研究されてきた (cf. [2], [7], [8], [9]). またこれらは, 集合値写像の場合へも一般化されてきた (cf. [4], [5], [10], [11]).

この際に, 重要な概念が許容写像 (admissible mapping) である. $\varphi: X \rightarrow Y$ が許容写像とは, 連続写像 $p: \Gamma \rightarrow X$ と $q: \Gamma \rightarrow Y$ の組で, ある条件を満たすものをいう (cf. Definition 2).

ANR 空間 X が $H^n(X; Z) \cong Z$ を満たし, N が n 次元ホモロジー球面であるとき, $\varphi: X \rightarrow Y$ の次数が次式で定義される.

$$\deg(\varphi) = \{\deg((p^*)^{-1}q^*) : (p^*)^{-1}q^* : H^n(N; Z) \rightarrow H^n(X; Z)\}$$

この論文では, $\varphi: X \rightarrow N$ の次数を詳しく調べることにする. 我々の主要な結果は次のとおりである (cf. Theorem 3.4, Theorem 4.1). 我々の結果は, [10] の Theorem 5.3 と Theorem 6.3 の別証明でもある. この結果に関連して, Y.Hara and Y.Moriwaki [6] も $\varphi: M \rightarrow S^n$ の次数について, M が n 次元多様体の場合に同様の結果を我々とは異なる方法で得ている.

Main Theorem 1. *Let X be an ANR space with a free involution T and N be an n -dimensional homology sphere. Suppose that $\dim X = n$ and $H^n(X; Z) \cong Z$ and $c(X, T)^n \neq 0$. If an admissible mappings $\varphi: X \rightarrow N$ satisfies $\varphi(x) \cap \varphi(Tx) = \emptyset$ for any $x \in X$, then there exists a unique odd number m such that $\deg \varphi = \{m\}$.*

これに関して、 $c(X, T)^n = 0$ の場合にも一意的な偶数 m が存在して、 $\deg(\varphi) = \{m\}$ となるという結果が得られる (cf. Theorem 3.5).

Main Theorem 2. *Let X be an ANR space with a free involution T and N be an n -dimensional homology sphere with a non trivial involution T' . Suppose that $\dim X = n$ and $H^n(X; Z) \cong Z$ and an admissible mappings $\varphi: X \rightarrow N$ satisfies $T'\varphi(x) \cap \varphi(Tx) = \emptyset$ for any $x \in X$. Then there exists a unique even number m such that $\deg(\varphi) = \{m\}$. In particular, if T' is an orientation reversing involution, then $\deg \varphi = \{0\}$.*

2 準備

この論文では、アレクサンダー・スパニアーコホモロジー論を $\bar{H}^*(-; G)$ で表し、特異コホモロジー論を $H^*(-; G)$ で表す。これらは、一般に同型ではないが、ANR 空間では同型となる。

$$(2.1) \quad \mu; \bar{H}^*(X; G) \cong H^*(X; G).$$

詳細については、スパニアーのテキスト ([12]) を参照。

係数群が G のときは、 G を明示するが、標数が 2 の素体 F_2 のときは、係数群を省いて、 $\bar{H}^*(-)$, $H^*(-)$ を使う。 $f: X \rightarrow Y$ が固有写像 (proper map) とは、任意のコンパクト集合 $K \subset Y$ に対して、 $f^{-1}(K)$ がまたコンパクトとなる写像を云う。 $f: X \rightarrow Y$ が完全写像 (perfect map) とは、 f が閉写像かつ任意の $y \in Y$ に対して、 $f^{-1}(y)$ がコンパクトとなる写像を云う。 $f: X \rightarrow Y$ がコンパクト写像 (compact map) とは、 $f(X)$ が Y のコンパクト集合に含まれるときを云う。

次の定義は重要である。

Definition 1. X, Y をパラコンパクト・ハウスドルフ空間とするとき、 $f: X \rightarrow Y$ が、次の条件を満たすならば、ヴィートリス写像 (Vietoris map) と呼ばれる。

1. $f: X \rightarrow Y$ は、全射な連続写像でかつ完全写像である。
2. 任意の $y \in Y$ に対して、 $f^{-1}(y)$ は、連結で非輪状空間である。すなわち、 $\bar{H}^p(f^{-1}(y); F) = 0 (p > 0)$ が成り立つ。

$f: X \rightarrow Y$ が全射で閉写像で、条件 (2) を満たすとき、弱ヴィートリス写像と言う。

次の定理は、スパニアーのテキストに掲載されている重要な定理である。

Theorem 2.1. X, Y はパラコンパクト・ハウスドルフ空間で, $f: X \rightarrow Y$ は弱ヴィートリス写像とする. このとき,

$$(2.2) \quad f^*: \bar{H}^m(Y; \mathbf{F}) \rightarrow \bar{H}^m(X; \mathbf{F}) \quad (m \geq 0)$$

は, 同型である.

Definition 2. 上半連続な集合値写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ が許容写像 (admissible map) とは, パラコンパクト・ハウスドルフ空間 Γ と連続写像 $p: \Gamma \rightarrow X$ と $q: \Gamma \rightarrow Y$ が存在して, 次の条件を満たすときにいう.

1. $p: \Gamma \rightarrow X$ はヴィートリス写像
2. $\varphi(x) \supset q(p^{-1}(x)) (x \in X)$

写像の対 (p, q) のことを集合値写像 φ の選択写像対という.

許容写像 $\varphi: X \rightarrow Y$ に対して, $\varphi^*: \bar{H}^*(Y; \mathbf{F}) \rightarrow \bar{H}^*(X; \mathbf{F})$ を次式で定義する.

$$\varphi^* = \{(p^*)^{-1}q^* \mid (p, q) \text{ は } \varphi \text{ の選択写像対}\}.$$

同様にして, φ_* を $\{q_*(p_*)^{-1}\}$ で定義する.

ANR 空間が X が $H^n(X; Z) \cong Z$ を満たし, N が n 次元ホモロジー球面であるときに, φ の次数 $\deg(\varphi)$ が $\{(p^*)^{-1}q^*: H^n(N; Z) \rightarrow H^n(X; Z)\}$ の次数 $\{\deg((p^*)^{-1}q^*)\}$ で定義される. これは一般に集合である.

3 許容写像の次数 1

X をパラコンパクト・ハウスドルフ空間とし, τ を位数 2 の群とする. X が対合 $T: X \rightarrow X$ をもつとき, τ が X に群作用をもつことになる. その軌道空間を X_τ とする. 同変写像 $f: X \rightarrow Y$ は $f_\tau: X_\tau \rightarrow Y_\tau$ を誘導する.

$\pi_n: S^n \rightarrow RP^n$, $\pi_\infty: S^\infty \rightarrow RP^\infty$ を標準的な被覆射影とする. 被覆空間 $\pi_X: X \rightarrow X_\tau$ に対して, 分類写像 $f_\tau: X_\tau \rightarrow RP^\infty$ と $f: X \rightarrow S^\infty$ が存在して $\pi_\infty f = f_\tau \pi_X$ を満たす. 第 1 スティフェル・ホイットニー類 $c(X, T) \in \bar{H}^1(X_\tau)$ (or $c(X, T) \in H^1(X_\tau)$) を $f_\tau^*(\omega)$ で定義する. ω は $H^1(RP^\infty)$ の生成元である. i.e. $c(X, T) = f_\tau^*(\omega)$. $\dim X = n$ は, X の被覆次元を意味する.

次の定理は, 基本的である.

Proposition 3.1. *Let X be an ANR space with a free involution T which satisfies $\dim X = n$ and $H^n(X; Z) \cong Z$. Suppose that $c(X, T)^n \neq 0$. Then $T^* = \text{Id}_{H^n(X; Z)}$ for an odd number n and $T^* = -\text{Id}_{H^n(X; Z)}$ for an even number n .*

証明は、容易であるので、要点のみ述べる。次の図式が存在する (cf. [1], [3]) .

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & S^n \\ \downarrow \pi_X & & \downarrow \pi_n \\ X_\tau & \xrightarrow{f_\tau} & RP^n. \end{array}$$

この図式とギザン・スミス系列を使うことにより示される。

Δ_X を $X^2 = X \times X$ の対角集合とする。 $T_X : X^2 \rightarrow X^2$ は $T_X(x, y) = (y, x)$ で定義される対合である。 $T_X : X^2 - \Delta_X \rightarrow X^2 - \Delta_X$ は自由な対合である。 次の定理は、射影 $\pi_i : N^2 - \Delta_N \rightarrow N$ がファイバー $(N - \{x\})$ をもつファイバー束であることから容易に分かる。

Theorem 3.2. *Let N be an n -dimensional closed manifold. Suppose $H^*(N; Z) \cong H^*(S^n; Z)$. Then $H^*(N - \{x\}; G) \cong H^*(pt; G)$ for any $x \in N$ and $\pi_i^* : H^*(N^2 - \Delta_N; G) \cong H^*(N; G)$ for the projections $\pi_i : N^2 - \Delta_N \rightarrow N$ ($i = 1, 2$).*

次の結果も、ギザン・スミス系列を使うことにより、容易に示される。 π_1 は移送写像で、 ν' は $H^n(N^2 - \Delta_N)$ の生成元とする。

Proposition 3.3. *Let N be an n -dimensional homology sphere and $T_N : N^2 - \Delta_N \rightarrow N^2 - \Delta_N$ be the free involution. Then $c(N^2 - \Delta_N, T_N)^n \neq 0$ and $\pi_1(\nu') = c(N^2 - \Delta_N, T_N)^n$ where $\pi : (N^2 - \Delta_N) \rightarrow (N^2 - \Delta_N)_\tau$.*

X をパラコンパクト・ハウスドルフ空間で、 T を対合とすると、

$$\Delta'_X = \{(x, Tx) \in X^2 \mid x \in X\}$$

が定義される。

T が自由な対合のとき、 $\Delta_X \cap \Delta'_X = \emptyset$ が成り立つ。 N が n 次元ホモロジー球面のとき、

$$\pi_i : H^n(N^2 - \Delta'_N; G) \cong H^*(N; G) \quad (i = 1, 2)$$

が成り立つ。

$\varphi : X \rightarrow Y$ を許容写像とし、 (p, q) を φ の選択写像対とする。 すなわち $p : \Gamma \rightarrow X$ はヴィートリス写像で $q : \Gamma \rightarrow N$ は連続写像とする。 X が対合 T を持つとき、 Γ_0 を次式で定義する。

$$\Gamma_0 = \{(z, z') \in \Gamma \times \Gamma \mid p(z) = Tp(z')\}$$

ここで、 $p_0 : \Gamma_0 \rightarrow X$ を $p_0(z, z') = p(z)$ で、 $q_0 : \Gamma_0 \rightarrow N$ を $q_0(z, z') = q(z)$ で定義する。

$p_\Gamma : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma$ は $p_\Gamma(z, z') = z$ で定義される. $\deg((p_0^*)^{-1}q_0^*) = \deg((p^*)^{-1}q^*)$ も容易に確認される. 対合 $T_0 : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$ は $T_0(z, z') = (z', z)$ で定義される. p_0 は同変写像である. i.e. $Tp_0 = p_0T_0$.

次の定理は, ある部分は [10] の Theorem 6.3 の対偶命題として得られる. その証明は, [10] の Theorem 6.3 の別証明でもある.

Theorem 3.4. *Let X be an ANR space with a free involution T and N be an n -dimensional homology sphere. Suppose that $\dim X = n$, $H^n(X; Z) \cong Z$ and $c(X, T)^n \neq 0$. If an admissible mappings $\varphi : X \rightarrow N$ satisfies $\varphi(x) \cap \varphi(Tx) = \emptyset$ for any $x \in X$, then there exists a unique odd number m such that $\deg \varphi = \{m\}$.*

Proof. 仮定から $Q : \Gamma_0 \rightarrow N^2 - \Delta_N$ を $Q(z, z') = (q(z), q(z'))$ で定義できる. $\pi : N^2 - \Delta_N \rightarrow (N^2 - \Delta_N)_\tau$ に対する分類写像を $g_\tau : (N^2 - \Delta_N)_\tau \rightarrow RP^\infty$ とする.

次の可換図式を考えよう.

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \xleftarrow{p_0} & \Gamma_0 & \xrightarrow{Q} & N^2 - \Delta_N & \xrightarrow{g} & S^\infty \\ \downarrow \pi_X & & \downarrow \pi_{\Gamma_0} & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi_\infty \\ X_\tau & \xleftarrow{(p_0)_\tau} & (\Gamma_0)_\tau & \xrightarrow{Q_\tau} & (N^2 - \Delta_N)_\tau & \xrightarrow{g_\tau} & RP^\infty. \end{array}$$

ここで $X_\tau, (\Gamma_0)_\tau, (N^2 - \Delta_N)_\tau$ は軌道空間で $\pi_X, \pi_{\Gamma_0}, \pi, \pi_\infty$ は被覆射影である. $(p_0)_\tau, Q_\tau, g_\tau$ は, 各々 p_0, Q, g から誘導された写像である.

$$(3.3) \quad (p_0)_\tau^*(c(X, T)) = Q_\tau^*g_\tau^*(\omega)$$

が成り立つことは容易に分かる. $(p_0)_\tau^*(c(X, T)) = c(\Gamma_0, T_0)$ と置く. $c(X, T)^n \neq 0$ から $c(\Gamma_0, T_0)^n \neq 0$ が分かる.

$\pi_X : X \rightarrow X_\tau$ とするとき, $(\pi_X)_!(\mu) = c(X, T)^n$ が成り立つ. ここで μ は $H^n(X)$ の生成元である. $(\pi_X)_!$ は, 移送写像 (transfer map) である.

$c(N^2 - \Delta_N, T_N)^n \in H^n((N^2 - \Delta_N)_\tau)$ は $c(N^2 - \Delta_N, T_N)^n = g_\tau^*(\omega^n)$ を満たす. このとき, ギザン・スミス系列により $\nu' \in H^n(N^2 - \Delta_N)$ が存在して, $c(N^2 - \Delta_N, T_N)^n = \pi_!(\nu')$ を満たすことが分かる.

$(\pi_X)_!(\mu) = c(X, T)^n$ と $(p_0)_\tau^*(c(X, T)) = c(\Gamma_0, T_0)$ により,

$$(3.4) \quad Q^*(\nu') = p_0^*(\mu).$$

が分かる.

また $(p_0^*)^{-1}Q^* : H^n(N^2 - \Delta_N) \cong H^n(X) \cong \mathbb{F}_2$. も分かる. 次の可換図式を用いて,

$$(3.5) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{p_0} & \Gamma_0 & \xrightarrow{Q} & N^2 - \Delta_N \\ \downarrow = & & \downarrow p_\Gamma & & \downarrow \pi_1 \\ X & \xleftarrow{p} & \Gamma & \xrightarrow{q} & N \end{array}$$

p_Γ^* and π_1^* が同型であることから, $\deg((p^*)^{-1}q^*)$ が奇数であることを得る.
 続いて,

$$(3.6) \quad \deg(T_N^*) = \begin{cases} 1 & \text{odd number } n \\ -1 & \text{even number } n. \end{cases}$$

を以下で示す.

$QT_0 = T_N Q$ と $\deg(Q^*) \neq 0$ により, $\deg(T_0^*) = \deg(T_N^*)$ が成り立つ. また $p_0 T_0 = T p_0$ と $\deg(p_0^*) = \pm 1$ により, $\deg(T_0^*) = \deg(T^*)$ が成り立つことから,

$$\deg(T_N^*) = \deg(T^*) = \pm 1.$$

を得る. これから我々の主張を得る.

$\hat{\nu}$ を $H^n(N; Z)$ の生成元とし, $\hat{\nu}' \in H^n(N^2 - \Delta_N; Z)$ を $\hat{\nu}' = \pi_1^*(\hat{\nu})$ で定義する. ただし $\pi_1 : N^2 - \Delta_N \rightarrow N$ である.

$\pi_i^* : H^n(N; Z) \cong H^n(N^2 - \Delta_N; Z) \cong Z$ と $\pi_1 = \pi_2 T_N$ から,

$$(3.7) \quad (\pi_1^*)^{-1} \pi_2^*(\hat{\nu}) = \begin{cases} +\hat{\nu} & \text{odd number } n \\ -\hat{\nu} & \text{even number } n \end{cases}$$

が分かる.

続いて, $\deg((p^*)^{-1}q^*)$ が p, q の選び方に依らずに, 一意的に定まることを示す.

(p, q) と (p', q') を φ の選択写像対とする. すなわち, $X \xleftarrow{p} \Gamma \xrightarrow{q} N$ に対して, Γ_0 を定義したように, $X \xleftarrow{p'} \Gamma' \xrightarrow{q'} N$ に対して, Γ'_0 と $X \xleftarrow{p'_0} \Gamma'_0 \xrightarrow{q'_0} N$ が定義される.

Γ_{01}, Γ_{01} を

$$\Gamma_{01} = \{(z, z') \in \Gamma \times \Gamma' \mid p(z) = T p'(z')\}$$

$$\Gamma_{10} = \{(z', z) \in \Gamma' \times \Gamma \mid p(z) = T p'(z')\}.$$

で定義する.

$p_1 : \Gamma_{01} \rightarrow X$, $p'_1 : \Gamma_{10} \rightarrow X$ を各々 $p_1(z, z') = p(z)$, $p'_1(z', z) = p'(z')$ で定義する. $\hat{\pi}_1 : \Gamma_{01} \rightarrow \Gamma$ と $\hat{\pi}'_1 : \Gamma_{10} \rightarrow \Gamma'$ はそれぞれ第 1 成分への射影である.

次の可換図式を考察する.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xleftarrow{p} & \Gamma & \xrightarrow{q} & N \\
 \uparrow = & & \uparrow \hat{\pi}_1 & & \uparrow \pi_1 \\
 X & \xleftarrow{p_1} & \Gamma_{01} & \xrightarrow{\hat{Q}} & N^2 - \Delta_N \\
 \downarrow T & & \downarrow \hat{T} & & \downarrow T_N \\
 X & \xleftarrow{p'_1} & \Gamma_{10} & \xrightarrow{\hat{Q}'} & N^2 - \Delta_N \\
 \downarrow = & & \downarrow \hat{\pi}'_1 & & \downarrow \pi_1 \\
 X & \xleftarrow{p'} & \Gamma' & \xrightarrow{q'} & N.
 \end{array}
 \tag{3.8}$$

ここで, $\hat{Q}(z, z') = (q(z), q'(z'))$, $\hat{Q}'(z', z) = (q'(z'), q(z))$. $\hat{T} : \Gamma_{10} \rightarrow \Gamma_{10}$ は $\hat{T}(z, z') = (z', z)$ である.

この図式と $\deg(T^*) = \deg(T_N^*)$ から $\deg((p^*)^{-1}q^*) = \deg((p'^*)^{-1}q'^*)$ が成り立つことが分かる. $\square$

次の定理も定理 3.4 と同様にして証明される.

Theorem 3.5. *Under the condition of Theorem 3.4, assume $c(X, T)^n = 0$ instead of $c(X, T)^n \neq 0$. Then there exists a unique even number m such that $\deg(\varphi) = \{m\}$.*

4 許容写像の次数 2

前節の定理では, N の対合が存在しない場合を扱った. ここでは, N に自明でない対合が存在する場合の次数を議論する.

Theorem 4.1. *Let X be an ANR space with a free involution T and N be an n -dimensional homology sphere with a non trivial involution T' . Suppose that $\dim X = n$ and $H^n(X; Z) \cong Z$ and an admissible mappings $\varphi : X \rightarrow N$ satisfies $T'\varphi(x) \cap \varphi(Tx) = \emptyset$ for any $x \in X$. Then there exists a unique even number m such that $\deg(\varphi) = \{m\}$. In particular, if T' is an orientation reversing involution, then $\deg \varphi = \{0\}$.*

Proof. $N^2 - \Delta'_N$ は, T_N 不変集合ではあるが, T_N は, $N^2 - \Delta'_N$ 上で自由な対合ではない.

Proposition 3.3 と同様にして, $H^n(S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N)) \cong \mathbf{F}_2$ であることが分かる. ν' をその生成元とする. 対合 $T'_N(x, z, z') = (Tx, z', z)$ に対して, $\omega = c(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N), T'_N)$ と置く.

まず, $H^*(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N))$ が全ての k について ω^k を含むことを示そう.

T' が非自明なので, $T'(z_0) \neq z_0$ となる元 $z_0 \in N$ が存在するので, 同変写像

$$h: S^\infty \rightarrow S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N), \quad k: S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N) \rightarrow S^\infty$$

が存在する. ここで, h, k は $h(x) = (x, z_0, z_0)$, $k(x, z, z') = x$ であり, $k_\tau h_\tau = Id_{RP^\infty}$ を満たすので, 我々の主張を得る.

$\hat{q}: S^\infty \times \Gamma_0 \rightarrow S^\infty \times N^2$ を $\hat{q}(x, z, z') = (x, q(z), q(z'))$ で定義する. 仮定より, $\hat{q}$ は, $\hat{q}: S^\infty \times \Gamma_0 \rightarrow S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N)$ とも見做される.

$\pi_{\Gamma_0}: S^\infty \times \Gamma_0 \rightarrow S^\infty \times_\tau \Gamma_0$, $\pi_{N^2}: S^\infty \times N^2 \rightarrow S^\infty \times_\tau N^2$ と $\pi: S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N) \rightarrow S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)$ は被覆射影である. また $H^n(N^2 - \Delta'_N) \cong \mathbf{F}_2$ の生成元は ν' で表される. このとき, $j^*(\nu \times 1) = \nu'$, $j^*(1 \times \nu) = \nu'$ が成り立つ. ただし $j: N^2 - \Delta'_N \rightarrow N^2$ は自然な入射である.

続いて, 次の可換図式を考えよう. $\tilde{j}: S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N) \rightarrow S^\infty \times N^2$ は, $\tilde{j}(x, z) = (x, j(z))$ で定義された写像である.

(4.1)

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \longrightarrow & H^*(S^\infty \times N^2) & \xrightarrow{\tilde{j}^*} & H^*(S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N)) \\ \downarrow & & \downarrow (\pi_{N^2})_! & & \downarrow \pi_! \\ H^*(S^\infty \times N^2) & \xrightarrow{(\pi_{N^2})_!} & H^*(S^\infty \times_\tau N^2) & \xrightarrow{\tilde{j}_\tau^*} & H^*(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) \\ \downarrow \hat{q}^* & & \downarrow \hat{q}_\tau^* & & \downarrow \hat{q}_\tau^* \\ \bar{H}^*(S^\infty \times \Gamma_0) & \xrightarrow{(\pi_{\Gamma_0})_!} & \bar{H}^*(S^\infty \times_\tau \Gamma_0) & \xrightarrow{=} & \bar{H}^*(S^\infty \times_\tau \Gamma_0) \end{array}$$

ここで

$$(4.2) \quad \pi_!(\nu') = 0, \quad H^k(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) = \mathbf{F}_2 \oplus \mathbf{F}_2 \quad (k \geq n).$$

が成り立つことを示そう.

ギザン・スミス系列

$$\rightarrow H^*(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) \xrightarrow{\pi^*} H^*(S^\infty \times (N^2 - \Delta'_N)) \xrightarrow{\pi_!} H^*(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N))$$

から, 容易に

$$H^k(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) \cong \mathbf{F}_2 \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

を得る.

もし $\pi_!(\nu') \neq 0$ とすると, n 次元で $\pi^* = 0$ と $\dim H^n(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) = 1$ を得る. よって上の完全系列から $\pi_!(\nu') = \omega^n$ を得る. さらに $k > n$ のときに, $H^k(S^\infty \times_\tau (N^2 - \Delta'_N)) = 0$ を得る. このことは, 全ての k について $\omega^k \neq 0$ であることに矛盾する. 故に (4.2) を得る.

$\tilde{j}^*(1 \times \nu) = \nu'$ であるから $\tilde{j}_\tau^*(\pi_{N^2})_!(1 \times \nu) = 0$ を得る. また $\hat{q}_\tau^*((\pi_{N^2})_!(1 \times \nu)) = 0$ を得る. 故に, 同型 $(\pi_{\Gamma_0})_! : \bar{H}^n(S^\infty \times \Gamma_0) \cong \bar{H}^n(S^\infty \times_\tau \Gamma_0)$ から $\hat{q}^*(1 \times \nu) = 0$ を得る. ここで, $(\pi_{\Gamma_0})_!$ が同型であることは, ギザン・スミス系列と $H^*(X) \cong \bar{H}^*(\Gamma_0)$ から分かる. また同様にして, $\hat{q}^*(\nu \times 1) = 0$ を得る.

故に, $\hat{q}^* = 0 : H^n(S^\infty \times N^2) \rightarrow \bar{H}^n(S^\infty \times \Gamma_0)$ と $q^* = 0 : H^n(N) \rightarrow \bar{H}^n(\Gamma)$ を得るので, $\deg(q^*)$ は偶数であることが分かる.

これから次数の一意性を証明する. (p, q) と (p', q') を φ の選択写像対とする. $\hat{R} : \Gamma_{01} \rightarrow N^2 - \Delta_N$ と $\hat{R}' : \Gamma_{10} \rightarrow N^2 - \Delta_N$ は, 各々 $\hat{R}(z, z') = (q(z), Tq'(z'))$ と $\hat{R}'(z', z) = (T'q'(z'), q(z))$ で定義される.

$q = q'$ のとき, $\hat{R}$ は同変写像である. すなわち, $\hat{R}T_0 = \hat{T}\hat{R}$ である. ここで $\hat{T}(z, z') = (T(z'), T(z))$. しかしながら $\hat{T}$ は, $N^2 - \Delta_N$ 上で自由な対合ではない.

次の図式を考えよう.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xleftarrow{p} & \Gamma & \xrightarrow{q} & N \\
 \uparrow = & & \uparrow \pi_1 & & \uparrow \pi_1 \\
 X & \xleftarrow{p} & \Gamma_{01} & \xrightarrow{\hat{R}} & N^2 - \Delta_N \\
 \downarrow T & & \downarrow T & & \downarrow T_N \\
 X & \xleftarrow{p} & \Gamma_{10} & \xrightarrow{\hat{R}'} & N^2 - \Delta_N \\
 \downarrow = & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_1 \\
 X & \xleftarrow{p'} & \Gamma' & \xrightarrow{T'q'} & N.
 \end{array}
 \tag{4.3}$$

π_i^* ($i = 1, 2$) は同型であるので,

$$\deg((p^*)^{-1}q^*) = \deg((p'^*)^{-1}q'^*T'^*).
 \tag{4.4}$$

を得る.

T' が向きを保つ対合のとき, $\deg((p^*)^{-1}q^*) = \deg((p'^*)^{-1}q'^*)$. である.

T' が向きを反転する対合のとき, $q'(z') = q(z')$ とするとき, $\deg((p^*)^{-1}q^*) = -\deg((p^*)^{-1}q^*)$ である. よって $\deg((p^*)^{-1}q^*) = 0$ である.

いずれにしても, φ の次数は一意的に定まる.

□

次の結果も同様に証明される (cf. Proposition 3.1).

Corollary 4.2. *Under the same conditions as Theorem 4.1, assume that an involution T' on N is free. Then there exists a unique even number m such that $\deg \varphi = \{m\}$. In particular, if n is an even number, then $\deg \varphi = \{0\}$.*

参考文献

- [1] R. Brown, The Lefschetz Fixed Point Theorem, Scott, Foresman and Company, Glenview III, London, (1971).
- [2] A. Dold, Lectures on Algebraic Topology, Springer-Verlag, Berlin, (1972).
- [3] R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag, Berlin (1989).
- [4] L. Górniewicz, Remark on the Lefschetz-type fixed point theorem, Bulletin de l'academie Polonaise des sciences 21, No.11, (1973), 983-989.
- [5] L. Górniewicz, Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings, Kluwer Academic Publishers, (1999).
- [6] Y. Hara and Y. Moriwaki, The degree of multivalued maps from manifolds to spheres, J. Fixed Point Theory Appl. 11 (2012) 253-259.
- [7] M. Nakaoka, Continuous maps of manifolds with involution I, Osaka J. Math. 11, (1974), 129-145.
- [8] M. Nakaoka, Continuous maps of manifolds with involution II, Osaka J. Math. 11, (1974), 147-162.
- [9] M. Nakaoka, Continuous maps of manifolds with involution III, Osaka J. Math. 12, (1975), 197-208.
- [10] Y. Shitanda, A fixed point theorem and equivariant points for set-valued mappings, Publ. RIMS. Kyoto Univ. Vol. 45, No. 3, (2009), 811-844
- [11] Y. Shitanda, A generalization of antipodal point theorems for set-valued mappings, Hokkaido Math. J. . Vol. 20, No. 3, (2010), 217-238
- [12] E. H. Spanier, Algebraic Topology, Springer-Verlag, New York (1966).