

knots の Union の一般化

北大 理 酒井 健

Kinoshita-Terasaka [1] において導入された knots の Union を拡張し, unknotting number 1 をもつ knot の primeness の問題との関係を示す。

$K_1, K_2 \in S^3$ の 2 つ (tame な) knots とする。integer $m(\geq 0)$ に対して, 記号 $K_1 \oplus_m K_2$ は, 次の様にして構成された knot の集合を表わす:

K_1 と K_2 の connected sum を $\bar{K}$ とし, decompose する 2-sphere を S^2 とする:

$$\bar{K} = K_1 \#_{S^2} K_2$$

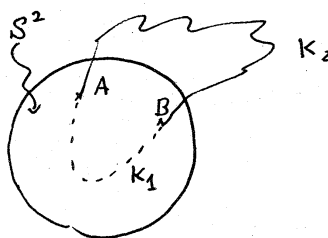
$$\bar{K} \cap S^2 = \{A, B\} \text{ とおく。}$$

$\Gamma \in S^3$ に embed された arc Γ ,

次の条件をみたすものとする:

$$(i) \Gamma \cap \bar{K} = \partial \Gamma \cap \bar{K} = \{a, b\} (= 2 \text{ points}) \subset \bar{K} - \{A, B\}.$$

$$(ii) \Gamma \text{ と } S^2 \text{ は general position にあり, } \#(\Gamma \cap S^2) = m \text{ である。}$$



そこで, $\Gamma \cap S^2$ の m 個の点に, Γ 上をみても, a の方から順に番号をつけて, $a_1, \dots, a_m$ とする。

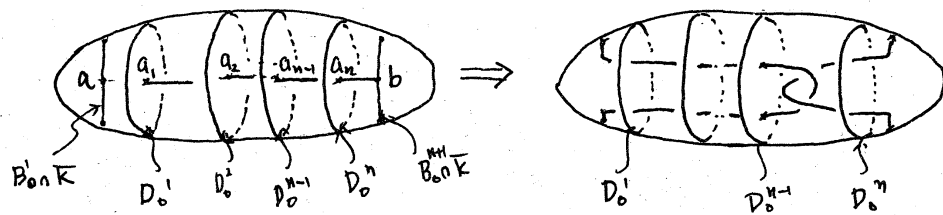
次に, Γ が regular n.b.d. B_0 上, 次の条件をみたすようにえらぶ:

(iii) $B_0 \cap S^2$ の各 connected component は 2-disc Z , $\Gamma \cap S^2$ の点 a_i 各々 1 点ずつ含む。

$D_0^i \in B_0 \cap S^2$ の conn. comp. Z , $a_i \in Z$ を含むものとする。 B_0 は $D_0^1 \cup \dots \cup D_0^m$ によつて, $(n+1)$ 個の 3-cell に分割されるが, それら a_i を含むものから順に $B_0^1, \dots, B_0^{n+1}$ とすると,

(iv) $B_0 \cap K = (B_0^1 \cap K) \cup (B_0^{n+1} \cap K)$ 上, $(B_0^1, B_0^1 \cap K), (B_0^{n+1}, B_0^{n+1} \cap K)$ はともに, trivial cell-pair (i.e. $\cong (B^2 \times B^1) \times B^1$) である。

すると, B_0 は, 抽象的には下図左の如くみえる。そこで, K から $K \cap B_0$ を取り除き, 下図右の 2 本の arc を置き換えて, K から得られる knot を K_Γ (単に K) とかく。



上の条件をみたすある Γ がある。上の様にして得られた knot K の集合が $K_1 \oplus_n K_2$ である。

とくに, $K_1 \oplus_1 K_2$ は, Kinoshita-Terasaka [1] の意味での Union である。

おまか. $K_1 \# K_2$ を考える理由は. 次の事実に基づく:

まず. 次の命題 $U(n)$ ($n \geq 0$) を考える:

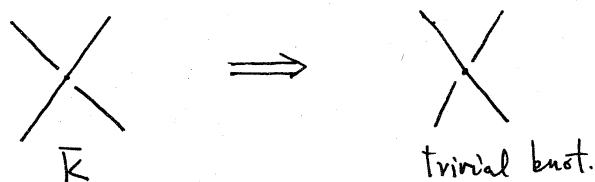
$U(n)$: K_1 と K_2 は non-trivial knot とすると, $\forall K \in K_1 \# K_2$ に対して. K は non-trivial knot である.

すると. 次のことが容易にわかる.

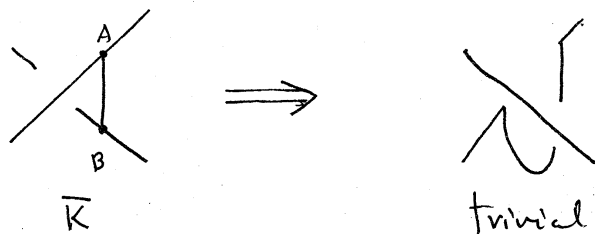
Prop. $\forall n$ に対して, $U(n)$ が正しい.

$\Leftrightarrow$ unknotting number 1 を持つ knot は prime である.

(proof) $\Rightarrow$). K を unknotting number 1 の knot とし, non-trivial な knots K_1, K_2 があつて. $K = K_1 \#_{S^2} K_2$ となつたとする. K の regular projection を選んで. ある crossing point で. 上下道を入れ換えて. trivial knot になるとする:



overcrossing point $\overset{(A)}{\curvearrowright}$ と undercrossing point $\overset{(B)}{\curvearrowleft}$ と vertical line を結び. arc と Γ とする:



Γ と S^2 とは. general position にあるとしよ. $\#(S^2 \cap \Gamma) = m$ とあれば. trivial knot $\in K_1 \# K_2$ となつて. 矛盾.

逆も、ほとんど明らかである。□

そこで、 $U(n)$ について、知られていることを、次にのべる。

Th. 0. (Schubert)

$U(0)$ は正しい。□

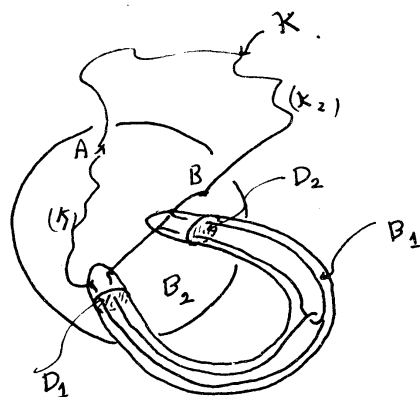
Th. 1. (Kinoshita-Terasaka)

$U(1)$ は正しい。□

筆者は、次の事を証明した。

Th. 2. $U(2)$ は正しい。

以下に、証明の outline を示す。



$n=2$ であるから、 $\partial\Gamma = \{a, b\} \subset K_1$ とする。(上図)

$B_0^2 = B_1$, S^2 に開いて、 K_1 を含む 3-cell を B_2 , $B_1 \cup B_2 = V$ とおく。

V は solid torus. $D_0^2 = D_i$ ($i=1, 2$) とおく。

Lemma. 0. $K \in K_1 \#_2 K_2$ に対し、上の V を考えた時、次の (i) ~

(iii) をみたす (W, D) が存在するから、 K_1 は trivial knot である。

(i) D : disc in S^3 s.t. $\partial D = K$.

(ii) W : solid torus in S^3 s.t. $V \subset \overset{\circ}{W}$ かつ、 $V \neq 0$ in W

($V \neq 0$ は、homotopic to 0 でないことを意味する)。

(iii) $D \subset \overset{\circ}{W}$ □

(証明は、 W の universal cover を考える。(略))。

この lemma. を用いて、次のことがわかる。

lemma. 1. trivial knot $\in K_1 \#_2 K_2$ なら、 V は S^3 の knot としてい

る (V の core が knot である) なる。 K_1 は trivial knot である。

よ、2. Th. 2. の証明において、 V は unknotted のときのみ示せばよい。

Th. 2. の証明.

K_1, K_2 : non-trivial, $K \in K_1 \# K_2$ から trivial knot, 上の V は unknotted と仮定して、矛盾を導く。この時、

Lemma 2. 次の様な disc D が存在する。

(i) $\partial D = K$.

(ii) $D \cap \partial V = l \cup C_1 \cup \dots \cup C_\mu$ であり、 l は A と B を結ぶ simple arc,

C_i は simple closed curve.

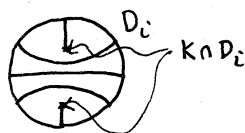
(iii) C_i は innermost on D であり、 C_i が D に bound する disc を d_i とするとし、 $d_i \subset \overline{V^c}$. (d_i は V の外側に張られている)

(iv) C_i は 次の2つの場合のいずれか。

(a) C_i は V の longitude (i.e. $C_i \neq 0$ on ∂V).

(b) $C_i \sim 0$ on ∂V であり、 C_i は ∂V に disc d'_i を bound するから、 d'_i は l を内部に含んでいる。

(v) $D \cap D_i \subset D_i$ ($i=1, 2$) は下図の如くである。



(vi) l は C_j の subarc γ_1 と、 ∂D_i ($i=1$ or 2) の subarc γ_2 とで成る

closed curve γ から、 ∂V 上に、 $\partial(D_1 \cup D_2)$ とは γ_2 のみで交わる。

る disc $d \in \text{bound}$ する時には、 d の内部に必ず A または B が含まれてゐる。』

$m_i = \#(l \cap \partial D_i)$ ($i=1,2$) とすると、上の (vi) の条件より、 $m_1 = m_2$ がわかる。 $m = m_1 = m_2$ とおく。

$P_{ij} = \#(c_j \cap \partial D_i)$ とおくと、同様 $P_{ij} = P_{ji}$ $\sum_{j=1}^n P_{ij} = P_i$ とおく。また、 $P_1 + \dots + P_n = P$ とおく。

$D_0 = D \cap V$ とし、 $D_0 \cap (D_1 \cup D_2)$ を D_0 で観察する。

$N_0 = \#(\partial D_0 \cap (\partial D_1 \cup \partial D_2))$ とおくと、

$$\begin{aligned} N_0 &= \#(l \cap \partial D_1) + \#(l \cap \partial D_2) + \sum_{i=1}^n \#(c_i \cap \partial D_1) + \sum_{i=1}^n \#(c_i \cap \partial D_2) + 4 \\ &= 2m + 2P + 4. \end{aligned}$$

$\Sigma = \Sigma$ 、上の N_0 個の点 Σ を結ぶ ∂D_0 、 $D_0 \cap (D_1 \cup D_2)$ の subarc は

$N_1 = \frac{3}{2} N_0$ 本 (N_0 個の各点には 3 本ずつ集まるから) あるから、

これを $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_1}$ とする。また、 $\bar{O}_1, \dots, \bar{O}_{N_2} \in$

$D_0 - \bigcup_{i=1}^{N_1} \lambda_i$ の connected components とする。

ここで、上の m, P_i について、 $m \leq 1$ かつ $\exists i \leq n \quad P_i \leq 2$ なる S 、 K_2 が unbranched となる、矛盾ゆえ、 $m \geq 2$ かつ、 $\forall i, P_i \geq 3$ としよ。

$\Sigma = \Sigma$ 、上の $\{O_i\}$ に関して、場合分けする。

Case 1. 各 O_i が open 2-cell の時。

この時、 N_0 個の points Σ 0-cell、 $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_1} \in 1\text{-cell}$ 、

$\bar{O}_1, \dots, \bar{O}_{N_2} \in 2\text{-cell}$ とする。 D_0 の cell 分解が与えられたこと

になる。簡単のため、 O_i a closure も O_i とかくことにする。

次の言葉を使う： O_i a m -辺形とは、 ∂O_i a m 個の 1-cell からなる時。

よって、次の式が成立する：

$$N_0 - N_1 + N_2 = 1 - \mu.$$

これより、

$$N_2 = \frac{1}{2} N_0 + 1 - \mu = m + p + 3 - \mu \quad (*)$$

次に、 $O_1, \dots, O_{N_2}$ を次の様に分類する。

i) ∂O_i a knot 上の点を含む。

(この様子 O_i a 個数は、高々 5 個)

ii) ∂O_i a knot 上の点を含まない。これをさらに分ける。

1) $O_i \subset B_1$ 2) $O_i \subset B_2$

iii) a 2-cell が α 個、iv) a 2-cell が β 個とする。

Assertion 1. 上の ii) の i) の 2-cell は、2 辺形、4 辺形、6 辺形では、ありえない。

このことより、次の 2 組の式のうち、一方は成り立つ：

$$\textcircled{1} \begin{cases} \alpha + \beta + 4 \geq N_2 \\ m + p - 2 \geq 4\alpha \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} \alpha + \beta + 5 \geq N_2 \\ m + p - 4 \geq 4\alpha \end{cases}$$

Assertion 2 ii) の ii) の 2-cell に、2 辺形は含まれてはいない。

iii) に帰着される。矛盾が出る。

よって、iii) の ii) の 2-cell は、少なくとも、4 辺形以上としてよい。

よして、更に、次の2つの場合に分ける。

A) i) の D) の 2-cell に、実際 4 辺形が含まれる場合。

B) ii) の D) の 2-cell は、少なくとも 6 辺形以上の時。

A) の時には次式が成立する。

$$2\beta \leq p+m-1-2\mu \quad \dots \quad (**)A$$

B) の時

$$3\beta \leq p+m-1 \quad \dots \quad (**)B.$$

(*) と ①, ②, $\{(**)A, (**)B\}$ の、いずれの組み合わせ (特に $\{(*), ①, (**)A\}$) であっても、矛盾がでて (単純計算) Case 1. の証明がわかる。

Case 2. は、cell-decomposition に従って、いろいろな場合があるが、cell-分割に従って、2 つの部分を取り出して、上と同様の議論をする。以上で略証あり。□

$n \geq 3$ については、今の所不明である。

Reference.

[1] Kinoshita-Terasaka: Osaka Math. J. 9(1957) 131~153

[2] H. Terasaka: Osaka Math. J. 12(1960) 113~144.

[3] H. Schubert: Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 3.

Abh. (1949)