

On Graphs and Ball Coverings of 3-Manifolds

相模工大 津久井康之 (Yasuyuki Tsukui)

3次元多様体を Graph で表現するいくつかの方法がある。
ここでは 3-manifold の nice な ball covering を通して
得られる 4-regular Graph と edge 4 colouring について
報告する。残念ながら、甘い期待が裏切られたという報告と
なった。

§1. nice ball covering と bone

連結な closed 3-manifold M が connected sum に因りて
 $S^1 \times S^2$ 及び $S^1 \times_{\tau} S^2$ (S^1 上の twisted S^2 -bundle) を factor
として持たないとき、handle free と呼ぶ。

(i.e. $M \neq M' \# S^1 \times S^2$, $M \neq M' \# S^1 \times_{\tau} S^2$)

$B_1^3 \cup \dots \cup B_k^3 = M^3$ で $B_i^3 \cap B_j^3 = \partial B_i \cap \partial B_j$ は 2-manifold ($i \neq j$)
のとき $B = \{B_1, \dots, B_k\}$ を M の ball covering とし、
 k の minimum を $b(M)$ と記し M の covering number とし。

M^3 が non-trivial ($M \neq S^3$) で handle free のときは $b(M)=4$ で、常に $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ は finite 2-disks となる。

$B_i \cap B_j \supset D_1^2$, $B_k \cap B_l \supset D_2^2$ が 2-disk components ($i \neq j, k \neq l$) のとき $D_1 \neq D_2$ なら

$$D_1 \cap D_2 = \begin{cases} \emptyset \\ \text{points} \\ \text{arcs} \end{cases} \quad \text{のどれか}$$

であるが $D_1 \cap D_2 = \text{arcs}$ のときは幾何的な操作で ball covering $\mathcal{B}$ をより構造の簡単な ball covering に変えることができる [1, 2]。

結局 closed な handle free 3-manifold に対しては

$$D_1 \cap D_2 = \begin{cases} \emptyset & \text{or} \\ \text{points} & \text{or} \\ \text{an arc} \end{cases}$$

とできる。これを nice な ball covering という。

M^3 の ball covering $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ に対して
 $\mathcal{B}^3 = \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^2 = \{D \mid B_i \cap B_j \supset D^2 \text{ 2-disk component } i \neq j\}$
 $\mathcal{B}^1 = \{A \mid B_i \cap B_j \cap B_k \supset A \text{ arc component } i < j < k\}$
 $\mathcal{B}^0 = \{p \mid B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \supset p \text{ point}\}$

とするとき $\mathcal{B}$ が nice なら $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^1)$ は simple-Graph となる。 $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}(M, \mathcal{B})$ を Mob-bone と呼ぶ。

§2 b-bone の性質

Graph $G=(V, E)$ が 3-manifold M の b-bone であるとき
 次の性質 (*) をもつ。

- (*) {
- (1) G は simple quartic (4-regular), nonplanar
 - (2) G は edge 4-colourable : $c: E \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ を
 1つの colouring とすると
 - (3) $\bar{G}_i = (V, E - c^{-1}(i))$ は planar graph として
 S^2 の embedding は unique
 - (4) $\bar{G}_{ij} = (V, E - c^{-1}(\{i, j\}))$ は 有限 k 個の cycle
 で各 cycle は ∂B_k^3 上で互いに ~~交わり~~ 交わらない
 k 個の 2-disk を bound する ($i \neq j, i \neq k \neq j$).
 - (5) $\# \bar{G}_{ij} = \# \bar{G}_{k\ell}$ (components の個数),
 $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$G=(V, E)$ が b-bone のとき $c: E \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ を
 $c(e) = i$ if $e \notin \partial B_i$ ($e \subset B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap B_{i_3}, i_1 < i_2 < i_3$)
 と定めると $\bar{G}_i$ は 3-regular planar ($\subset \partial B_i$).

~~edge~~ edge 3-connected 故 embedding は unique.

$\bar{G}_{ij} = \{C_1, \dots, C_k\}$ (C_i : cycle) とすると

$$|C_1 \cup \dots \cup C_k| = \partial(B_k \cap B_\ell) = \partial(D_1^2 \cup \dots \cup D_m^2) \subset \partial B_k, \\
 \subset \partial B_\ell$$

(且 $\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$.)

また $(B_i \cup B_j, B_k \cup B_l)$ は M の Heegaard 分解を与えるから (5) が得られる。

このように handle free closed 3-manifold (S^3 を含む) M の nice な ball covering (常に存在、一般に unique でない) $\mathcal{B}(M)$ に対して unique な b-bone $\mathcal{B}$ と edge colouring c が定まる。

逆に 性質(*) をもつ connected graph 全体を $\mathcal{Q}$ としたとき、 $\mathcal{Q}$ の元 $G=(V, E)$ と (*) の (3)~(5) を満たす G の edge colouring c , (G, c) に対して自然に 1 つの ball covering $\mathcal{B}(G, c) = \mathcal{B}(M)$ と 3-manifold M が定まる。

nice ball covering と b-bone with colouring は 1-1 の関係にある。しかし 3-manifold 1 つに対してたくさんの $\mathcal{Q}$ の元 (と colourings), bone 1 つに対して (いくつかの colourings があって) たくさんの 3-manifolds という関係である。従ってこれらの関係がもっと整理されることを望まれる。

§ Connected sum と b-bone

quartic graph $G=(V, E)$ と $G'=(V', E')$ に対して、

$$v \in V, \quad vv_1, vv_2, vv_3, vv_4 \in E, \quad v_i \neq v_j \neq v \quad (i \neq j)$$

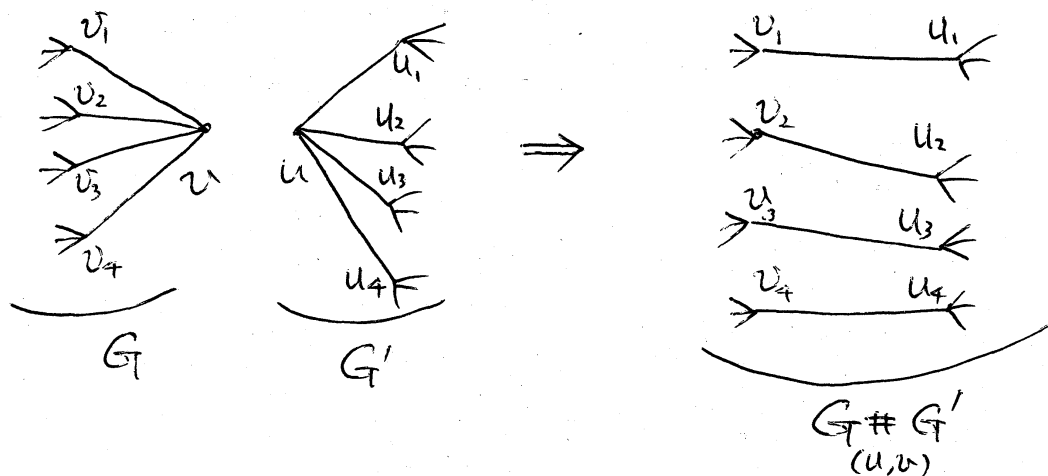
$$u \in V', \quad uu_1, uu_2, uu_3, uu_4 \in E', \quad u_i \neq u_j \neq u \quad (i \neq j)$$

とするとき

$$G \#_{(u,v)} G' = (V \cup V' - \{u, v\}, E \cup E' - \{vu_i, uu_i \mid i=1,2,3,4\} \cup \{v_i u_i \mid i=1,2,3,4\})$$

を G と G' の (u, v) における sum と呼ぶ。

u_i, v_i の定め方で Graph の自由さが出る。



$G \#_{(u,v)} G'$ はまた (v, u) の選び方で異なるが、これらの任意の1つを $G \# G'$ で表わす。

edge colouring は一方のものを拡張すればよいから

$$G, G' \in Q \Rightarrow G \# G' \in Q.$$

G を M^3 の b-bone G' を M' の b-bone とすると

$G \# G'$ は $M \# M'$ の b-bone となる。

nontrivial handle free 3-manifold M の degree を

$$\deg(M) = \min \{ \#V(G) \mid G = G(M), M \text{ の b-bone} \}$$

と定める。deg は homeo invariant.

$$\star \deg(M \# M') \leq \deg(M) + \deg(M') - 2$$

<平凡な予想>: $\deg(M \# M') = \deg(M) + \deg(M') - 2$.

この予想を示すには, Heegaard splitting に対する Haken の定理 ($M \cong M_1 \# M_2 \rightarrow \exists S^2: M$ の Heegaard splitting を二つに分ける) と同種の命題: (ball cov.)

◎ $\mathcal{B}$ が handle free $M \cong M_1 \# M_2$ の (nice) ball covering ならば $\exists S^2 \subset M: S^2 \cap B_i \cong 2\text{-disk } i=1, 4$, が成立すれば都合がよい。

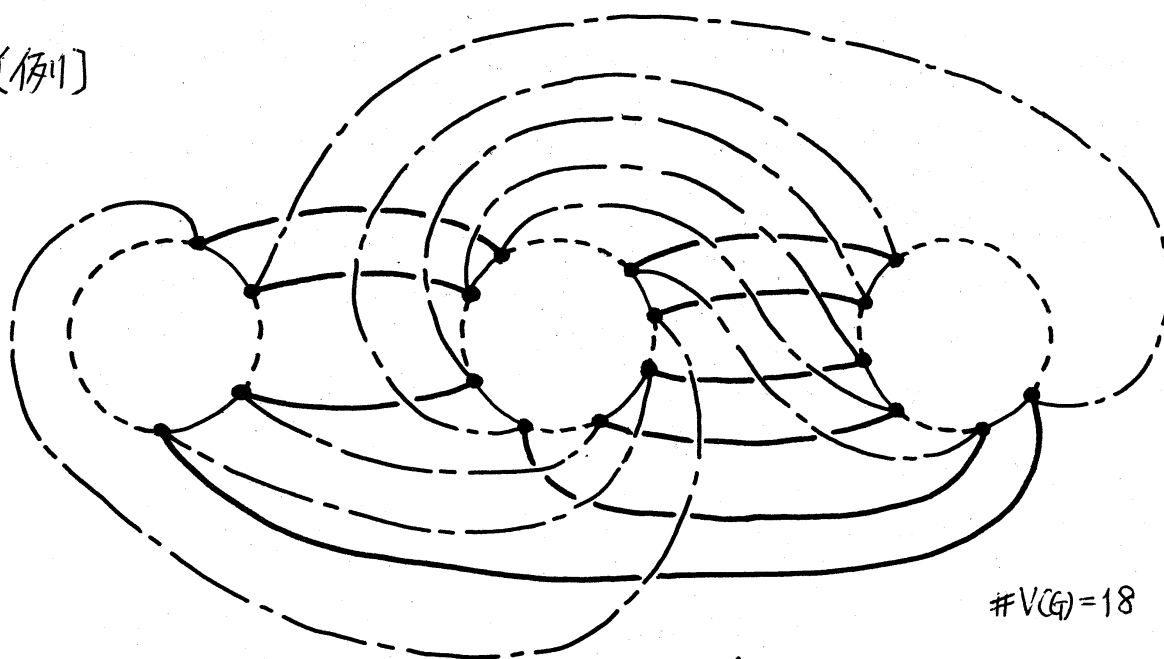
b-bone の場合に次は成立。

◎ $G \in \mathcal{Q}$ が essentially 5 edge-disconnected ならば $G \cong G_1 \# G_2$ (すなわち $M(G) \cong M_1 \# M_2$) または $\exists G' (\deg(G') < \deg(G): M(G) \cong M(G'))$ 。

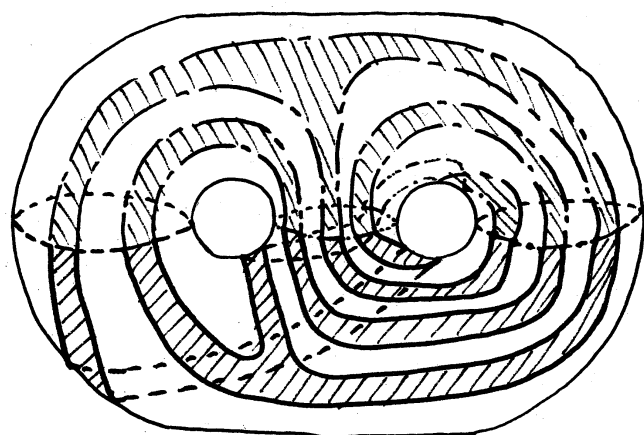
但し quartic graph (4 edge-connected) G が essentially 5 edge-disconnected とは「 $E(G) \ni e_1, e_2, e_3, e_4: G' = (V(G), E(G) - \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$ が disconn. かつその 2つの成分とも 2, 以上の頂点を含む」ことである。(上のアンダーラインのまたは以下の場合には実際には起らないであろう)。

以下に、残念ながら ◎ が成立しないことを示す例をあげておく。 ◎ のような S^2 の存在と $G(\mathcal{B})$ が essentially 5 edge-disconnected なこととは同値で、これを使う。

[例]



b-bone G with edge 4 colouring $(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ | & | & | & | \end{smallmatrix})$



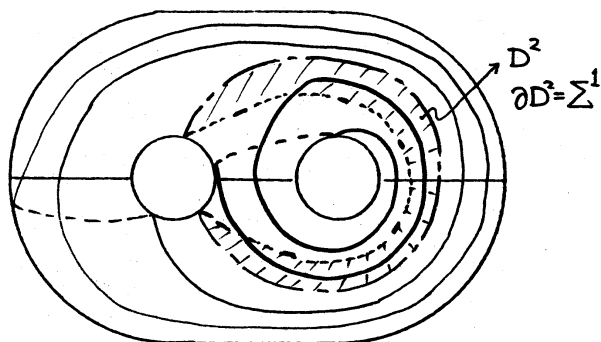
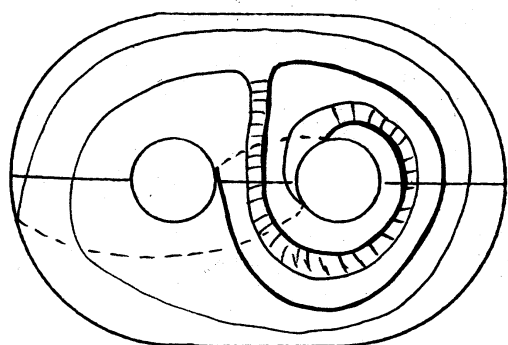
$\mathcal{P} = \mathcal{P}(G)$

$B_1 \cap B_3$: $\equiv$ G から作られる
Ball Covering
 $(B_3, B_4 \text{ 省略})$

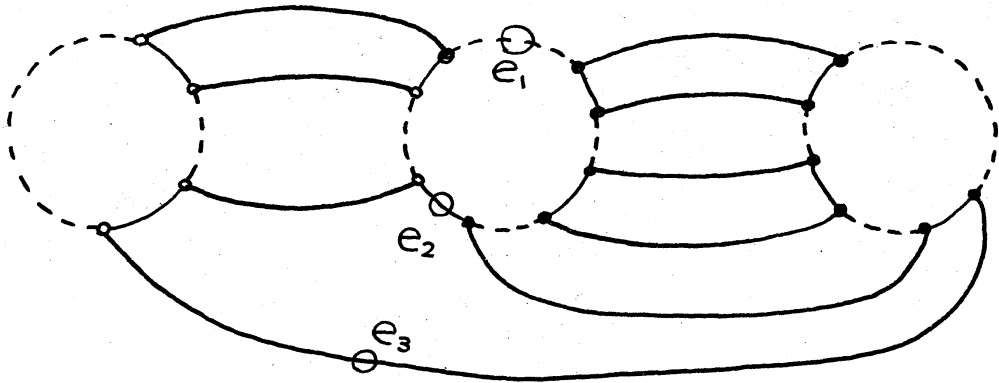
$$M(G) \cong P^3 \# P^3$$

$\downarrow \Sigma^1 = \partial D^2$ は splitting S^2 の一部

Heegaard Splitting (handle sliding)

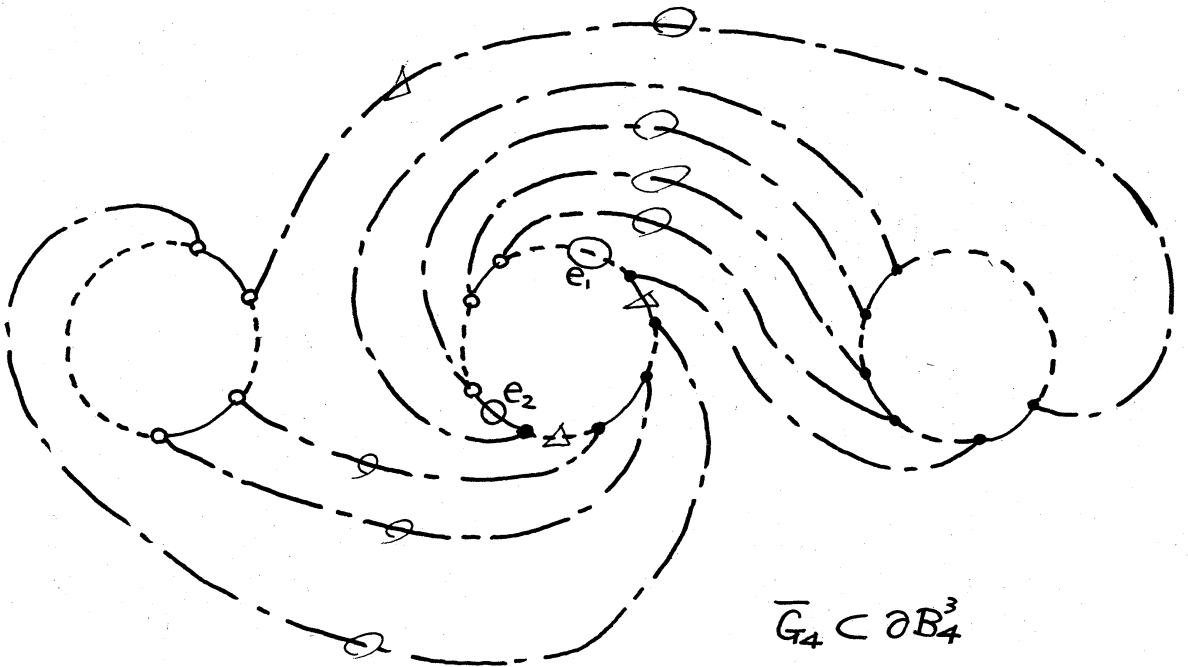


もし G が essentially 5 edge disconnect ならば $\bar{G}_3 = (V, E - \bar{c}'(3))$ は essentially 4 edge disconnected. $\bar{G}_3$ に対しては $\{e_1, e_2, e_3\}$ のみ,



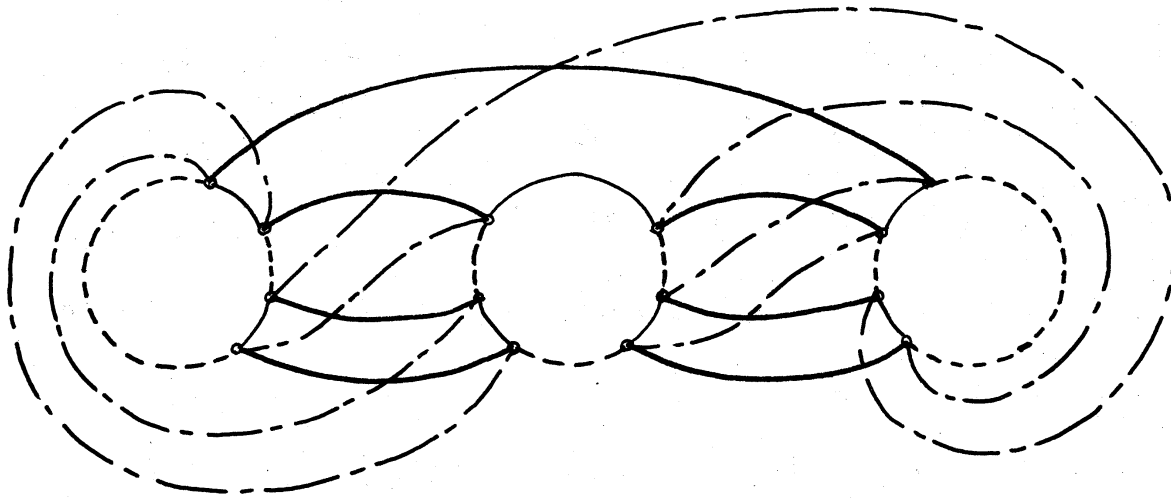
$$\bar{G}_3 \subset \partial B_3^3$$

同様に $\bar{G}_4$ に対しては ΔE の 3 個. $\bar{G}_4$ で e_1, e_2 の他は $\bar{c}'(3)$ の元では disconnect にするためには 7 個必要.



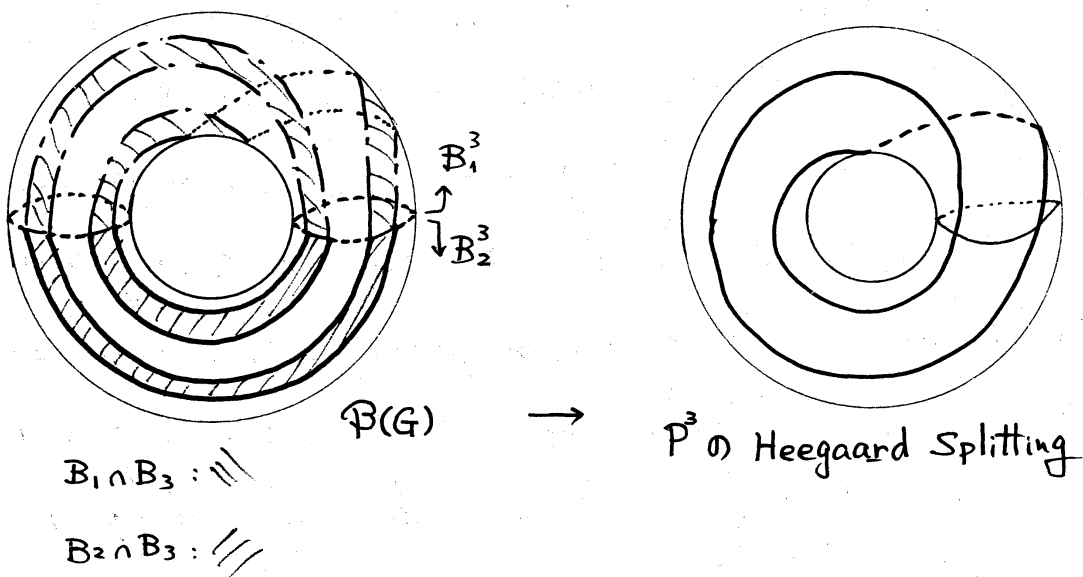
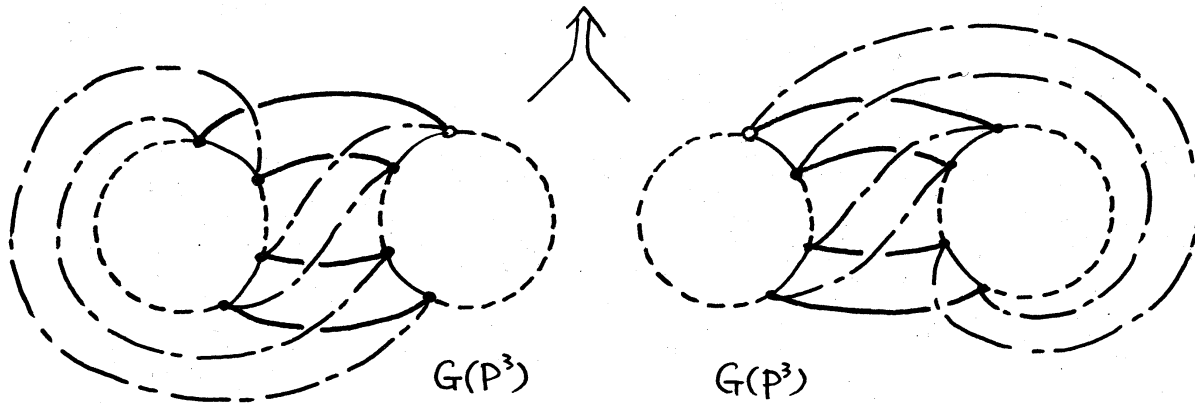
$$\bar{G}_4 \subset \partial B_4^3$$

従って G は essentially 5 edge disconnect ではない.
故に G は ㊦ の反例である.



$$\#V(G) = 14$$

すなわち $G(P^3 \# P^3)$ の例



Remarks.

1. Heegaard Splitting に関する Haken の定理の一部、
 次のような命題はまだ可能性がある。

△ M が handle を持つとき ($M \supset S^2$ $S^2 \neq \emptyset$).

M の ball covering $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ に対して $\exists S^2 \subset M$,

$$S^2 \cap B_i = \emptyset \quad i=1,2, \quad S^2 \cap B_j \cong D^2 \quad j=3,4.$$

◎ は 2-manifold に対しても成立しないが上の △ は成立つ。

2. Q (4-regular with property $\star$) の元の sum
 $G \# G'$ には sum 自身が 4 colourable という条件を付
 け加えなくてはならない。

3. handle free closed 3-manifold M^3 の Heegaard-
 genus $g(M)$ と b-bone には次のような関係がある。

$$1 + g(M) = \min \left\{ \min_{j=1,2,3} \# \overline{G}_{4j} \mid G = G(M) \text{ は } M \text{ の } b\text{-bone} \right\}$$

handle free closed 3-manifold M の Heegaard Splitting
 $(M; V_1, V_2)$ ($V_1 \cup V_2 = M$, $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$) が与えられる
 と自然に ball covering $\mathcal{P}(M) = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ が得られて
 $(B_1 \cup B_2 = V_1, B_3 \cup B_4 = V_2)$ 、一般には $\deg \mathcal{P}'(M) \leq \deg \mathcal{P}(M)$
 なる $\mathcal{P}'$ がある。しかし minimum genus の Heegaard-Spli-
 tting から minimum degree $\deg(\mathcal{P})$ の ball covering (b-
 bone) が得られる保証はない。(lens space $L(p, q)$,
 $q > 1$ ($L(5, 3)$ ) 等)。

4. b -bone G に対して $\bar{G}_b$ は常に bi-partite.
5. minimum degree $g(M \# M')$ をもつ b -bone (ball covering) に対する ⑤ の反例はいまのところ見つかっていない.
6. $M(G) \cong M(G')$ のときの G と G' の関係を調べるには nice ball covering の範囲ではむかしい.

REFERENCES

- [1] 津久井康之: "3-Manifold の Normal spine と Ball covering"
 数理解析研究所講究録 524 (1984) 「多様体と Fake Surfaces」 p 9-20.
- [2] 津久井康之: "3-Manifolds, Spines and Graphs"
 数理解析研究所講究録 563 (1985) 「Theory of Spines of 3-manifolds」 p 84-90