

ウェーブレットによる地球科学データ解析例

山田道夫（京大数理研）

1. はじめに

ウェーブレット解析は、1980年代の初めに地震波の解析を発端として始まり、以後、地震、気象、海洋、地球磁場など、環境科学とも関連して年々豊富になる観測データの解析に多くの適用が試みられている。ここでは、ごく一部分ではあるが、そのような地球科学データの時間周波数解析へのウェーブレットの応用例を短く紹介する。

多くの時間周波数解析手法がある中で、データ解析上のウェーブレットの利点は、まず、解像度の調整が可能であること（高周波数ほど高解像度）、また、離散ウェーブレット、特に直交ウェーブレットに関しては、時間周波数面における独立成分への分解を与えるので、時間周波数面におけるデータ操作が可能になること、さらに、展開の収束が速く能率のよい表現が可能なが挙げられる。

以下では、このような点と関連するデータ解析の例として、乱流速度の時系列の統計的特徴の検出、ドップラーレーダー画像からのメソサイクロン検出、人工地震波の構成、さらに、地震波解析などへの応用を意図した目的波形に近い双直交ウェーブレットの構成の試み、について述べる。

2. 乱流速度時系列

空間の一点で測定した大気乱流の速度時系列が特徴的なフーリエパワースペクトル形（振動数の $-5/3$ 乗, Kolmogorov スペクトル）を持つことはよく知られている。しかしこの時系列はパワースペクトル（2次相関）だけでは記述できない性質を持っており、それをどのように特徴づけるかは、Navier-Stokes 方程式の解の統計性質についての、未だ解決されていない問題である。図1(a)は大気乱流データの一例である。これは熱線風速計によって観測された速度時系列データでフーリエスペクトルは明瞭な Kolmogorov スペクトルを示している。この時系列のフーリエ係数を、絶対値は固定したまま、位相部分を人工的に乱数によってランダム化した時系列が図1(b)である。当然これは図1(a)と全

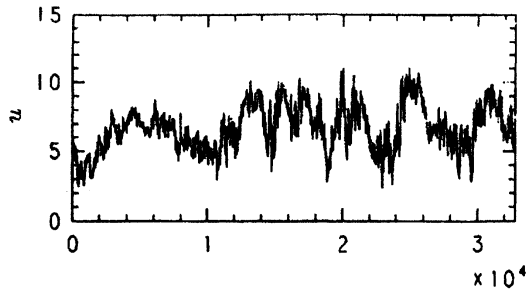


図1 (a)大気乱流の速度時系列

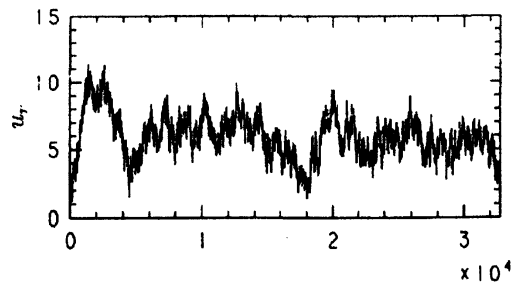


図1 (b)ランダム位相時系列

く同一のフーリエスペクトルを持っている。

この2つの時系列の性質は、直交ウェーブレット展開の展開係数を見ると捉えやすい。ここでは Meyer ウェーブレットで展開によって

$$u(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

と展開し、その展開係数のうち周波数のパラメータが $j=14$ のものについて分布密度関数（実際にはヒストグラムを平均ゼロ、分散1に規格化）を作ったものを図2に示す。標準正規分布（実線）と比較すれば、両者の違いは顕著であり、このような相違の詳細（ここでは立ち入らない）を扱うには直交ウェーブレット展開は都合のよい道具である。なお、このような分布を扱うには、展開係数の独立性が保証されていることが必要であるが、時間周波数解析でこのような保証が容易に得られるものとして、直交／双直交ウェーブレットは殆ど唯一の選択であると思われる(M.Yamada and K.Ohkitani, Prog. Theor. Phys., Vol.86-4, 1991, pp.799-815)..

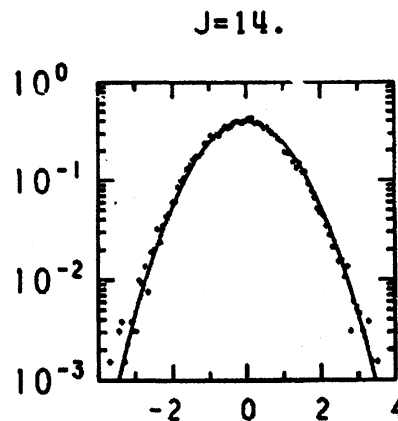
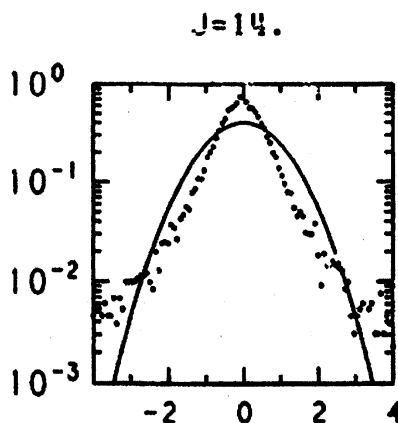


図2 ウェーブレット展開係数のヒストグラム. (a)大気乱流(b)ランダム位相時系列

3. ドップラーレーダーによるメソサイクロン検出

雷雲や竜巻など激しい気象現象の発生を捉えるために、ドップラーレーダーと呼ばれる特殊なレーダーが用いられている。これは、雲中の雨粒によるレーダー電波の反射波を捉えて、その周波数のドップラーシフトを測定し雨粒の視線方向速度を得るものである。雨粒の動きは背景の風によって支配されているので、雨粒の速度は風の色度を与えろと考えられる。

通常、ドップラーレーダーは数百 km 先の現象を捉えるが、竜巻は直径がせいぜい 1km の現象であるため、竜巻を直接捉えることは困難である。そこで、竜巻を伴う上空の直径 10km 程度の回転する渦（メソサイクロン）を捉えることによって、竜巻の観測・予報が行われる。レーダー画像からこのような竜巻を検出することは、しかし、それほど容易ではない。それは、レーダー画像上では渦は多くのノイズを伴っていることや、渦そのものが正速度と負速度の対として現れるため単なる数値の大小だけでなくパターンの認識を行うことが必要であるためである。

ここではまず、ドップラーレーダー画像に直接2次元連続ウェーブレット変換を適用し、いわば帯域通過画像（図3）を得る。これによって観測に伴うノイズが相当程度除去されメソサイクロンに特徴的な正負の速度の対をいくつか検出することができる。これらの箇所では現実に竜巻の発生が観測されている。しかしこのような画像処理では、先に述べた理由からメソサイクロンの自動検

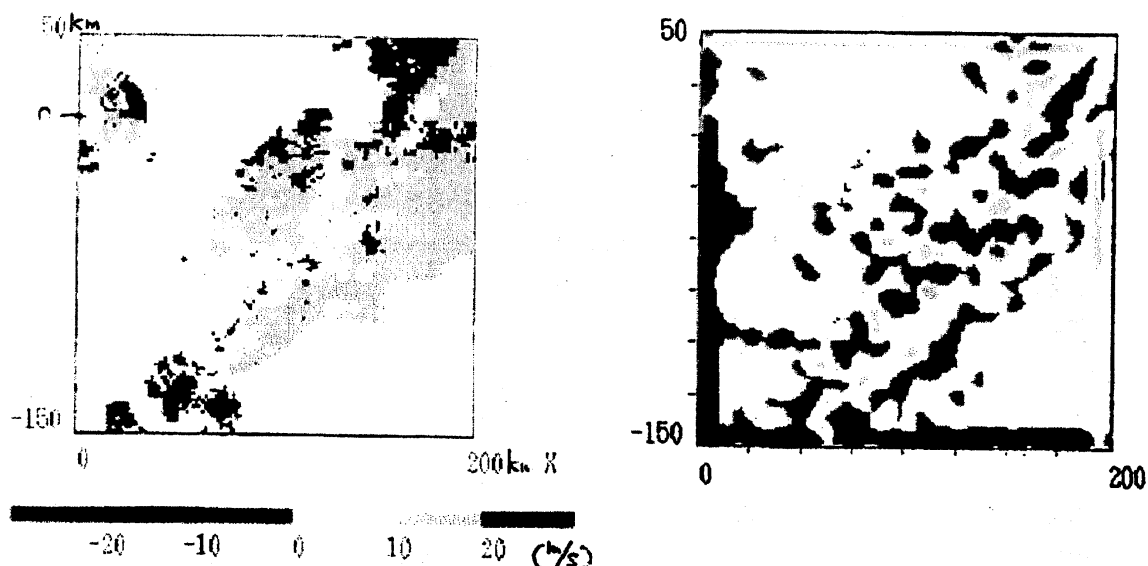


図3：ドップラーレーダー画像（左）とその連続ウェーブレット変換画像（右）

出はアルゴリズム的に難しい。そこでレーダー画像の連続ウェーブレット変換に対し、さらに、理想的な渦のドップラーレーダー画像の連続ウェーブレット変換との内積をとり、この内積の値の極大値によってメソサイクロンの位置を検出しようとしたものが図4である(C-F.Liu and M.Yamada, 1999)

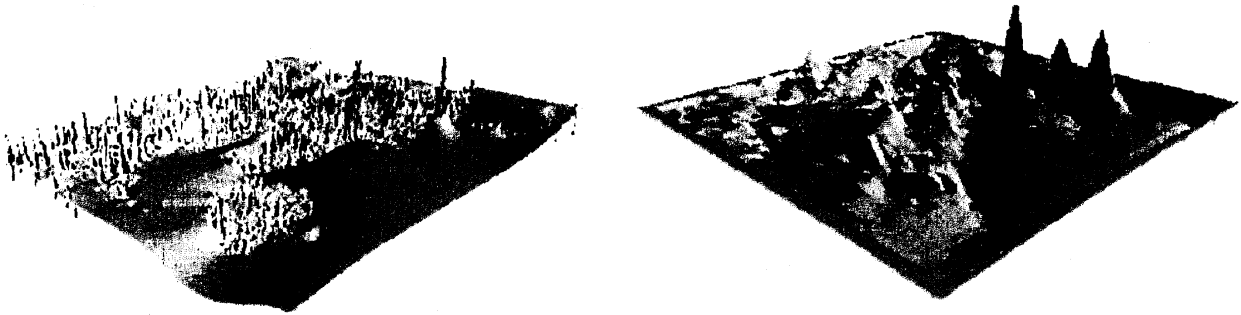


図4：ドップラーレーダー画像（左）と内積値（右）

内積値は理想的な渦の位置をパラメータに持つので、図4の右図では内積値を位置の関数としてプロットしている。図中に見られるピーク的位置は地上観測におけるメソサイクロンの発生位置と一致しており、この検出方法の有効性を示している。この解析は、更に進めることで、渦の大きさと強さ、あるいは鉛直構造の検出にまで応用することが可能である。このように連続ウェーブレットは、ある特定のパターンの同定・検出において敏感な道具である、というのが使用してみても印象である。

4. 人工地震波動の作成

大規模構造物の耐震設計には、耐震性の数値実験が必要であるが、そのための強震動のデータで耐震設計基準を満たす強震動データは、まだそれほど多くないのが現状である。そこで、人工的に強振動データを作成して使うことが必要となるが、どのような手法で人工地震データを作成するかは、実用的な意味でも未だ十分なものは得られていない。耐震設計基準では、例えば、建築物の速度応答スペクトルの形と大きさが、ある定められた条件を満たす地震動に対して安全性を確認することとなっているが、この基準では地震の時間周波数特性については自由度が大きい。

問題の困難の一因は、地震動の時間周波数特性、つまり、荒く言って、高周波数成分は地震の初期部分にあり、低周波成分は地震の後半部分にある、という特性をどのように取り込めばよいか、という点が未解決であるためである。こ

これは地震動の特徴づけとも絡む問題であるが、現実に応用できるような定式化は未だ見出されていない。そこでここでは、過去に観測された強振動波形を組み合わせることで、要求される速度応答スペクトルを持つ地震動を作成することを行う。この「組み合わせ」を実行するために、まず、観測強振動波形を Meyer ウェーブレット展開し、その展開係数を各周波数帯毎（すなわち各 j 毎）に別々に線形和を作り、その係数を最適化することで要求された速度応答スペクトルの条件を満たすようにする。この方法は、Meyer ウェーブレット展開は能率のよい展開を与えること、また、各ウェーブレットは周波数空間でコンパクトサポートであるので、時間周波数展開ながらもフーリエ解析に近い扱いが可能であること、によっている。

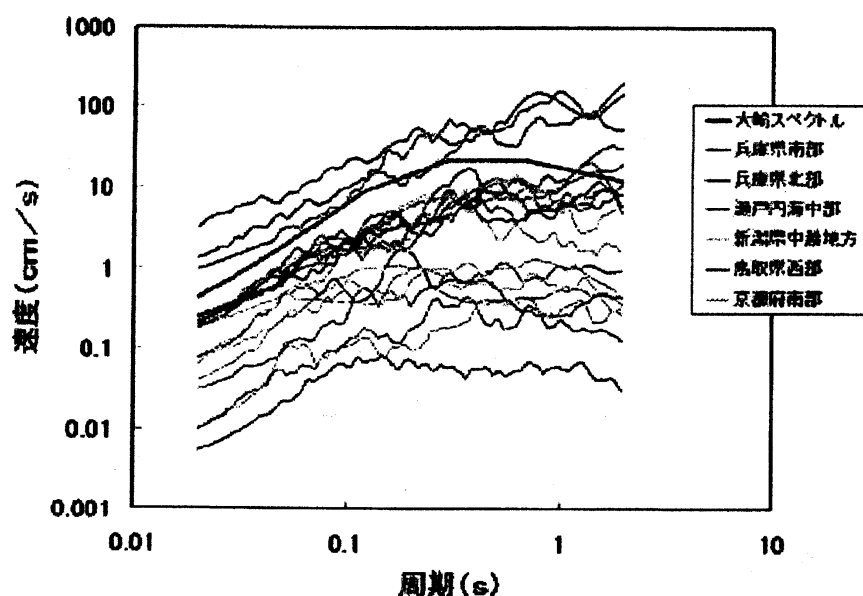


図5： 大崎スペクトル ($M=7$, $\Delta=30\text{km}$) と観測地震波形
(震源距離 20~40km) の応答スペクトルの例

図5は人工地震動作成に使用した観測地震の応答スペクトルと目標応答スペクトル（大崎スペクトル）を示す。現実の地震で目標応答スペクトルを満たすものはまず存在しない。図6はウェーブレットを使って作成された人工地震波の応答スペクトルである。目標応答スペクトルとの一致はよく、現在の耐震設計基準を満たしている。図7は、いくつかの強度（マグニチュード）と震源距離について、このようにして作成された人工地震波を示す(玉置哲男、田辺章、中村雅彦、佐々木文夫、水町渉、山田道夫：「地震波の波形を利用した人工地震波の作成」日本地震工学会論文集、第3巻、第3号、pp.1-12.)。現在の設計に用

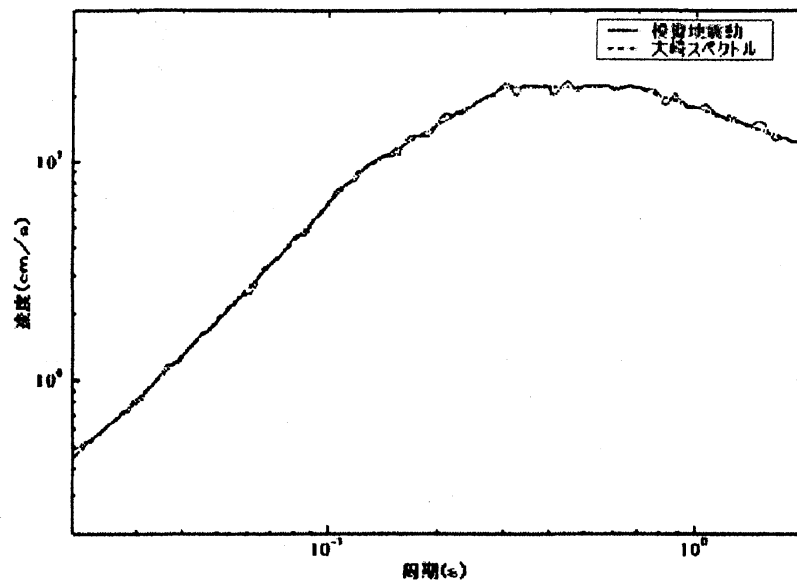


図 6 : 大崎スペクトル ($M=7$, $\Delta=30\text{km}$) と
模擬地震動の応答スペクトル

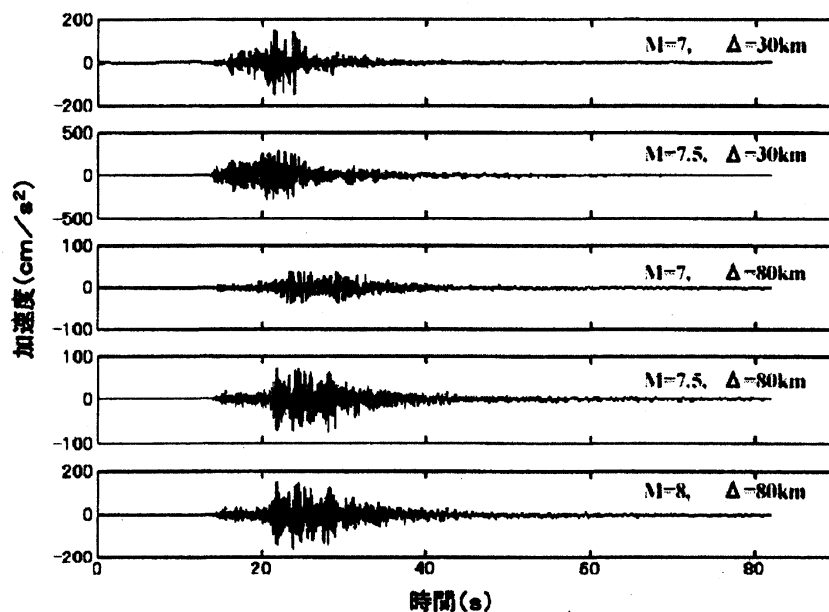


図 7 : 大崎スペクトルを満たす模擬地震動の時刻暦の例

いられている人工地震波は、例えば、位相のランダム化の結果、大振幅振動が長時間にわたって続くような、現実には考えにくい場合もあり、これに比して、ここで作成したものは、少なくとも見かけ上、現実に近い波形を持っている。この地震動が設計に適しているかどうかは今後の検討課題であるが、ウェーブ

レットの応用の観点から見た場合、展開の収束性のよさは制御すべきパラメータの数の低減につながるため、時間周波数特性に関する要求をもつ関数（データ）作成問題については、有利な手法を与えるものと期待される。

5. 目標波形に近い双直交ウェーブレット

ウェーブレット変換におけるマザーウェーブレットの選択は、データ解析に際してほとんど常に問題である。最適な選択について現実的で有効な指針がない現状では、「経験と勘」に頼らざるをえない。しかし場合によっては、望ましい波形が想定できることもあり、このような時、その波形に近い離散ウェーブレットを作成するアルゴリズムは有用性が期待される。実際には、このような条件を満たす直交ウェーブレットを作成することは、直交ウェーブレットのための条件が厳しく実用的でない。そこで、双直交ウェーブレットの範囲で与えられた波形に L^2 の意味で近いウェーブレットを作成することを考える。このための一つの方法は、シンボル関数を有限級数の形に仮定して、その係数を最適化して双直交ウェーブレットを作成することである。図8はメキシカンハット関数を目標関数とした場合の双直交ウェーブレットを示す(M.Yamada and F.Sasaki, JJIAM, vol.18, no.2, 2001, pp.307-320)。

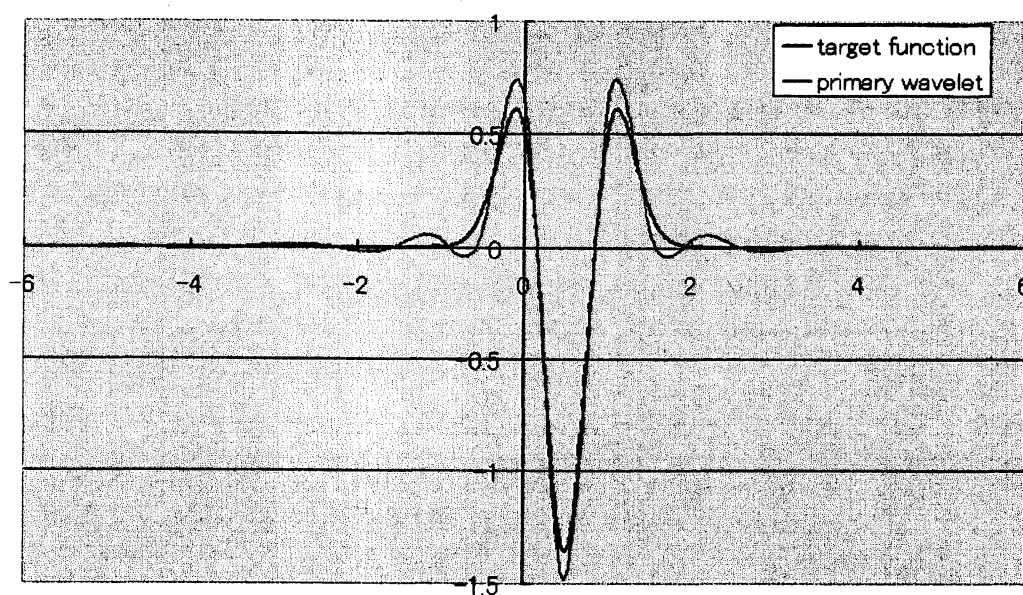


図8：目標関数（メキシカンハット）と双直交ウェーブレット

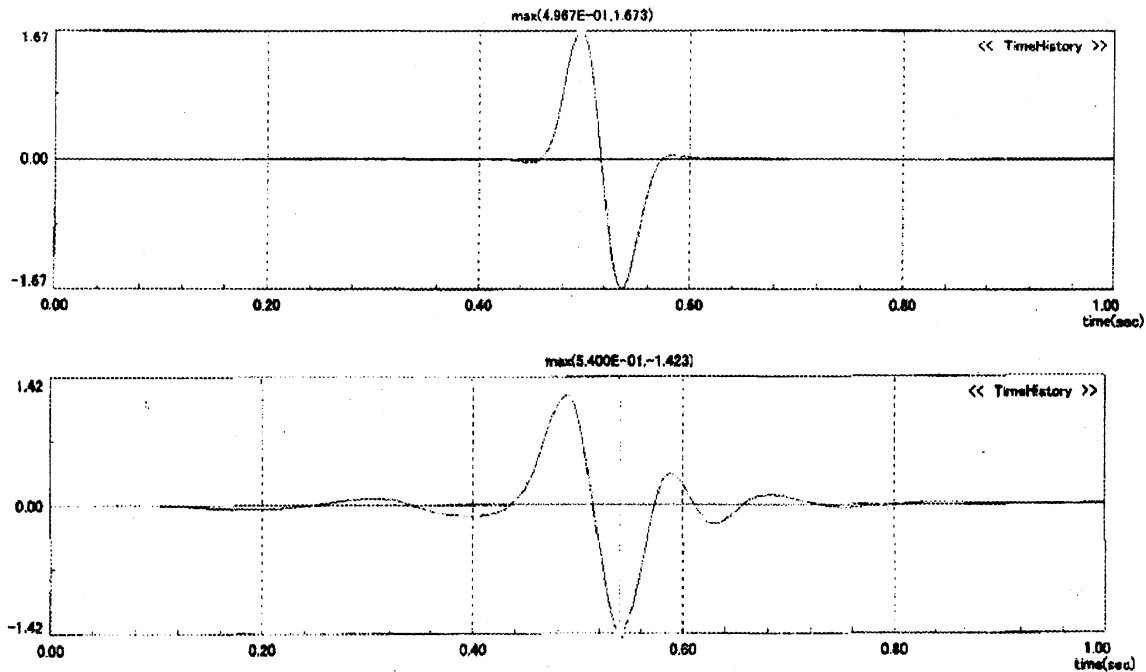


図9：目標関数（上）と双直交ウェーブレット（下）

図9は、振動の1周期を目標関数とした場合の結果である。この結果が実用的に有効かどうかは問題の種類に依存するが、例えば、与えられた地震波形の展開表現の能率を、通常行われる展開のエントロピーを使って評価すると、Daubechies や Meyer など標準的な直交ウェーブレットよりも幾分有利な展開を与えている。ただしこの場合、目標波形が地震動表現に適した波形かどうかという問題もあるため、実用的評価を行うことは現段階では難しい（これらの結果は佐々木文夫氏（鹿島建設）との共同研究による）。

6. おわりに

地球科学データに対するウェーブレット解析の応用は、現在も多くの研究が進展中である。ここでは触れなかったが、地球科学的状況において興味ある問題の一つは、球面 (S^2) 上における有用なウェーブレット展開、あるいはウェーブレット類似の展開手法である。従来、群論的考察に基づいて、球面上の連続ウェーブレット変換が提案されているが、現実のデータ解析における利点は明らかではないこともあって、あまり利用されていない。使いやすい形の連続ウェーブレット類似の表現や離散（直交）ウェーブレット展開があれば、全地球的な現象の解析に必須の道具となると思われ、期待は大きい。

なお、参考文献については、文中の引用文献およびそこに引用されている文献を参照されたい。