

虚数乗法をもつ Abel 多様体の conjugation と moduli の体について

京大 理 吉田敬之

§0. CM 型 Abel 多様体の moduli の体を定める問題は、志村-谷山 [7] の結果の精密化として志村 [5] に於いて定式化され意義が明らかにされた。ここで同時に $\text{Aut}(\mathbb{C})$ の conjugation による挙動がより基本的な問題として論じられている。その後 Langlands [2] は Shimura variety の conjugation についての一般的予想を提出した。この予想は最近 Shih-Milne-Tate により部分的解決が得られたと筆者は聞いているが、怠慢にしてまだ文献入手の努力を行っていない。しかし Langlands の予想が CM 型 Abel 多様体の conjugation とどう結びつくかは——解答に要求される具体性の level にも依存して——必ずしも明確ではないと考えられる。本稿では [5] の定式化に従って、一般的考察を行い問題点を明らかにすることを試みた。主な結果は §4 にあるが、簡単に言い切ってしまうと、obstruction は order 2 の元であり、特に CM 体の次数が奇数であれば、

単数群についての若干の仮定下に、CM型 Abel 多様体の conjugation による挙動がわかる、ということにある。(6月の研究集会では [5] について話しました。本稿はこれに関連して考えていた内容を整理したものです)。

§1. R を $\mathbb{Z}$ 上有限基底をもつ ring とするとき、type R の偏極 Abel 多様体とは、Abel 多様体 A 、 A の偏極 $\mathcal{L}$ 、 R から $\text{End}(A)$ の中への同型 θ の組 $(A, \mathcal{L}, \theta)$ をいう。 $(A', \mathcal{L}', \theta')$ を type R の偏極 Abel 多様体とする。 $(A, \mathcal{L}, \theta)$ から $(A', \mathcal{L}', \theta')$ への同型 μ とは、 A から A' への同型であって

$$1) \mu \theta(a) = \theta'(a) \mu, \quad \forall a \in R.$$

2) 偏極 $\mathcal{L}'$ に入る任意の divisor X' について $\mu^{-1}(X')$ は $\mathcal{L}$ に入る。
 という2条件を満たすものをいう。以下 universal domain として複素数体 $\mathbb{C}$ をとって考える。 P による $\mathbb{C}$ の複素多値写像を表わす。 $P = (A, \mathcal{L}, \theta)$ を type R の偏極 Abel 多様体とすると、 P の moduli の体 M とは、 $\mathbb{C}$ の部分体であって任意に $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ をとるとき、 $(A, \mathcal{L}, \theta)$ と $(A^\sigma, \mathcal{L}^\sigma, \theta^\sigma)$ が同型になるのは、 σ の M への制限が自明になるとき、かつそのときに限るという条件で特徴づけられるものである。moduli の体 M は存在して一意的である (cf. [3])。

§2. L を代数体とするとき $\mathcal{O}_L, I_L, C_L, E_L$ により L の 極大 order, ideal 群, ideal 類群, 単数群 をそれぞれ表わす. K は $\mathbb{Q}$ 上 $2n$ 次の CM 体とする. 我々の対象は type $\mathcal{O}_K$ の n 次元 偏極 Abel 多様体 $P = (A, C, \theta)$ で条件

(C1) $\theta(K)$ は 偏極 θ で定まる $\text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ の involution で stable である

をみたすものである. ここに θ を K から $\text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ への同型に拡張し、これについても同一の文字 θ を用いた. K の任意の部分体 D について、 θ を D に制限することにより、type $\mathcal{O}_D$ の 偏極 Abel 多様体 $(A, C, \theta|_D)$ を考える. この moduli の体を M_D で表わす. 明らかに $D \subseteq D'$ ならば $M_D \subseteq M_{D'}$.

ここで [5] に従い 基本的事実を復習しておく. Φ は K の、 θ を通して θ の原点の tangent space で実現される、 $\mathbb{C}$ -係数 $n \times n$ 行列による表現とする. Φ は K から $\mathbb{C}$ の中への n 個の同型写像 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ の直和と同値となる. (K', Φ') を (K, Φ) の reflex とし、 F, F' でそれぞれ K, K' の最大実部分体を表わす. K の ideal $\mathcal{O}$ と $\mathbb{C}^n$ の vector u があつ、 A は 複素トーラス $\mathbb{C}^n / \Phi(\mathcal{O})u$ と 複素解群多様体として同型となる. そこで、 $R(x, y)$ を この 基本の極因子の定まる Riemann 形式とすれば、 $\alpha \in K$, $\alpha^p = -\alpha$, α^{p^i} の虚部 > 0 ($1 \leq i \leq n$) をみたす α があつて

(1) $R(\Phi(x)u, \Phi(y)u) = \text{Trace}_{K/\mathbb{Q}}(x y^p)$, $(x, y) \in K \times K$ が成立つ. こゝとを P を $\text{type}(K, \Phi; \tau, \sigma)$ と呼ぶ.

$P' = (A', \mathcal{C}', \theta')$ を $\text{type}(K, \Phi; \tau', \sigma')$ の $\text{type } \mathcal{O}_K$ の偏極 Abel 多様体とする. P と P' は, 或る $x \in K^\times$ について, $\tau' = x\tau^p$, $\sigma' = (x^{-1})\sigma$ が成立するとき, かつそのときに限り同型である. $\{\tau'^{-1}\tau', \sigma'^{-1}\sigma\}$ は直積 $F_+ \times I_K$ の元と考えられる (F_+ は F の総正な元の成す乗法群である), $\{x\tau^p, (x)\}$, $x \in K^\times$ の形の元の成す $F_+ \times I_K$ の部分群を考え, これによる $F_+ \times I_K$ の商群を $\widetilde{C}_K$ とおく.

(2) $\widetilde{C}_K = F_+ \times I_K / \{ \{x\tau^p, (x)\} \mid x \in K^\times \}$. $\{\tau'^{-1}\tau', \sigma'^{-1}\sigma\}$ の $\widetilde{C}_K$ に於る像を $(\tau'^{-1}\tau', \sigma'^{-1}\sigma)$ で表わし.

(3) $(P' : P) = (\tau'^{-1}\tau', \sigma'^{-1}\sigma)$

により左辺を定義する. こゝとを

(4) $P' \cong P \iff (P' : P) = 1$.

K' の ideal 群 $I_0(\Phi')$ を

(5) $I_0(\Phi') = \{ x \in I_{K'} \mid x^{\Phi'} = (x), x\tau^p = \mathcal{V}(x) \text{ for some } x \in K^\times \}$

により定義すれば, $P = (A, \mathcal{C}, \theta)$ の moduli の体 M_K は $I_0(\Phi')$ に対応する K' の不分岐 Abel 拡大である. 我々の目的の一つは, M_K の部分体として $(A, \mathcal{C})$ の moduli の体 $M = M_D$ を決定することにあります.

§3. $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ をとり, $P^\sigma = (A^\sigma, C^\sigma, \theta^\sigma)$ を考える. これは type $\mathcal{O}_K$ の偏極 Abel 多様体であり, $(A^\sigma, \theta^\sigma)$ は CM 型 (K, Φ^σ) に属する. こゝに

$$(6) \quad \Phi^\sigma(a) = \Phi(a)^\sigma, \quad a \in K.$$

特に σ が K' 上自明であるときは, Φ^σ は Φ と同値であり, $\sigma|_{M_K} = [M_K/K', *]$ と $* \in I_{K'}$ をとり, Artin symbol で表わすとき

$$(7) \quad (P^\sigma : P) = (N(*), *^{\Phi'})$$

が成立つ.

まず志村 [5] において導入された次の条件を考える. K' の部分体 D' と K の部分体 D があり, K', K はそれぞれ D', D 上 normal で $\text{Gal}(K'/D')$ と $\text{Gal}(K/D)$ の間の同型写像 $\sigma \rightarrow [\sigma]$ で

$$(8) \quad \text{Trace } \Phi(a^{[\sigma]}) = (\text{Trace } \Phi(a))^\sigma, \quad \forall a \in K$$

を満たすものがあり, τ とする. このとき, D' への制限が自明である $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ について,

$$P_\sigma = (A^\sigma, C^\sigma, \theta_\sigma), \quad \theta_\sigma(a) = \theta(a^{[\sigma]^{-1}})^\sigma$$

と置く. こゝに $\sigma_\circ = \sigma|_{K'}$. そうすれば $(A^\sigma, \theta_\sigma)$ は CM 型 (K, Φ) に属するから.

$$(9) \quad (P_\sigma : P) = (n_\sigma, q_\sigma)$$

が考えられる. (7) から

$$(10) \quad (n_\sigma, q_\sigma) = (N(*), *^{\Phi'}) \quad , \quad \sigma = [M_K/K', *].$$

条件 (8) から M_K は D' 上 normal になることがわかる, また,
 $\sigma|_{M_K} = \text{identity} \Rightarrow (P_\sigma : P) = 1$ は明白, 故に, [5], Prop. 2
 により, $\sigma \mapsto (P_\sigma : P)$ は $\text{Gal}(M_K/D')$ から $\widetilde{C}_K$ への写像と考
 えられる, 次に

$$\begin{aligned} \sigma|_{M_D} = \text{identity} &\Leftrightarrow \exists \mu: (A, C) \text{ から } (A^\sigma, C^\sigma) \text{ への同型で} \\ \mu\theta(a) &= \theta(a)^\sigma \mu \text{ を } \forall a \in \mathcal{O}_D \text{ についてみたす} \Leftrightarrow P_\sigma \cong P \\ &\Leftrightarrow (P_\sigma : P) = 1 \end{aligned}$$

がわかるから

$$(11) \quad \text{Gal}(M_K/M_D) = \{ \sigma \in \text{Gal}(M_K/D') \mid (P_\sigma : P) = 1 \}$$

が成立する. 一方 [5], Prop. 2, (ii) により

$$(12) \quad (u_{\sigma\tau}, q_{\sigma\tau}) = (u_\sigma^{(\tau)}, q_\sigma^{(\tau)})(u_\tau, q_\tau)$$

が任意の $\sigma, \tau \in \text{Gal}(M_K/D')$ について成立する. これは
 (u_σ, q_σ) が $\widetilde{C}_K$ に値をもつ 1-cycle であることを意味し,
 これが決定できれば (11) より moduli の体 M_D は定まることにな
 なる. また [5], Prop. 2, (iii) は (u_σ, q_σ) の $H^1(\text{Gal}(M_K/D'), \widetilde{C}_K)$
 における cohomology 類は $(K, \mathbb{Q})$ によ, τ によって定まる不変量で
 あることを意味している. 以下 1-cycle (u_σ, q_σ) の決定が
 本質的であるという考え方で進む.

§4. 仮定は §3 の通りとする. 任意に $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{Q})$ をとり,
 P^σ の behavior を考える.

Lemma. (K, Φ^σ) の reflex は $(K'^\sigma, \Phi'^{\sigma^{-1}})$ で与えられる.
 ここに、 $\Phi'^{\sigma^{-1}}(a) = \Phi(a^{\sigma^{-1}})$, $a \in K'^\sigma$.

証明は容易であるので略す. 定義より

(13) $\text{Trace } \Phi^\sigma(a^{[u]}) = (\text{Trace } \Phi^\sigma(a))^{\sigma^{-1}u\sigma}$, $a \in K$, $u \in \text{Gal}(K/D')$
 が成立する. それ故、(6) と同様な関係が、 Φ^σ を媒介として
 $\text{Gal}(K'^\sigma/D'^\sigma)$ と $\text{Gal}(K/D)$ の間にも存在する. $P^\sigma = (A^\sigma, \mathcal{C}^\sigma, \theta^\sigma)$
 の moduli の体は M_K^σ に一致するから、我々は P^σ から
 $\text{Gal}(M_K^\sigma/D'^\sigma)$ の $\tilde{C}_K$ に値をもつ 1-cycle (u'_c, q'_c) を
 得ることになる.

Theorem. $(u'_c, q'_c) = (u_{\sigma\tau\sigma^{-1}}, q_{\sigma\tau\sigma^{-1}})$ が任意の
 $\tau \in \text{Gal}(M_K^\sigma/D'^\sigma)$ に対して成立する.

Proof. これは $(P_\sigma : P)$ をその幾何的定義と関係づけると
 困難なく証明される. (ここで用いる事実については [5] を
 参照). $P = (A, \mathcal{C}, \theta)$, $P_{\sigma\tau\sigma^{-1}} = (A^{\sigma\tau\sigma^{-1}}, \mathcal{C}^{\sigma\tau\sigma^{-1}}, \theta_{\sigma\tau\sigma^{-1}})$ に
 対して、 $(P_{\sigma\tau\sigma^{-1}} : P)$ は次の様にして定まる量と等しい.
 (A, θ) から $(A^{\sigma\tau\sigma^{-1}}, \theta_{\sigma\tau\sigma^{-1}})$ への isogeny λ がある. $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$
 から基本的極因子 X, X' をとり、 $Y = \lambda^{-1}(X')$ とおく. A から
 A の Picard 多様体 $\hat{A}$ への X, Y から定まる isogeny をそれぞれ
 φ_X, φ_Y とすると、(*) $\varphi_Y = \varphi_X \theta(u)$, $u \in F_T$ となる.

ここに φ_X は $u \in A$ を $X_u - X$ の linear equivalence による class $C1(X_u - X)$ に写す写像である. また $c \in I_K$ により $\text{Ker}(\lambda) = \{y \in A \mid \theta(c)y = 0\}$. この λ, c により, $(P_{\sigma\tau\sigma^{-1}} : P) = (b, c)$. さて λ^σ は (A^σ, c^σ) から $(A^{\sigma^2}, \theta_{\sigma\tau\sigma^{-1}}^\sigma)$ への isogeny を与え $\text{Ker}(\lambda^\sigma) = \{y \in A^\sigma \mid \theta^\sigma(c)y = 0\}$ である. c^σ, c'^σ の基本的極因子は X^σ, X'^σ で与えられるから, $Y^\sigma = (\lambda^\sigma)^{-1}(X'^\sigma)$ について (***) $\varphi_{Y^\sigma} = \varphi_{X^\sigma} \circ \theta^\sigma(u)$ が成り立つといふ. 定義から $\varphi_X^\sigma(u^\sigma) = (\varphi_X(u))^\sigma$, $u \in A$. Picard variety の定義から $\hat{A}$ の点 v が $X \in D_A(A)$ (A の 0 に algebraically equivalent な divisors の集合) に, Poincaré divisor を通して対応するとき, $v^\sigma \in (\hat{A})^\sigma = \hat{A}^\sigma$ が $X^\sigma \in D_A(A^\sigma)$ に対応する. 故に, $(\varphi_X(u))^\sigma = (C1(X_u - X))^\sigma = C1(X_{u^\sigma} - X^\sigma) = \varphi_{X^\sigma}(u^\sigma)$ となる. これから $\varphi_{X^\sigma} = \varphi_X^\sigma$. 同様に $\varphi_{Y^\sigma} = \varphi_Y^\sigma$. (***) は (4) から従う.

この Theorem を用いて P^σ を調べるには, 次の志村の結果 (5) が基本的である. $D' \subseteq F', D \subseteq F$ と仮定する.

Proposition. P が type $(K, \Phi; \tau, \sigma)$ ならば, P_σ は type $(K, \Phi; \tau, \sigma^p)$ である.

そこで P^σ を $\text{Type}(K, \Phi; \tau'_\sigma, \sigma'_\sigma)$ とする. Prop. 12 より, $(u'_\sigma, q'_\sigma) = (1, \sigma'_\sigma / \sigma(\sigma'_\sigma))$ である. Theorem 12 より

$$(14) \quad (1, \sigma'_\sigma / \sigma'_\sigma) = (u_{\sigma\rho\sigma^{-1}}, q_{\sigma\rho\sigma^{-1}})$$

となる. 一方 Theorem の証明の記号下で,

$$(15) \quad \text{Ker}(\Psi_X) = \{y + A \mid \theta(f)y = 0\},$$

お上の ideal $f = (\tau) \partial_K \sigma \sigma^\rho$ により成立つことを見ることが出来る. ∂_K は K の $\mathbb{Q}$ 上の differential である. $f = f(P)$ とおく. $f(P^\sigma) = f(P)$ はこれから直ちにわかる

$$(16) \quad (\tau) \sigma \sigma^\rho = (\tau'_\sigma) \sigma'_\sigma \sigma'^\rho$$

が成立つ. $\widetilde{C}_K$ に於て計算して

$$\begin{aligned} (1, \sigma'_\sigma / \sigma'^\rho) &= (1, \sigma'^2_\sigma) (1, (\sigma'_\sigma \sigma'^\rho)^{-1}) \\ &= (1, \sigma'^2_\sigma) (1, (\tau'_\sigma)(\tau)^{-1} (\sigma \sigma^\rho)^{-1}) \\ &= (1, (\tau'_\sigma) \sigma'^2_\sigma) (1, ((\tau) \sigma \sigma^\rho)^{-1}) \\ &= ((\tau'_\sigma \tau'^\rho)^{-1}, \sigma'^2_\sigma) (\tau \tau^\rho, (\sigma \sigma^\rho)^{-1}). \end{aligned}$$

ゆえに,

$$(17) \quad ((\tau'_\sigma \tau'^\rho)^{-1}, \sigma'^2_\sigma) = ((\tau \tau^\rho)^{-1}, \sigma \sigma^\rho) (u_{\sigma\rho\sigma^{-1}}, q_{\sigma\rho\sigma^{-1}}).$$

$\tau = \sigma\rho\sigma^{-1}\rho^{-1}$ とおく.

$$(u_{\sigma\rho\sigma^{-1}}, q_{\sigma\rho\sigma^{-1}}) = (u_{\tau\rho}, q_{\tau\rho}) = (u_{\tau}^{(\rho)}, q_{\tau}^{(\rho)}) (u_\rho, q_\rho),$$

$$(u_\rho, q_\rho) = (1, \sigma / \sigma^\rho) \text{ 故に. (17) により}$$

$$(I) ((t'_\alpha t_\alpha^p)^{-1}, \sigma_\alpha'^2) = ((t_\alpha^p)^{-1}, \sigma_\alpha^2) (u_\alpha^{(p)}, q_\alpha^{(p)})$$

が得られた。CM体の性質より、 $\tau|K'$ は自明であり、

(u_α, q_α) は (10) により既知の量であることに注意する。

次のことが (I) よりある。

Corollary . 任意の $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ に対して、 $\sigma p \sigma^{-1} p^{-1} = [M_K/K', \sigma]$ となる $\sigma \in I_{K'}$ をとれば、 $\sigma^{\mathbb{Q}}$ の C_K に於ける類は平方類である。

さて、 $(t'_\alpha, \sigma'_\alpha)$ を知れば、我々は $p^\sim$ の挙動を control したといえる訳であるが、(I) は "order 2 の元による ambiguity" を除いて $p^\sim$ を定めてくれるといえる。とくに

$$(C2) \quad E_F^+ = N_{K/F}(E_K)$$

を仮定する。今 σ'_α の ideal class in C_K が定まり、たとする、

(16) をみたす別の pair $(t''_\alpha, \sigma''_\alpha)$ があったとしよう。 $\sigma''_\alpha = (x) \sigma'_\alpha$, $x \in K^\times$ より、 $(x x^p t''_\alpha) \sigma'_\alpha \sigma_\alpha'^p = (t'_\alpha) \sigma'_\alpha \sigma_\alpha'^p$.

t''_α/t_α は 総正な F の元であるから、 $\varepsilon x x^p t''_\alpha = t'_\alpha$ がある

$\varepsilon \in E_F^+$ により成立つ。(C2) より $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_0^p$ とある $\varepsilon_0 \in E_K$

によりかける。故に、 $y y^p t''_\alpha = t'_\alpha$, $\sigma''_\alpha = (y) \sigma'_\alpha$ と $y =$

$\varepsilon_0 x$ により成立つ。type $(K, \mathbb{Q}^\sim; t'_\alpha, \sigma'_\alpha)$ の構造と、

type $(K, \mathbb{Q}^\sim; (y y^p)^{-1} t'_\alpha, (y) \sigma'_\alpha)$ の構造は同型であるから、

(C2) の仮定下では、 σ'_α の ideal class が定まれば、

P^σ の同型類は定まる. (I) の第2成分についての等式より
 $(\sigma'_\tau \text{ の class in } C_K)^2 = (\sigma_\tau \text{ の class in } C_K)^2 \times (q_\tau^{[e]}) \text{ の class in } C_K$
 が得られる. 従って

K の類数又位数であり, $E_F^T = N_{K/F}(E_K)$ ならば P^σ の挙動は
 $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ により (I) により control される.

§5. 以下再び §3 の formulation に帰り, $(A, \mathbb{C})$ の module の体
 の決定について考えることにする. $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ は D' 上 trivial
 とする. P^σ を type $(K, \Phi; \tau'_\sigma, \sigma'_\sigma)$, P_σ を type $(K, \Phi; \tau_\sigma, \sigma_\sigma)$
 とすれば, $\tau_\sigma = \tau'_\sigma{}^{[\sigma]}$, $\sigma_\sigma = \sigma'_\sigma{}^{[\sigma]}$ としてよいことを
 定義する. $D' \subseteq F'$, $D \subseteq F$ と仮定し, (I) を用いれば,
 $((\tau_\sigma \tau_\sigma)^{-1}, \sigma_\sigma^2) = ((\tau^{[\sigma]} \tau^{[\sigma p]})^{-1}, (\sigma^{[\sigma]})^2) (u_\tau^{[\sigma p]}, q_\tau^{[\sigma p]})$.

$$u_\sigma = \tau^{-1} \tau_\sigma, \quad q_\sigma = \sigma \sigma_\sigma^{-1} \quad \text{より}$$

$$(18) \quad (u_\sigma, q_\sigma)^2 = (\tau \tau^p, \sigma^{-2}) ((\tau^{[\sigma]} \tau^{[\sigma p]})^{-1}, (\sigma^{[\sigma]})^2) (u_\tau^{[\sigma p]}, q_\tau^{[\sigma p]})$$

が得られる. $\sharp(P) = \sharp(P^\sigma)$ より $\sharp(P_\sigma) = \sharp(P)^{[\sigma]}$ である.

$$(19) \quad \sharp(P)^\tau = \sharp(P) \quad \text{for } \forall \tau \in \text{Gal}(K/D)$$

と仮定する. このとき $N_{K/F}(q_\sigma) = (u_\sigma)$ が成立つ. $\overline{C}_K$ の
 元 (u, q) で $N_{K/F}(q) = (u)$ の関係をもつ $u \in F_+$, $q \in I_K$ で
 代表されるものの部分群を C_K^* で表わす. C_K^* は完全列

$$(19) \quad 1 \longrightarrow E_F^+ / N_{K/F}(E_K) \longrightarrow C_K^* \longrightarrow C_K^\circ \longrightarrow 1$$

に入る. C_K° は F への norm が F_+ の元で生成される単項 ideal

となる K の ideal で代表される ideal classes の成る C_K の部分群である.

$$(20) \quad (u, q)(u^p, q^p) = 1, \quad (u, q) \in C_K^*$$

$$\text{が成立つ. } (x) \sigma \sigma^p = (x^{[\sigma]}) \sigma^{[\sigma]} \sigma^{[\sigma^p]}, \quad (u_p, q_p) = (1, \sigma/\sigma^p)$$

を用いれば (18) は

$$(21) \quad (u_\sigma, q_\sigma)^{-2} = (u_p^{[\sigma]}/u_p, q_p^{[\sigma]}/q_p) (u_\tau^{[\sigma^p]}, q_\tau^{[\sigma^p]})$$

と変形され、(20)により

$$(II) \quad (u_\sigma, q_\sigma)^2 = (u_p/u_p^{[\sigma]}, q_p/q_p^{[\sigma]}) (u_\tau^{[\sigma]}, q_\tau^{[\sigma]})$$

が得られた. ($\tau = \sigma^p \sigma^{-1} p^{-1}$).

(II) は C_K に値をもつ cocycle (u_σ, q_σ) は C_K^* の order 2 の元を除いて決定されることを意味する. 特に C_K^* の位数が奇数ならば、 (u_σ, q_σ) は (II) により完全に決まる. より一般に cocycle (u_σ, q_σ) の $\text{Gal}(M_K/F')$ への制限が定まることにより注意すれば、次の様に精密化できる. Hochschild-Serre の完全列

$$(22) \quad 1 \rightarrow H^1(\text{Gal}(K'/D'), C_K^*) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(\text{Gal}(M_K/D'), C_K^*) \\ \xrightarrow{\text{Res}} H^1(\text{Gal}(M_K/K'), C_K^*)$$

$$(23) \quad 1 \rightarrow H^1(\text{Gal}(F'/D'), C_K^{*\langle \sigma \rangle}) \xrightarrow{\text{Inf}} H^1(\text{Gal}(K'/D'), C_K^*) \\ \xrightarrow{\text{Res}} H^1(\text{Gal}(K'/F'), C_K^*)$$

を考える. (u_σ^*, q_σ^*) を (10) を与えたものの 1-cocycle として $(u_\sigma^{-1} u_\sigma^*, q_\sigma^{-1} q_\sigma^*)$ の $H^1(\text{Gal}(M_K/D'), C_K^*)$ に移ける

cohomology 類としよう. (22) で $\text{Res}(\alpha) = 1$ より, $\beta \in H^1(\text{Gal}(K'/D'), C_K^*)$ により $\alpha = \text{Inf}(\beta)$ となる. 一方 β の Prop. からわかる様に, (23) に於て $\text{Res}(\beta) = 1$ であるから, $\gamma \in H^1(\text{Gal}(F'/D'), C_K^{*\langle p \rangle})$ により, $\beta = \text{Inf}(\gamma)$ となる. 従って, α の cohomology 類は $H^1(\text{Gal}(F'/D'), C_K^{*\langle p \rangle})$ の元からの inflation を除いて定まる. 7 いるといえる. 特に,

$H^1(\text{Gal}(F'/D'), C_K^*) = 1$ (これは例えば $[F':D']$ が奇数ならば成立つ) とすれば, (u_α, q_α) の ambiguity は $(v, \gamma) \in C_K^{*\langle p \rangle}$ により $(v^\sigma/v, \gamma^\sigma/\gamma)$ の形の元でしかありえない. なお (IV) を得るだけならば, core 条件 (12) から可能であることを注意しておきます.

§6. この節では我々が §3, 5 で課した条件, (18), (C3), 及び $D' \subseteq F'$, $D \subseteq F$ は A が単純ならば restrictive でなく, $(A, \mathbb{C})$ の moduli の体 M の決定という目的については一般性を失っていないことを注意する. 以下 $(A, \mathbb{C})$ は単純とする. 任意の $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/M)$ をとると, $(A, \mathbb{C})$ から $(A^\sigma, \mathbb{C}^\sigma)$ への同型 μ_σ がある. このとき $\pi(\sigma) \in \text{Aut}(K)$ があり,

$$(24) \quad \mu_\sigma^{-1} \theta(a)^\sigma \mu_\sigma = \theta(a^{\pi(\sigma)}) \quad , \quad a \in U_K$$

が成立する. M_K は M の Galois 拡大体であり, π は $\text{Gal}(M_K/M)$ から $\text{Aut}(K)$ の中への同型となることとわかる. $D' = M \cap K'$,

D を $\pi(\text{Gal}(M_K/M))$ の固定体とすれば、 $\text{Gal}(M_K/M) \cong \text{Gal}(K'/D') \cong \text{Gal}(K/D)$. π を制限して得られる $\text{Gal}(K'/D')$ から $\text{Gal}(K/D)$ への同型を $[\]$ とかくと、(24) により (8) が成立する. このとき条件 (C3) が成立するのは勿論である.

また $M = M_D$ となることもわかる. しかし、我々には D' が K' のどの部分体になるかをアプリアリには知らないという弱点がある. これを補うには次の様に考える. K' の部分体 D' について (8), (C3) を成立させるものを全て考え、このような D' から決まる D について M_D が求まればよい. ρ は $\text{Gal}(K'/D')$, $\text{Gal}(K/D)$ の元と可換であるから、 $D' \neq F'$ のときは $D' \cap F'$ を D' に置き換えることにより、 $D' \supseteq F'$, $D \supseteq F$ と仮定してもよい.

文 献

- [1] G. Hochschild and J. P. Serre, Cohomology of group extensions, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 110-134.
- [2] R. P. Langlands, Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen, Proc. of symposia in pure mathematics, XXX III (vol. 2), 1979, 205-246.
- [3] G. Shimura, On the theory of automorphic functions, Ann. of Math. 70 (1959), 101-184.
- [4] G. Shimura, On the zeta function of an abelian variety.

with complex multiplication, Ann. of Math. 94 (1971), 504-533.

[5] G. Shimura, On abelian varieties with complex multiplication, Proc. of the London Math. Soc. 34 (1977), 65-86.

[6] G. Shimura, Models of an abelian variety with complex multiplication over small fields, to appear.

[7] G. Shimura and Y. Taniyama, Complex multiplication of abelian varieties and its application to number theory, Publ. Math. Soc. Japan No. 6, 1961.

[8] H. Yoshida, Hecke characters and models of abelian varieties with complex multiplication, to appear in J. Fac. of Sci. Univ. of Tokyo.