

Some extremal problems in combinatorial number theory

長崎大学教養 森川良三 (Ryozo Morikawa)

1. 序言 Extremal problem というのは、数学の "3" "3"

の Σ 3 じ (もっと広く自然科学、更には社会科学において
 33) 出てくる。つまり非常に自然な問題意識であるといえ
 よう。そして、その solution である extremal case に伴って
 (又はその近くで)、その造には見えなかった構造が露わら
 れて来ると、あたかもその構造が extremality を支えているか
 と思われることが多々ある。この様な構造を漠然と extremal structure
 という名前と呼んでおこう。典型的な例を三つ挙げてみる。

(i) 群論における群の定義; この場合は n が n 拡大の
 中から extremal structure と n 増える拡大をとり出す
 と見做し得る。

(ii) critical lattice の問題の extremal case と n 。
 discriminant の小 $\pm$ 三次体が出てくる。これは real の中
 から algebraic がとり出されたと考えられるであろう。

(iii) 単葉関数に関する Bieberbach の conjecture ; n の場合係数 $|a_n| \rightarrow n$ に従って Koebe の歪曲関数 (又はその回転) が出てくる。これは extremal case の近くで構造が見えてくるといふ感じが強い例である。

と云うことで、テイスクリートな extremal problem には難しいものも多くて、combinatorial number theory でも非常に多くの問題が未解決で残っていることは [1] を見て分かる。困難の理由としては次の様なことが考えられる。

(A) 方法上の難点: テイスクリートな問題には、微分法の様な統一的な方法が今のところ存在しない。

例えば sequence の場合によく使われる方法として

(1) Greedy algorithm ; これは $a_1, a_2, \dots, a_n$ を使ったとき a_{n+1} をいかに選べと合わせて extremality を満たす様に決め、じんじん延長していく方法で、一つたりきつてしまいうまいと偏微分と一脈通じていゝが、勿論この方法で解けるものは少ない。

(2) Erdős がよく使う方法で、自然数を区間に分け、各区間で extremality をもつ様にしておいて、あとでつなぎ合わせて全体をつくる。これは区間の分け方に (後の場合

解決すべきことかもしれない。しかし現状を容認すると(た
り extremal value (又はそれを支える extremal structure)
が分るかもしれない)と"いう事になる。これは)の終りの

(a) に関する手持ちのカードは限られていて、例としては

periodic とか (= α 中では abelian とか lattice を入れている
だろう)。又は symmetry (= の終りの場合で 12 等分が分り
た場合、例としては正多角形がある) とかかまづ浮んできて、

それ以外と"いうと仲々これと"いうのも α が多い状態である。

更に sequence の問題等では extremal cases が可算で決まら
ないということがある。例としては上の probabilistic method で
は、如何にうまく measure を入れたとしても、又 extremal
order を求めると"いう様子が可算でユルンが問題が多いに思
える。解集合が positive measure であるというのだから、それ程
強い構造化をもつて"と"は期待出来る。しかし終りの
例としては periodic のものを少しゆがめるとき、どう"う構造を
考へればよいと"いうこと(特にテイスクリートな構造の範
疇で)に"うことは余り指針をもつていない。

つまり終りの終り(テイスクリート) extremal problems
を考へる為には、もう少し色々とタイプ of extremal structure
を開拓しておくことが必要だろうと思われる。これに"う
更に2つ程 Remarks をつけ加えておく。

(1) North-Holland のカレンダ - の問題の中に、直径 1 の n 角形で面積最大のものを見つけようという問題があった。これは n : odd については正 n 角形が答えとして solved. しかし、 n : even については、 n が奇数か偶数と区別して解ける。この困難の理由の一つに、even n については、 $n=4$ のとき正多角形以外に最大値を与えるものがあるという事実があると思われ、これは正 n 角形と対称な一例を見ればわかる。

(2) Sequence の問題で (Extremal problem と呼ぶ)、 n 角形 (GF(q)) について、 $n=q$ のとき解が得られることが可変頻繁に不成立。この問題自身は全 n について成立するが、 $n \neq q$ のときは GF(q) が与えられる答えと異なるということがある。これは GF(q) 構造を考慮する必要があると思われる。

この様に大上段に小なり小なり、本質的に話が小さくなる。恐縮であるが、§2 以降で扱うのは、いわゆる Beatty sequence についてのものである extremal problem と、それらから生じてくる extremal problems (G) と (T) である。

これらの興味ある (なる) というのは次の三つの理由から

」である。

(i) Extremal value があるとき、それを attain する。所謂 extremal structure を完全に決定出来ること (しかしそれの可成り沢山ある)。

(ii) 与えられた extremal structure を与える f -sequence とよぶものがある。これの別の見かた上は可成り遠く、その問題の解として出てくること。これは勿論見かた上のことを言っている。或いは「 f は a と b である」という期待がある。

(iii) 証明の途中で近似分数や数の幾何学等が主として出てくる。又特に (G) はそういう (一般化する) situation に類似の問題、理論があり、その意義があること。

2. 元の問題 (*). 出発点である問題については、こゝでは殆どいを入るな「読り取れ」て、そのことを説明する。

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}$ は通常の意味、又 $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする。 $q, a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$ について

$$S(q, a, b) = \{ [(qn+b)/a] : n \in \mathbb{Z} \}$$

($[]$ は Gauss 記号) とおく。又 $\mathbb{N}^2$ に順序を

$$(1) \quad (m, n) \leq (m', n') \iff m \leq m' \text{ \& \& } n \leq n'$$

で定義しておく。

次の問題(4)は

(4) $(q_1, a_1) = (q_2, a_2) = 1$ とする q_i, a_i ($i=1, 2$) について

$$S(q_1, a_1, b_1^{(1)}) \quad 1 \leq b_1 \leq e_1 \quad \& \quad S(q_2, a_2, b_2^{(2)}) \quad 1 \leq b_2 \leq e_2$$

が互いに disjoint とする様に出来た (つまり $b_1' \leq b_2 = b_2'$

に於いて) する $(e_1, e_2) \in \mathbb{N}^2$ の組を全て決定する。と。

註1. $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ について $S(\alpha, \beta) = \{[dn + \beta] : n \in \mathbb{N}\}$

を Beatty sequence とする。古来度々とり扱われてゐる。

これについてのある種の問題群については、通常と異なり、

$\alpha \in \mathbb{Q}$ の場合より $\alpha \in \mathbb{R}$ の時の方が下、と困難な状況を生ず

起す。そして $\alpha \in \mathbb{R}$ の時は $S(\alpha, \beta)$ の代りに上述の $S(q, a, b)$

を考へる方が非本質的であることが避けられる。

Beatty sequence についての一般的背景や文献については

[1] p. 18 - p. 19 や [2] 第3章を参照せられたい。又一つの survey

が [3] に述べてある。[4], [5] の一連の論文も参考になるが

よう。

註2. (4) については、まだ全ての場合に解けてゐる訳で

はない。しかし予想の段階のものも含めると、[5] II, III で

その全容はほぼ明らかになるといふ。

3. 問題 (G). (4) を考へていく内に、二つの問題 (G), (T)

が派生的に出る。また (G) を説明する。

次の様に数々の概念を順次導入していく。 $a_1 \in \mathbb{N}$ を一つ与える。 $\sigma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ を $\sigma(i) = \exp(2\pi i r/a_1)$ と定義する。 $\sigma(\mathbb{Z}) = C(a_1)$ とおく。 $C(a_1)$ 上の各点を place とよぶ。 $y < a_1$ である $y \in \mathbb{N}$ について、 $C(a_1)$ 上で 相つり y 個の places の集まりを y -segment といい。

一方 $v_1 \in \mathbb{N}$ に対し、 a_1 個の $\mathbb{N}$ の元 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{a_1}$ を

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{a_1} = v_1$$

である様に与える。 δ_i を $\sigma(i)$ に attach して、 $C(a_1)$ 上に数の分布が与えられたと考える。 二つの時 $C(a_1)$ 上の和が v_1 である (δ) -分布 が与えられたという。

ここで、 $C(a_1)$ 上の y -segment γ について

$$\bar{V}(\gamma) = \sum \delta_i \quad \text{但し } i \text{ は } \sigma(i) \in \gamma \text{ である}$$

とおく。 $x \in \mathbb{N}$ を一つ与える。 $\bar{V}(\gamma) \leq x$ である γ は (x) -good とおき、それ以外を (x) -overflow とする。

a_1, v_1, y, x に対し、和が v_1 である (x) -分布を全て与える。

$$\bar{V}_2 = \text{Max} \text{ } (x)\text{-good } y\text{-segments の個数}$$

とおく。 残りの問題 (G) は次のとおりである。

(G) 与えられた a_1, y, x に対し、 $(v_1, \bar{V}_2)$ を決定する = である。

4. (6) の答えはついで。面倒を避ける為に、ここでは

$(a_1, y) = 1$ としなくては。まあ簡単に分ることは

(i) $\bar{v}_2 \leq a_1$, かつ等号が成り立つ (つまり全 y -segment が good である) のは、 $v_1 \leq \lceil xa_1/y \rceil$ のときである。

(ii) どんな v_1 についで $\bar{v}_2 \geq a_1 - y$ になる。例えは v_1 は (a_1) の一つの place にまためておけばよい。

最初の自明なる主張を述べた後、更に2つの数を導入する。 $a_1 > y$ とする $e \in \mathbb{N}$, $f \in \bar{\mathbb{N}}$ と

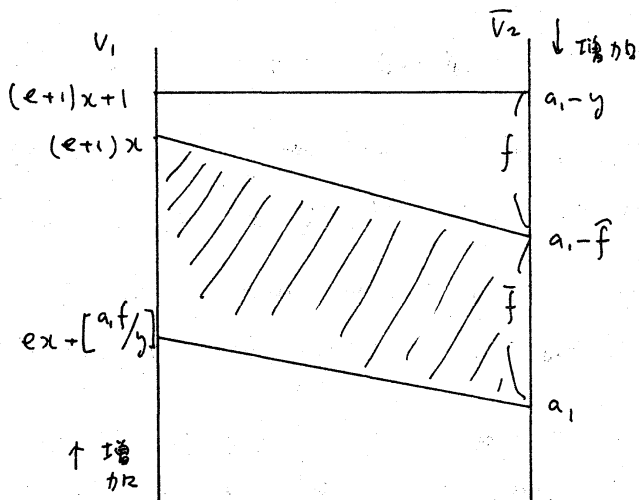
$$a_1 = ye + f \quad 0 \leq f \leq y-1$$

で決める。更に $\bar{f} = y - f$ とかく。

(iii) $v_1 = (e+1)x + 1$ のとき $\bar{v}_2 = a_1 - y$ である。つまり (ii) と述べた自明な $\bar{v}_2$ を得られる。

(iv) $v_1 = (e+1)x$ のとき $\bar{v}_2 = a_1 - \bar{f}$ である。

(ii) ~ (iv) の結果、おさの考えた $(v_1, \bar{v}_2)$ の範囲は、下図の



斜線の部分である。

そして、 $e = 1$ とする。

順序 (ii) に従って

maximal な $(v_1, \bar{v}_2)$ を

おさめよう。

(G) には "2 は [5]-III で扱われ" ている。しかし $x=2$ は (H) を解くのに必要で部分に限った。と "2" は形式的には $x=2$ 展開しただけの Γ で一般の (G) を解くに充分である。その詳細は [6] にゆづいて。 $x=2$ は一つの数値例を与えておく。

例 1. $a_1 = 149$, $x = 43$, $y = 59$ とする。つまり $e = 2$, $f = 31$ である。

(a) 上座の (i) ~ (iv) によつて $(v_1, \bar{v}_2)$ には "2 次の $\alpha = 2$ が分" 了。 (i) より $v_1 \leq 108$ であるから $\bar{v}_2 = 149$ 。 (ii) より $v_1 \geq 130$ であるから $\bar{v}_2 = 90$ 。 (iv) から $(129, 121)$ なる pair が生ずる。

(b) 残った部分 $109 \leq v_1 \leq 128$ には "2 次の maximal pair $(v_1, \bar{v}_2)$ が生ずる:

$(109, 139), (110, 130), (111, 129), (114, 124)$ 。

(c) 上の (a), (b) で与えられた pair を実現する (γ) -分布 γ は 2 は 174 の次の様に与えられる。($\gamma_j \neq 0$ の j の Γ を書く。)

$(108, 149)$: $\gamma_j = 1$ 当 j は $59m \equiv j \pmod{149}$, $1 \leq m \leq 108$ 。

$(109, 139)$: $\gamma_j = 4$ for $j = 25, 28, 56, 59, 84, 87, 115, 118, 146, 149$. $\gamma_j = 3$ for $j = 13, 16, 19, 22, 41, 44, 47, 50, 53, 72, 75, 78, 81, 100, 103, 106, 109, 112, 131, 134, 137, 140, 143$ 。

$(110, 130)$: $\gamma_j = 7$ for $j = 59, 149$. $\gamma_j = 6$ for $j = 22, 25, 28, 50, 53, 56, 81, 84, 87, 109, 112, 115, 118, 140, 143, 146$ 。

$(111, 127)$; $\delta_j = 9$ for $j = 28, 56, 59, 87, 118, 146, 149$.
 $\delta_j = 8$ for $j = 25, 53, 84, 112, 115, 143$.

$(114, 124)$; $\delta_j = 15$ for $j = 59, 149$.
 $\delta_j = 14$ for $j = 28, 56, 87, 115, 118, 146$.

$(129, 121)$; $\delta_j = 43$ for $j = 59, 118, 149$.

$(130, 90)$; $\delta_i = 130$.

つまり大抵、ほかに言えは、 $v_i = [a_i x / y]$ のときは y_j は (a_i) の all places にほぼ平等に分布する。しかし v_i が増加するにつれて、段々あつまつていく。この過程で extremal cases に近づく集まり方があつた。そして最後に v_i 全部が一つの所に集まる。この現象は一つの過程である。

(d) (e) かし、extremal pair を実現する (δ) -分布は次山あり、list up するのは難しい。(例として $(130, 90)$ を実現する (δ) -分布を考へてみる)。これによつて、overflowed y -segment の構造を必要十分の形で与えたと見えてくる。例として $(130, 90)$ でおおむね 59 個の y -segments は (a_i) 上で、

いまうつく 59 個の segments に限るとおこしである。他の場合はもう少しをみ入る、大構造であるわけである。これは (G) に対する extremal structure と考へることも出来る。

これを説明する前に、序言で述べた (G) の一般化について一言述べなくては：

ごく単純に (a_1) 上の分布としてのことを次を意味する, 例として
球面とか円環面上の分布に拡張する = と加算されるか. 多
分これよりほ次の様な方向に良い一般化がある = と加算期待す
れる. つまり問題 (G) を等式

$$(f) \quad Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{a_1} = v_1$$

の下での a_1 個の不等式

$$(h) \quad Y_k + Y_{k+1} + \dots + Y_{k+a_1-1} \leq x \quad 1 \leq k \leq a_1$$

(但し添数は $\text{mod } a_1$ を考へる) のように成り立つものの個数を
最大にする. と考へて (f), (h) の適当な組合せを解くこと.

5. F-sequence. まづ F-sequence の定義を述べる:

$a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{Z}$, $|U| = a$ とする. U の元を列

$$(3) \quad u_0, u_1, \dots, u_{a-1}$$

に對し $2. \quad c_i \in \mathbb{Z}$ を

$$0 = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_{a-1} \leq c$$

にとる. (3) を適当にとる = とはよって, 合同式

$$u_i \equiv u_0 + ib - c_i \pmod{d} \quad 1 \leq i \leq a-1$$

が成り立つとき U は (又は (3) は) $F(a, b, c)$ -sequence
(mod d) であるという.

実は n 様な sequence が出してくるのは 初めでは無い.

[4] - III 2. $(q, a_1) = (q, a_2) = (a_1, a_2) = 1$, $q = a_1 v_1 + a_2 v_2$

$(v_1, v_2) \in \mathbb{N}^2$ のときは

$$S(q, a_1, \{a_i^{(1)}\}) \quad 1 \leq i \leq v_1 \quad \text{と} \quad S(q, a_2, \{a_j^{(2)}\}) \quad 1 \leq j \leq v_2$$

が互いに disjoint である場合には, $\mathcal{A}'$ は $\mathbb{Z}$ のような $\mathbb{Z}$ の部分群

という問題を $\mathbb{Z}$ の部分群, $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ の部分群. $\langle \mathcal{A}' \rangle$ が

$\mathbb{F}(v_2, -v_1, v_1 - v_2) - \text{sequence} \pmod{q}$ (但し, $t \in \mathbb{Z}$ は

$a_1 t \equiv a_2 \pmod{q}$ を満たす) であることは必要十分である。

また, この様子は $\mathbb{Z}$ の translation である。例として

$(v_1, v_2) = 1$ のときは $(v_1 + v_2 - 1)! / v_1! v_2!$ 個あることは

知られている。

(4) の場合, $C(a_1)$ 上の a_1 個の q -segments にある番号を

導入しなくてはならない。ある q -segment の番号が $\mathbb{F}$ -sequence に

なることは必要十分であることは知られている。これは $\mathbb{F}$ である。

(5) - III に一部述べてあるが, 詳細は [6] にゆづる。

6. 問題 (T). もう一つの問題 (T) を証明しよう:

$a_1, a_2, x, y \in \mathbb{N}$ とする。但し $(a_1, a_2) = 1$ とする。

これは $\mathbb{Z}$ の sequences $\mathbb{Z}$ $v_1 \in \mathbb{N}$ に対して 2 次の様になる。

$$(4) \quad \begin{cases} 1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_{v_1} \leq a_1 \\ 1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_{v_2} \leq a_2. \end{cases}$$

つまり必然的 $v_1 \leq a_2$ である。各 $\tau_i \in (a_1)$ の $\sigma(\tau_i)$ に attach する。 $\Rightarrow a$ と π の (τ) -分布が与えられる。

(a_1) の γ -segment y に対して $V(y)$ は次の様に定義する。

(1). (4) の τ_s, τ_t に対して y に入る τ の数を数える。

$$\sigma(\tau_s), \sigma(\tau_t) \in y, \quad \tau_s \leq \gamma-1, \quad a_1 - \gamma + 2 \leq \tau_t.$$

$$\Rightarrow a \text{ と } \pi \text{ } y \text{ 上 } y_1 = y \cap \sigma([1, \gamma-1]) \text{ と } y_2 = y \cap \sigma([a_1 - \gamma + 2, a_1])$$

に含める。

$$V(y) = \max_{\sigma(\tau_s) \in y_1} (\tau_s + a_2) - \min_{\sigma(\tau_t) \in y_2} \tau_t + 1.$$

(2) y が a と π は

$$V(y) = \max \{ \tau_s - \tau_t : \sigma(\tau_s), \sigma(\tau_t) \in y \} + 1.$$

つまり簡単にいうと、 (a_1) 上の y に $\lambda > 2$ 個の τ 's の変動 $\equiv \text{mod } a_2$ がある。

$\Rightarrow$ τ の $x \in \mathbb{N}$ に対して $V(y) \leq x$ かつ y は (τ) -good である。

$$v_2 = \# \{ (\tau)\text{-good } \gamma\text{-segment } y \text{ の個数} \}$$

と $\leq$ 。 $\Rightarrow$ a の問題 (T) は

(T) a_1, a_2, x, y が与えられる。 (v_1, v_2) の順序 $0, 1$ による maximal pair を全て決定する。

(T) は a の決定の下では (*) と同様の問題になる。又 $a_2 = v_1$ かつ (T) は (G) になる。

7. (T) の答は「二」である。より簡単に示すことは、

(i) $xa_1 \geq ya_2$ のときは (a_2, a_1) が唯一の maximal pair である。これは (G) に「二」の (i) から容易。以下では

$$(5) \quad ya_2 > xa_1$$

としなくてはならない。これは次の二つの場合に分れる。

$$(R) \text{ regular case : } a_2 \geq x(e+1)$$

$$(S) \text{ singular case : } x(e+1) > a_2,$$

($e, f, \bar{f}$ は §4 と同じ意味)。両側を避ける為、 $=$ は

$$(6) \quad (a_1, y) = (a_2, x) = 1$$

としなくてはならない。これは次の結果を得る ([5]-III 参照)。

(ii) (R)-case に「二」

$$(xe, a_1), (x(e+1), a_1 - \bar{f}) \text{ (if } f > 0), (a_2, a_1 - y)$$

が、本質的 maximal pair である。($f=0$ のときは (6) から

$$y = \bar{f} = 1, a_1 = e \text{ で両側 } a_2 \text{ が成り立たない。})$$

(iii) (S)-case は可なり複雑で、また次の様子を定義する。

$w = a_2 - xe$, $= a$ とし $0 < w < x$, 又 (5) から $yw > xf$ に注意する。 R_1, R_2 は次の様に定義する。

$$R_1 = \min_{y \in \mathbb{N}, f \in \bar{\mathbb{N}}} \{ wy - xf : f/y \leq \bar{f}/y \}$$

$$R_2 = \min_{x, w \in \mathbb{N}} \{ wy - xf : w/x \geq y/x \}.$$

つまり、3つの maximal pairs は $(110, 130)$, $(105, 149)$, $(109, 133)$ であり。

REFERENCES

- [1] P. Erdős & R. L. Graham: "Old & new problems and results in combinatorial number theory", Geneve, 1980.
- [2] I. Niven: "Diophantine approximations", Interscience 1963.
- [3] R. Morikawa: Eventually covering family について, 数理論講交録 521 (1984).
- [4] R. Morikawa: On eventually covering families generated by the bracket function, Bull. Lib. Arts, Nagasaki Univ., 23 (1982). II, 24 (1983). III, IV, 25 (1984).
- [5] R. Morikawa; Disjoint sequences generated by the bracket function, Bull. Lib. Arts, Nagasaki Univ., 26 (1985).
II, Number theory & combinatorics, 1984 Japan, W.S.P. (1985).
III, Bull. Lib. Arts, Nagasaki Univ., 28 (1988).
- [6] R. Morikawa; Some extremal problems in combinatorial number theory I (in prep.).