

高次元 Fano 多様体と等質空間について

名大理 向井 茂

反標準因子 $-K_X$ が豊富な完備非特異代数多様体を Fano 多様体と言う。ここでは常に複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考えるので、Fano 多様体とは第 1 Chern 類 $c_1(X)$ が正であるコンパクト複素多様体であるとも言っても同じである。2次元以下の Fano 多様体はよく知られている。1次元の場合は射影直線 $\mathbb{P}^1$ と同型、2次元の場合は別名 del Pezzo 曲面とも呼ばれ、10 個の変形同値類に分類される。3次元 Fano 多様体は Picard 数 1 のものは [7] で、Picard 数 ≥ 2 のものは [11] [12] で分類された。ここでは、Fano 多様体に対して余指数 (coindex) を定義し、余指数の小さい高次元 Fano 多様体について考察する。

余指数 ≤ 1 のものは射影空間と 2 次超曲面しかない。余指数 2 の Fano 多様体は del Pezzo 多様体と呼ばれるものと本質的に同じで [4] [5] において分類された。ここでの主な関心は余指数 3 の Fano 多様体の分類で、主な結果は §3 で述べる。Picard 数 1 の余指数 3 Fano 多様体は等質空間を使って構成される。§4 では等質空間の Fano 多様体としての不変量の計算のしかたと説明する。また、§5 では分類に重要な役割を果たす藤田の判定法について述べる。最後に、§6 では §3 の主要定理の証明をスケッチする。

§1 Fano 多様体の余指数

Fano 多様体 X に対していくつかの不変量を定義する。

定義 (1.1) X の第 1 Chern 類 $c_1(X)$ を $H^2(X, \mathbb{Z})$ の中で割り切る最大の整数 ℓ を X の指数 (index) と呼び、 $\text{index } X$ をもって表わす。

Fano 多様体 X の Picard 群 $\text{Pic } X$ はねじれを持たず $H^2(X, \mathbb{Z})$ と自然に同型になる。よって $-K_X \sim \ell H$ となる因子類 H が一意的に定まる。 H は 2 以上の整数では割り切れず。この H のことを Fano 多様体 X の基本因子類、また完全線形系 $|H|$ を X の基本線形系と呼ぶ。 H の自己交点数 ($H^{\dim X}$) を X の次数と呼ぶ。さて、一般的傾向として、指数 ℓ が大きいほど、 X は簡単な構造をもつ。実際、次のことが知られている。

$$(1.2) \quad \text{index } X \leq \dim X + 1$$

X が射影空間の時、上で等号が成立するが、逆に

(1.3) 上で等号が成立するのは X が射影空間 $\mathbb{P}^n$ と同型な時に限る。

(1.2) によって、余指数という量を次の様に定義する。

定義(1.4) $\lambda = \dim X + 1 - \text{index } X$ を Fano 多様体 X の余指数 (coindex) と呼び、 $\text{coindex } X$ でも表わす。

$\text{index } X$ の定義と (1.2) より, $0 \leq \text{coindex } X \leq \dim X$ が成立する。また, 余指数には次の性質がある。
 X が指数 ≥ 2 の Fano 多様体で, Y が基本線形系 $|H|$ の smooth member とする。この時, Y は再び Fano 多様体であるが,

$$(1.5) \quad \begin{cases} \text{coindex } Y = \text{coindex } X \\ \text{degree } Y = \text{degree } X \end{cases}$$

が成立する。但し, $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の時だけは例外である。
 証明は adjunction formula $K_Y \sim (K_X + Y)|_Y$ と Lefschetz の定理より従う。 X が 4次元以上の時は $\rho(Y) = \rho(X)$ も成立する。この (1.5) は次の様にもみることが出来る。基本線形系 $|H|$ が非常に豊富な時, $|H|$ に付随した射で X を埋め込んだもの $X \subset \mathbb{P}^N$ を X の基本モデルと呼ぶ。基本モデルの次数は X の次数に等しい。この時 X の次元が余指数 λ よりも大なら, X の超平面切断 $Y = X \cap P$ で非特異なものは Fano 多様体で余指数はやはり λ に等しい。また, $Y \subset P \cong \mathbb{P}^{N-1}$ が Y の基本モデルである。このようにして, X から超平面切断により余指数 λ の Fano 多様体とその基本モデルを作っていく操作は多様体の次元が λ に等しくなるまで繰り返すことが出来る。

例(1.6) $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ とする。 $(n \geq 2)$ X は 指数 $n+1$ の $2n$ 次元 Fano 多様体。よって余指数は n である。 X の基本モデルは Segre embedding $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{n^2+n}$ でその次数は $\binom{2n}{n}$ に等しい。 n 回までの超平面切断で $n \leq \dim Y \leq 2n$ の範囲で余指数 n の Fano 多様体が入る。例えば $n=2$ の時は,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 &\subset \mathbb{P}^8 && \text{指数3の4次元Fano多様体} \\ \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \cap (\text{超平面}) &\subset \mathbb{P}^7 && \text{" 2の3 " } \\ \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \cap (\text{超平面}) \cap (\text{超平面}) &\subset \mathbb{P}^6 && \text{" 1の2 " } \end{aligned}$$

以上、次数6余指数2のFano多様体から種類できる。

余指数を使うと(1.3)は次の様に言い換えられる。

(1.7) 余指数0のFano多様体は全て射影空間と同型である。

更に次の事も知られている。

(1.8) 余指数1のFano多様体は全て $\mathbb{P}^{n+1}$ 中の非特異2次超曲面 Q^n ($n \geq 2$) と同型である。また、逆も正しい。

このように、余指数0,1の場合は次元だけで、多様体の同型類が決ってしまう。しかし、余指数 ≥ 2 の時はもちろんこのことは全く成立しない。この論文の主な目的は余指数3のFano多様体であるが、その前に余指数2のFano多様体の分類を次の節で復習する。

§2 余指数 2 の Fano 多様体

余指数 2 の Fano 多様体は 藤田 [5] の意味における "del Pezzo 多様体" と本質的に同じものである。 X が余指数 2 の Fano 多様体で H が X の基本因子類の時、Riemann-Roch 定理と Serre の双対定理と小平の消滅定理より次がえられる。

命題 (2.1) ([5] I, Theorem (1.9))

$$\dim |H| = d + \dim X - 2$$

但し, d は X の次数 ($H^{\dim X}$) 。

これより、偏極多様体 (X, H) の Δ -種数 $\Delta(X, H)$ は 1 に等しい。また, (X, H) の sectional genus も 1 に等しい。よって余指数 2 の Fano 多様体の分類は Δ -種数 1 の偏極多様体の分類に含まれる。

さて、2次元 Fano 多様体は別名 del Pezzo 曲面と呼ばれる。del Pezzo 曲面には次の 10個の変形同値類をもつ。

$$(2.2) \quad \mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, S_d \quad (1 \leq d \leq 8)$$

但し, S_d は射影平面 $\mathbb{P}^2$ を "一般の位置" にある $(9-d)$ 個の点で blow up してえられる曲面 (の族) を表わす。 S_d のモジュライ数は $2(5-d)$ で $d \geq 5$ の時 S_d は rigid である。 S_8 は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^1$ -束で、通常 $\mathbb{F}_1$ で表わされる。なお、"一般の位置" の正確な意味については [8] を参照せよ。

$\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ は各々余指数が 0, 1 で他のものは全て余指数 2 である。81 個の変形同値類 S_d ($1 \leq d \leq 8$) のうち、 S_d ($1 \leq d \leq 4$) は X の反標準射が簡明である。

$d=1$ $|K_{S_1}|$ は 1 個の base point をもち、有理写像 $S_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ を定める。また、 S_1 は重み付射影空間 $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$ の 6 次曲面に同型である。

$d=2$ $S_2 \longrightarrow \mathbb{P}^2$ 4 次曲線の上で分岐する 2 重被覆。

$d=3$ $S_3 \subset \mathbb{P}^3$ 3 次曲面。

$d=4$ $S_4 \subset \mathbb{P}^4$ 2 つの 2 次超曲面の完全交叉。

これを参考にするに、次数 $\overset{d=}{1, 2, 3, 4}$ の余指数 2 Fano 多様体 (X) を 2 次元以上の任意の次元 $\overset{n}{n}$ で構成することが出来る。即ち、

(2.3) $d=1$ X は重み付射影空間 $\mathbb{P}(\overbrace{1, \dots, 1}^{n+1}, 2, 3)$ の中の 6 次超曲面。

$d=2$ $X \longrightarrow \mathbb{P}^n$ 4 次超曲面の上で分岐する 2 重被覆。

$d=3$ $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ 3 次超曲面。

$d=4$ $X \subset \mathbb{P}^{n+2}$ 2 つの 2 次超曲面の完全交叉。

$d \geq 5$ の余指数 2 Fano 多様体には、次のものがみつかると。

(2.4) $d=5$ 5次元ベクトル空間の中の2次元部分空間全体のなすグラスマン多様体 $G(2,5)$ 。
 $G(2,5)$ は 6次元で指数 5。基本モデルは Plücker embedding $G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ 。

$d=6$ $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$ Segre embedding
 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$ Segre embedding

$d=7$ $B_p(\mathbb{P}^3)$, $\mathbb{P}^3$ に 1点 p で blow up したもの。
 基本線形系は p を通る 2次曲面の全体。
 $B_p(\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^8$ に埋めこむ。

$d=8$ $B_p(\mathbb{P}^2)$, $\mathbb{P}^2$ に 1点 p で blow up したもの。

以上あげたもので余指数 2 の Fano 多様体が本質的につくられる。

定理 ($[4], [5], [7]$ (3次元の時のみ)) X は余指数 2 の Fano 多様体で n 次元で d とする。このとき、

- (1) $1 \leq d \leq 8$.
- (2) $1 \leq d \leq 4$ なる、 X は (2.3) のいずれかの多様体と同型である。
- (3) $5 \leq d \leq 8$ なる、 X は (2.4) のいずれかか、それを何回か超平面で切断したものと同型である。

このように、余指数 2 で次数の低いものは任意次元
 (≥ 2) で存在するが、次数の高いものはある次元までし
 か存在しない。このことは次の様に理解できる。即ち、
 余指数 2 の $Fano$ 多様体、特に極小なもの、は殆んど
 等質空間を使って (その中で完全交叉を考えたり、
 X 上の 2 重被覆を作ったり等) つくることができるが、
 次数の低い時は X の等質空間 ^(は射影空間) であり、高い時はそうで
 ないものになっている。射影空間は任意次元で存在するが、
 それ以外へものはというわけにいかない。よって上のよう
 な状況になるというわけである。以下、余指数 3 の
 $Fano$ 多様体の分類に関して述べるが、この場合も
 結果として上と同様のことが成立していることが
 わかるであろう。

§3 余指数 3 の Fano 多様体

X は余指数 3 の n 次元 Fano 多様体、 H は X の基本因子類とする。 $-K_X \sim (n-2)H$ となっている。

命題(3.1) 直線束 $\mathcal{O}_X(kH)$ の Euler-Poincaré 標数は次の式で与えられる。

$$\chi(\mathcal{O}_X(kH)) = \frac{2k+n-2}{n!} \times \left\{ \frac{1}{2} (H^n) \prod_{i=0}^{n-2} (k+i) + n(n-1) \prod_{i=1}^{n-3} (k+i) \right\}$$

証明. Riemann-Roch 定理より t に関する n 次多項式 $P(t)$ で、全ての k に対して $P(k) = \chi(\mathcal{O}_X(kH))$ を満たすものがある。Riemann-Roch の式の形より

(*) $P(t)$ の最高次の係数は $\frac{(H^n)}{n!}$ に等しい。

$K_X \sim -(n-2)H$ 故に Serre の双対定理より、

$$\chi(\mathcal{O}_X(kH)) = (-1)^n \chi(\mathcal{O}_X(K_X - kH)) = (-1)^n \chi(\mathcal{O}_X(-n+2-k)H).$$

よて

$$(**) \quad P(t) = (-1)^n P(-n+2-t)$$

をえる。また、小平の消滅定理と Serre の双対定理より、

$$(***) \quad P(0) = 1, \text{ 全ての } -1 \geq k \geq -n+3 \text{ に対して } P(k) = 0$$

をえる。(***) より t に関する n 次式 $D(t)$ があって

$$P(t) = D(t) \prod_{i=1}^{n-3} (t+i) / n! \quad \text{と書くことができる。}$$

(**) より、 $D(t) = -D(-n+2-t)$ 。よて定数 A, B があって

$$D(t) = (2t+n-2) \{ A t(t+n-2) + B \}$$

と書ける。最高次の係数を見較べて、 $A = \frac{1}{2} (H^n)$ を、

$P(0)=1$ より $B=n(n-1)$ とえる。

証終。

小平の消滅定理より, $H^i(\mathcal{O}_X(H))=0$ $i>0$ だから, 命題に $k=1$ を代入して次をえる。

$$\text{系 (3.2)} \quad \dim |H| = \frac{1}{2}(H^n) + n - 1 \geq n.$$

系より, X の基本線形系 $|H|$ は充分たくさん member をもっているが, ここで我々は次の仮定をおく。

(ES) X には $(n-3)$ 個の $|H|$ の member $H_1, \dots, H_{n-3}$ があって $Y = H_1 \cap \dots \cap H_{n-3}$ は完全交叉でしかも非特異になる。

上の時, Y は自動的に指数 1 の 3 次元 Fano 多様体になる。Lefschetz の定理より Y と X は同じ Picard 数をもつ。

系より, X の次数 (H^n) は常に偶数であることがわかる。そこで, $g = \frac{1}{2}(H^n) + 1$ とおき, これを X の種数と呼ぶ。 g は常に 2 以上の整数である。

以下, Picard 数が 1 と 2 以上の時に分けてこの論文の主結果を述べる。

I. Picard 数 1 の余指数 3 Fano 多様体。

先づ 3 次元の場合を考える。[7] より, 指数 1, Picard 数 1 の 3 次元 Fano 多様体は種数が $2 \leq g \leq 10$ と $g=12$ のときにだけ存在する。

$2 \leq g \leq 5$ の時は反標準モデルは次の様に簡明である。

$$g=2 \quad X_2 \longrightarrow \mathbb{P}^3 \quad 6\text{次曲面で分岐する2重被覆。}$$

$$g=3 \quad \begin{array}{l} X_4 \subset \mathbb{P}^4 \quad 4\text{次超曲面, 或いは,} \\ X_4 \longrightarrow Q^3 \subset \mathbb{P}^4 \quad 2\text{次超曲面の2重被覆。} \end{array}$$

$$g=4 \quad X_{2,3} \subset \mathbb{P}^5 \quad 2\text{次と3次の超曲面の完全交叉。}$$

$$g=5 \quad X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^6 \quad 3つの2次超曲面の完全交叉。}$$

これを参考にすれば、 $2 \leq g \leq 5$ の Picard 数 1, 余指数 3 の Fam. 多様体を任意次元 $n \geq 3$ で構成することは易しい。実際、

$$(3.3) \quad g=2 \quad X_2 \longrightarrow \mathbb{P}^n \quad 6\text{次超曲面の上で分岐する2重被覆。}$$

$$g=3 \quad \begin{array}{l} X_4 \subset \mathbb{P}^{n+1} \quad 4\text{次超曲面, 或いは,} \\ X_4 \longrightarrow Q^n \subset \mathbb{P}^{n+1} \quad 2\text{次超曲面の2重被覆。} \end{array}$$

$$g=4 \quad X_{2,3} \subset \mathbb{P}^{n+2} \quad 2\text{次と3次の超曲面の完全交叉。}$$

$$g=5 \quad X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^{n+3} \quad 3つの2次超曲面の完全交叉。}$$

は全て、余指数3, Picard数1の m 次元 Fano 多様体である。また, (ES) を モジューロ にすれば, “これらが全てである”ことを示すのも難しくなる。

命題(3.4) X は余指数3, Picard数1,
 $2 \leq g \leq 5$ の Fano 多様体で (ES) をみたすとする。
 この時、 X は (3.3) のどれかに同型である。

さて, $g \geq 6$ の時は、もはや $\mathbb{P}^n$ の中の完全交叉や
 $\mathbb{A}^n$ 上の2重被覆で Fano 多様体を構成することは
 できない。しかし, $\mathbb{P}^n$ の代りに別の等質空間を
 使えば構成ができる。このことについて古典的に
 知られていたのは $g=6, 8$ の場合で、共に Grassmann
 多様体を使う。固定された N 次元ベクトル空間 V
 の k 次元部分空間の全体を $G(k, N)$ で表わす。
 $G(k, N)$ は $k(N-k)$ 次元で Picard数1の Fano
 多様体である。 $G(k, N)$ の指数は N に等しく、
 基本線形系 $|H|$ は丁度 Plücker embedding

$$G(k, N) \subset \mathbb{P}^{\binom{N}{k}-1}$$

を与える。 $G(2, 6)$ の場合は 8次元で指数6, よって
 余指数は3 になる。この場合, Plücker embedding の
 次数は 14 だから, $G(2, 6)$ の次数は 8 に等しい。

$g=6$ の場合は $G(2, 5)$ を使って余指数3 の Fano
 多様体かえられる。 $G(2, 5)$ 自身は余指数2た
 から, $G(2, 5)$ の2重被覆で $|2H|$ の member で
 分岐するものをつくれば, “これが” 次数6 の Fano
 多様体になる。反標準モデルは次の様にしてえられる。

$G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$ を Plücker embedding. $\widetilde{G}(2,5) \subset \mathbb{P}^{10}$ を κ の全性とする。 $\widetilde{G}(2,5)$ の頂点を通る 5 次超曲面 Q と $\widetilde{G}(2,5)$ の完全交叉 $X = \widetilde{G}(2,5) \cap Q \subset \mathbb{P}^{10}$ は X が smooth なる余指数 3, 種数 6 の Fano 多様体の反標準モデルである。

さて、残った $g=7, 9, 10$ の場合が問題だが、幸運にも $g=7, 9, 10$ の場合には等質空間で余指数 3 のものが存在する。

$g=7$ V は 10 次元ベクトル空間で $\sim$ は κ の上の非退化な 2 次型式とする。 V の部分空間 U は $\sim$ の κ への制限 $\sim|_U$ が小恒等的に零であるとき、totally isotropic であると言う。 V の isotropic な 5 次元部分空間の全体を X とする。 X は $G(5,10)$ の 10 次元部分多様体で直交群 $O(10)$ に関する等質空間になっている。

$g=9$ V は 6 次元ベクトル空間, $\sim$ は非退化な歪対称型式として $g=7$ の場合と同じことをする。 $\sim$ に関して totally isotropic な V の 3 次元部分空間の全体 X は $G(3,6)$ の 6 次元部分多様体で $Sp(3)$ に関する等質空間になっている。

$g=10$ $\mathbb{C}$ は Cayley の 8 元数の全体, $\mathbb{C}_0$ はその純虚数の全体とする。 $V = \mathbb{C}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の 3 次元部分空間で Cayley 代数の積に関して totally isotropic なものの全体を考え、 κ の連結成分

X とする。 X は $G(3, 7)$ の 5次元部分多様体で例外型 Lie 群 G_2 (E_6 の自己同型群) に関する等質空間に存在している。

(しかし, $g=12$ の場合は余指数 3 の等質空間は存在しない。
(Picard 数 1)

以上, $g \geq 6$ の場合, 余指数 3, Picard 数 1 の Fano 多様体 X は $6 \leq g \leq 10$ 或 $g=12$ かつ $3 \leq \dim X \leq n(g)$ の時に存在することがわかった。但し, $n(g)$ は次の通り。

(3.5)	g	6	7	8	9	10	12
	$n(g)$	6	10	8	6	5	3

(ES) を仮定すれば $g \geq 7$ の時, この存在範囲は丁度限界でもあることがわかる。

定理 A. X は余指数 3, Picard 数 1, 次数 ≥ 7 の Fano 多様体とする。 X が (ES) を満たすなら, $g \leq 10$ 或は $g=12$ で, しかも $3 \leq \dim X \leq n(g)$ である。但し, $n(g)$ は (3.5) の通り。

II. Picard 数が 2 以上の余指数 3 Fano 多様体

Picard 数が 2 以上の余指数 3 Fano 多様体は (ES) を仮定すれば同型類すべてきちんと分類することができ。指数 1, Picard 数 ≥ 2 の 3次元 Fano

多様体は 84 個あったが ([11]), 高次元では数はぐっと少なくなる。

先づ 4次元の場合を考える。Y を指数 2 の 3次元 Fano 多様体或は $\mathbb{P}^3$ とすると直積 $\mathbb{P}^1 \times Y$ は指数 2 の 4次元 Fano 多様体になる。こういう 4次元 Fano 多様体を直積型と呼ぶ。Y の変型同値類は丁度 9 個あり (V_d ($1 \leq d \leq 5$), W_6 , $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, V_7 , $\mathbb{P}^3$) ので直積型の指数 2 Fano 多様体 X も丁度 9 個変型同値類がある。そのうちの 6 個は Picard 数が 3, 2 個が 3, 1 個だけ ($X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$) Picard 数が 4 になる。さて、直積型でないものに対しては次をえる。

定理 B X は指数 2 の 4次元 Fano 多様体で直積型ではなく (ES) をみたすとする。このとき、

- (1) X の Picard 数は常に 2 以下である。
- (2) Picard 数 2 のものは変形を無視して丁度 9 個あり、それらは次の表のものどれかと同型である。

種数

X の構造

- | | |
|----|---|
| 7 | 次数 (2, 2) の因子の上で分岐する $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ の 2 重被覆。 |
| 9 | 次数 (1, 2) の $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$ の因子。 |
| 11 | 次数 (1, 1) の $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{Q}^3$ の因子。 |
| 11 | $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ の中の次数 (1, 1) の 2 つの因子の完全交叉。 |
| 12 | 2 次超曲面 $\mathbb{Q}^4 \subset \mathbb{P}^5$ とその上にのっている conic C で blow up したものの。但し、 |

C は 3 枚の 2 次元平面 から $\mathbb{Q}^4$ の中に入っているとする。

- 13 5 次の特殊直交群を Borel 部分群で割って得る等価空間 $SO(5)/B$ 。 $\mathbb{Q}^3 \subset \mathbb{P}^5$ の上に乗っている直線の全体 ($\mathbb{P}^3$ で parametrize される) の universal family (と同型)。
- 14 2 次超曲面 $\mathbb{Q}^4 \subset \mathbb{P}^5$ をその上の直線で blow up したものの。
- 16 2 次超曲面 $\mathbb{Q}^3 \subset \mathbb{P}^4$ 上の $\mathbb{P}^1$ -束。
 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{Q}}(1))$ 。
- 21 $\mathbb{P}^3$ 上の $\mathbb{P}^1$ -束 $\mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2))$ 。

5 次元以上では全て rigid になって、たった 4 個しか同型類がない。

定理 C X は余指数 3 の Fano 多様体で、Picard 数 ≥ 2 、次元 ≥ 5 で (ES) をみたしているとする。この時、 X は下の 4 つのどれかと同型である。

- (1) $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{Q}^3$ 。
- (2) $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ の因子で次数 (1, 1) のもの。
- (3) $\mathbb{P}^5$ を直線で blow up したものの。
- (4) $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ 。

(3) は種数 14、それ以外は種数 11 である。

§4 Fano 多様体としての等質空間

G は連結線型代数群, P は G の放物^(的)部分群とする。等質空間 $X = G/P$ は Fano 多様体になる。多様体 X のコホモロジー環の構造は G の Lie 環と G の root 系を使って書き下せ、これをもって X の Chern 類がどうなるかもわかってゐる ([1])。この節では G が単純で P が極大 (この時 X の Picard 数は 1 になる) の時に, X の次元, 指数, 次数等の計算のし方を説明する。

命題 (4.1) ([1] I, p. 512) G は連結な線型代数群, P は G の放物^(的)部分群とする。この時, $X = G/P$ は Fano 多様体である。

次の証明は森氏に負う。

証明. $\mathfrak{g}$ は G の Lie 環, T_x は X の接束とする。自然な写像 $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}_x \rightarrow T_x$ は各点で全射である。よて, 反標準束 $\bigwedge^{\dim X} T_x$ は零でない大域切断をもつ。言い換えれば反標準線形系 $| -K_X |$ は空でない。 $| -K_X |$ は G -不変で G は X に推移的に作用しているから $| -K_X |$ は free。よて, 次を示せばよい。

主張 反標準射 $\sigma_{|K_X|} : X \rightarrow \mathbb{P}^N$ は有限。

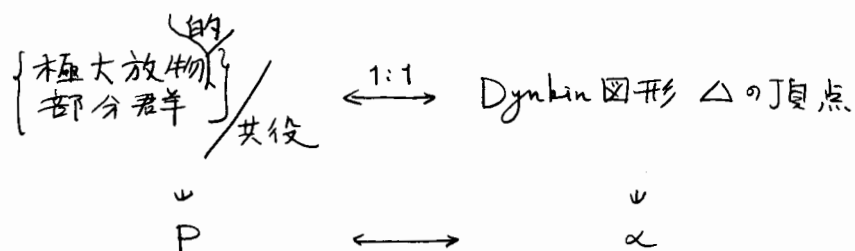
X の次元に関する帰納法で証明する。 $\sigma_{|K_X|}$ は G -同変であるから P を含む G の部分代数群 G' があって $\sigma_{|K_X|}$ の像は G/G' とまた各 fibre は G'/P と同型になる。 X は単有理的であるから $-K_X$ は自明でない。よて $\dim G'/P < \dim X$ 。 $X' = G'/P$ の各連結成分は等質空間だから, 帰納法の仮定より

$-K_{X'}$ は豊富である。一方、 X' は $\mathbb{P}_{[-K_X]}$ の fibre だから $-K_{X'} \sim 0$ 。よって $\dim X' = 0$ でなければならぬ。

証終

さて、以下では G は単純かつ単連結、 P はその極大放物^(的)部分群とする。互いに共役な P と P' は同型な等質空間を定めるから、 P の共役類のみを問題にすればよい。次の事はよく知られている。

(4.2) G の極大放物^(的)部分群の共役類の個数は G の階数 l に等しく、各共役類は G の Dynkin 図形の頂点 (単純 root) と 1対1 に対応している。



$\mathfrak{g}$ は G の Lie 環、 R は G の root の全体、また、 $R^\pm$ は Δ の $\pm$ root の全体とする。 G の Borel 群 B は対応する Lie 部分環 $\mathfrak{b}$ が $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R^-} \mathfrak{g}^\alpha$ となるようにとる。正 root でもって α 以外の $\alpha \in R^-$ 単純 root の非負係数の線型結合で書けるものの全体を $\mathfrak{a}_\alpha$ とする。この時 (4.2) に対応している P の Lie 部分環 $\mathfrak{p}$ は次の様になっている。

$$(4.3) \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\beta \in \Phi_+} \mathfrak{g}^\beta$$

正 root でも、 Φ_{α} に入っているものを (α に関する) 補正 root と呼ぶ。補正 root の全体を Φ_{α} で表わす時、(4.3) より 同型

$$(4.4) \quad \mathfrak{g}/\mathfrak{p} \cong \bigoplus_{\sigma \in \Phi_{\alpha}} \mathfrak{g}^{\sigma}$$

をえる。特に、等質空間 $X = G/P$ の次元は補正 root の個数に等しい。即ち、

$$(4.5) \quad \dim G/P = |\Phi_{\alpha}|$$

さて、 $X = G/P$ の指数の求め方を示そう。第1 Chern 類 $c_1(X)$ が $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の primitive 元類の何倍になっているかを見ればよい。 $H^2(G/B, \mathbb{Z})$ は自然に Δ の weight space と同型である。weight は B の1次表現を決め、よって X 上の直線束を定める。その直線束の Chern 類で $H^2(G/B, \mathbb{Z})$ の元が定まるわけである。 P は B を含むから自然な全射 $G/B \rightarrow G/P$ があり、この全射でもって $H^2(G/P, \mathbb{Z})$ は $H^2(G/B, \mathbb{Z})$ の部分加群と同一視される。特に、 $H^2(G/P, \mathbb{Z})$ の正の生成元は Δ の α に関する基本 weight w に対応している。

一方、補正 root 全部の和 $\alpha = \sum_{\sigma \in \Phi_{\alpha}} \sigma$ は weight になって、この α が X の第1 Chern 類 $c_1(X)$ に対応している。まとめると、

$$(4.6) \quad \begin{array}{ccc} H^2(X, \mathbb{Z}) & \hookrightarrow & H^2(G/B, \mathbb{Z}) \cong \text{weight space} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{正の生成元} & \longleftrightarrow & \text{基本 weight} \\ c_1(X) & \longleftrightarrow & \sum_{\sigma \in \Phi_{\alpha}} \sigma \end{array}$$

とある。

そこで X の指数を r とすると

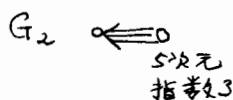
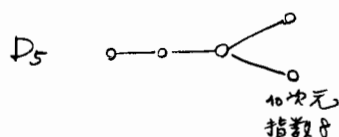
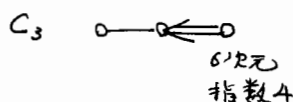
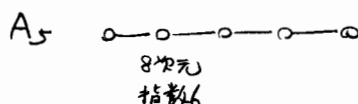
$$(4.7) \quad \sum_{\gamma \in \Phi_+} \gamma = r \cdot w$$

をえる。 w は基本 weight だから $w(\alpha) = \frac{(\alpha^2)}{2}$ 。よて、

$$(4.8) \quad r = \text{index } G/P = \sum_{\gamma \in \Phi_+} \frac{2(\alpha, \gamma)}{(\alpha^2)}$$

をえる。これを使って計算すると、次の4つの等質空間に対して余指数が3に存在することがわかる。Dynkin 図形の頂点の下に対応する等質空間の次元と指数を書く。

(4.9)



次に、 $X = G/P$ の次数の計算の方法をみよう。 $\text{Pic } X$ の正の生成元は α の基本 weight に対応しているが、 H の自己交点数は次の式で求まる。([1] II, p.340)

$$(4.10) \quad (H^2) = n! \prod_{\gamma \in \Phi_+} \frac{(w, \gamma)}{(\rho, \gamma)}$$

但し、 ρ は全ての正 root の和の半分である。この公式を Dynkin 図形 A_n の場合に適用すると、Plücker embedding の次数を計算する Severi の公式がえられる。また、(4.9) の各々の余指数3の等質空間に対して (4.10) を適用する

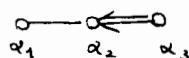
と、 A_5, C_3, D_5, G_2 に対して次数は各々、14, 16, 12, 18。よって、種数 g は各々、8, 9, 7, 10 と存る。1つだけ計算例を示す。

例 (4.11) (4.9) の C_3 の場合に計算してみよう。

Bourbaki [2] に従って、単純 root として $\alpha_1 = e_1 - e_2$,

$\alpha_2 = e_2 - e_3, \alpha_3 = 2e_3$ とする。 C_3

の正 root は $e_1 \pm e_2, e_2 \pm e_3, e_1 \pm e_3$,



$2e_1, 2e_2, 2e_3$ の 9 個。また α_3 に關する

補正 root は $e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 + e_3, 2e_1, 2e_2, 2e_3$ の 6 個で

ある。よって補正 root の和は $4(e_1 + e_2 + e_3)$ 。 $e_1 + e_2 + e_3$

が α_3 に關する基本 weight だから、 $X = G/P$ の指数は

4 に等しい。また、 $p = 3e_1 + 2e_2 + e_3$ だから、 H の自己交点数は

$$(H^6) = 6! \prod_{\gamma \in \Phi_{\alpha_3}} \frac{(e_1 + e_2 + e_3, \gamma)}{(3e_1 + 2e_2 + e_3, \gamma)}$$

$$= 6! \times \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}$$

$$= 16$$

とえる。

§5 藤田の判定法とその応用

指数2の4次元 Fano 多様体 X が smooth な fundamental member Y をもったとする。 Y は3次元 Fano 多様体で、 X の中に豊富な因子として埋め込まれ、結東 $\mathcal{N}_{Y/X}$ は Y の反標準束 $\mathcal{O}_Y(-K_Y)$ と同型である。このことは Y に非常に強い制限をつける。実際、次のことが言える。

定理 (5.1) 3次元 Fano 多様体 Y がある指数2の4次元 Fano 多様体の基本 member に存在するためには Y の第3 Betti 数 $B_3(Y)$ が偶でなければならない。

これは、非常に有用である。実際、 $\rho \geq 2$ の3次元 Fano 多様体は変形を無視しても 87個あるが、 X のうち、 B_3 の消えないものはたった33個しかない。

証明に先だて、藤田 [6] を復習する。

定義 (5.2) Y は非特異多様体、 L は X の上の豊富な直線束とする。任意の自然数 n に対して、 $H^1(Y, T_Y \otimes L^{-n})$ が消えるとき、 Y は L に関して、条件 (NS) を満たすという。

さて、藤田の判定法とは次のものである。

定理 (5.3) ([6]) Y は L に関して (NS) を満たすとする。このとき、もし Y が別の非特異多様体 X の中に豊富な因子として埋め込まれて $\mathcal{N}_{Y/X} \cong L$ と存在すれば、 X は射影空間 $\mathbb{P}^m$ と同型で、 Y は X の超平面

で有りれば有り。。

逆に言えば、 Y 半 $\mathbb{P}^m$ 存在 決して Y は $N_{Y/X} \cong L$ と
有るように豊富な因子として埋め込めることはできない。
後で、一般化する。に必要なので証明を添えておく。

証明 Y は X の中に $N_{Y/X} \cong L$ と有るように豊富な
因子として埋め込められているとする。森-陽広 [13] より
次を言えば充分である。

$$\text{主張} \quad H^0(X, T_X(-Y)) \neq 0$$

自然な完全列

$$(5.3.1) \quad 0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow T_X|_Y \longrightarrow \underset{\substack{\cong \\ L}}{N_{Y/X}} \longrightarrow 0$$

に L^{-n} を tensor して

$$(5.3.2) \quad 0 \longrightarrow T_Y \otimes L^{-n} \longrightarrow T_X(-nY)|_Y \longrightarrow L^{1-n} \longrightarrow 0$$

を得る。小平の消滅定理と条件 (NS) より、 $n \geq 2$ の時
 $H^1(Y, T_X(-nY)|_Y)$ が消え、 $H^0(T_X(-Y)|_Y)$ が零で
ないことがわかる。(Y は (NS) を満たすから $\dim Y \geq 2$ に注意)。完全列

$$(5.3.3) \quad 0 \longrightarrow T_X(-(n+1)Y) \longrightarrow T_X(-nY) \longrightarrow T_X(-nY)|_Y \longrightarrow 0$$

と $H^1(X, T_X(-nY)) = 0$, $n \gg 0$, より $n \geq 2$ 有る
 $H^1(X, T_X(-nY))$ が消えることがわかる。さて (5.3.3)
の $n=1$ の時より、制限写像

$$H^0(X, T_X(-Y)) \longrightarrow H^0(Y, T_X(-Y)|_Y)$$

は全射。だから、 $H^0(X, T_X(-Y)) \neq 0$ を得る。

証終

定理(5.1) は $\neq 0$ と次の命題(5) 従う。

命題(5.4) $B_3 = 0$ の 3次元 Fano 多様体 Y は $-K_Y$ に関して条件 (VS) を満たす。

先に次を示す。

補題(5.5) Y を 3次元 Fano 多様体とする時、反標準線形系 $| -K_Y |$ には互いに同型でない smooth members が存在する。

証明 $| -K_Y |$ が非常に豊富な時のみを考察する。 $Y \subset \mathbb{P}^N$ を Y の反標準モデル, $P = \{ Y_t; t \in \mathbb{P}^1 \}$ は Y の generic pencil とする。 Y_t の generic member は smooth な K3 曲面で、 $\mathcal{O}_{Y_t}(-K_Y)$ を偏極としてもつ。全ての t に対して、 Y_t は通常 2 重点 (かもたまり ([9]) から、周期写像

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathcal{F} = \text{周期領域} \\ t &\longmapsto (Y_t, \mathcal{O}_{Y_t}(-K_Y)) \text{ の周期} \end{aligned}$$

が定まる。

主張 ϕ は定値写像ではない。

定値写像だとすると、全ての t に対して $(Y_t, \mathcal{O}_{Y_t}(-K_Y))$ はある偏極 K3 曲面 (S, L) と同型である。今考えている

pencil P の base locus で Y を blow up したものを $\tilde{Y}$ とすると, 自然な射 $f: \tilde{Y} \rightarrow \mathbb{P}^1$ があって f の $t \in \mathbb{P}^1$ における fibre は Y_t であり, および S_t に同型になる. S の自己同型群は離散的で, $\mathbb{P}^1$ は単連結だから $\tilde{Y}$ は $S \times \mathbb{P}^1$ と同型. および Fano 多様体 Y が $S \times \mathbb{P}^1$ と有理同値であるが, これは明らかに矛盾である. よって主張を得る.

1つの K3 曲面 S を与えた時, S 上の偏極は高々可算個しかない. よって, 主張より互いに同型である P の smooth members が存在する.

証終

命題(5.4)の言証明. 全ての自然数 n に対して $H^1(Y, T_Y(nK_Y)) = 0$ を示せばよい. [例より] $| -K_Y |$ には smooth member S が存在する. 自然な完全列

$$(5.4.1) \quad 0 \rightarrow T_S \rightarrow T_Y|_S \rightarrow \underbrace{N_{S/Y}}_{\cong \mathcal{O}_S(-K_Y)} \rightarrow 0$$

に $\mathcal{O}_S(nK_Y)$ を tensor して

$$(5.4.2) \quad 0 \rightarrow T_S(nK_Y) \rightarrow T_Y(nK_Y)|_S \rightarrow \mathcal{O}_S(n-1)K_Y \rightarrow 0$$

を得る.

$$\text{主張 1.} \quad H^0(Y, T_Y(nK_Y)|_S) = 0 \quad n \geq 2.$$

S は K3 曲面だから, $H^0(S, T_S) = 0$. よって $n \geq 1$ なる常に $H^0(S, T_S(nK_Y)) = 0$ である. また, $n \geq 2$ なる $H^0(S, \mathcal{O}_S(n-1)K_Y) = 0$. よって完全列 (5.4.2) より,

主張 1. をえる。

主張 2. smooth member $S \in |-K_Y|$ を適当にとれば $H^0(S, T_Y(K_Y)|_S) = 0$ 。

S を適当にとれば, (5.4.2) の $n=1$ の時の coboundary map

$$\delta: H^0(\mathcal{O}_S) \longrightarrow H^1(T_S(K_Y))$$

が零でないことを言えばよい。完全列 (5.4.1) の coboundary map

$$\alpha: H^0(S, \mathcal{N}_{S/Y}) \longrightarrow H^1(S, T_S)$$

は $\alpha(A) = \rho \cup \delta(1)$ となっているから α が零でないことを言えば充分である。ところが、この α は次のような幾何学的意味をもっている。 S の $|-K_Y|$ の近傍 U を取れば, U の各点に対して S の小変形が定まるから正則写像 A

$$|-K_Y| \supset U \xrightarrow{A} M = S \text{ の 変形空間}$$

をえる。 $|-K_Y|$ の S に対応する点での接空間は自然に $H^0(S, \mathcal{N}_{S/Y})$ と, M の S に対応する点では $H^1(S, T_S)$ と各々同型である。しかも, A の誘導する接空間の進同型は, この同型でもって, α に等しい。よって補題 (5.5) より S を適当にとれば α は零でない。これで, 主張 2 が言証明できた。

完全列

$$0 \longrightarrow T_Y((n+1)K_Y) \longrightarrow T_Y(nK_Y) \longrightarrow T_Y(nK_Y)|_S \longrightarrow 0$$

と上の 2 つの主張より, $n \geq 1$ 存 S

$$H^1(Y, T_Y((n+1)K_Y)) \longrightarrow H^1(Y, T_Y(nK_Y))$$

は単射であることがわかる。よって、 Y が (NS) を満たすには $H^1(Y, T_Y(K_Y)) = 0$ でさえあればよい。一方、 $T(K_Y)$ は自然に Ω_Y^2 と同型だから Hodge 分解と仮定 $B_3 = 0$ より $H^1(Y, T_Y(K_Y)) \cong H^1(Y, \Omega_Y^2) = 0$ となる。

証終

藤田の判定法は次の様に改良することができる。

定義 (5.6) Y は非特異多様体、 L は Y 上の豊富な直線束とする。任意の $n \geq 2$ に対して $H^1(Y, T_Y \otimes L^n)$ が消える時、 Y は L に関して条件 (NW) を満たすと言う。

定理 (5.7) Y は L に関して (NW) を満たすとする。 Y が非特異多様体 X に埋め込まれ、 X の k 個の豊富な因子 $D_1, \dots, D_k$ の完全交叉になり (しかも $D_Y(D_i)$, $1 \leq i \leq k$, は全て L と同型であるとする。この時、次の c.c.s.s. が成立する。

- (1) $k \leq \dim H^1(Y, T_Y \otimes L^{-1})$, 或は
- (2) X は $\mathbb{P}^m$ と同型で Y は X の線型部分空間。

証明. Y は k 個の因子 $D_1, \dots, D_k$ の完全交叉 $D_1 \cap \dots \cap D_k$ であるとする。完全列

$$(*) \quad 0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow T_X|_Y \longrightarrow \underbrace{N_{Y/X}}_{L^{\oplus k}} \longrightarrow 0$$

より、 $N = \sum_{i=1}^k n_i \geq 2$ ならば $H^1(Y, T_X(-\sum_{i=1}^k n_i D_i)|_Y) = 0$ がわかる。また、Koszul 完全列

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-\sum_{i=1}^k D_i) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{O}_X(-D_i) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0$$

と $H^1(X, T_X(-\sum n_i D_i)) = 0$, $N \gg 0$, ε を使えば " $N = \sum n_i$ に関する帰納法により, $N \geq 2$ ならば"
 $H^1(X, T_X(-\sum n_i D_i))$ が消えることがわかる。よって、
 制限写像

$$H^0(X, T_X(-D_i)) \rightarrow H^0(Y, T_X|_Y \otimes L^{-1})$$

は全射である。もし, $H^0(Y, T_X|_Y \otimes L^{-1}) \neq 0$ ならば " X は射影空間で各 D_i はその超平面。よって (2) を得る。
 $H^0(Y, T_X|_Y \otimes L^{-1}) = 0$ の時は完全列 $(*) \otimes L^{-1}$ の coboundary map

$$H^0(Y, \mathcal{N}_{Y/X} \otimes L^{-1}) \rightarrow H^1(Y, T_Y \otimes L^{-1})$$

は単射。よって, (1) を得る。

証終

この定理より, (ES) を満たす余指数 3 の Fano 多様体の次元の評価を与えることができる。

系 (5.8) X は余指数 3 の Fano 多様体で (ES) を満たすとする。即ち, $(\dim X - 3)$ 個の基本 member $H_1, \dots, H_{\dim X - 3}$ があり, 完全交差 $Y = H_1 \cap \cdots \cap H_{\dim X - 3}$ は非特異であるとする。この時, もし $H^1(Y, T_Y(2K_Y)) = 0$ ならば

$$\dim X \leq 3 + \frac{1}{2} B_3(Y).$$

証明. 命題 5.4 の証明の主張 1 でみたように $n \geq 3$ ならば $H^1(Y, T_Y(nK_Y))$ は $H^1(Y, T_Y(2K_Y))$ の部分空間と同型。よって, 仮定より, 3次元 Fano 多様体 Y は $-K_Y$ に関して条件 (NW) を満たす。一方,

$T_Y(K_Y) \cong \mathcal{O}_Y^2$, $H^3(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ と Hodge 分解より
 $H^1(Y, T_Y(K_Y))$ の次元は $\frac{1}{2} B_3(Y)$ に等しい。
 故に定理(5.7) より 系をえる。

証終

§6 主結果の証明

§3で述べた定理 A, B, C の証明の方針について述べる。定理 A は系 (5.8) を使ってもできるが、細かい点で問題が出てくるので、Fano 多様体の代りに K3 曲面を使って証明する。X は余指数 3 Fano 多様体で (ES) を満たしているとする。[4] より、X の基本線型系 $|H|$ の $(n-2)$ 個の member $H_1, \dots, H_{n-2}$ で $S = H_1 \cap \dots \cap H_{n-2}$ が完全交叉で smooth にあるものがある。

定理 A の証明。X は余指数 3 の n 次元 Fano 多様体で Picard 数は 1 とする。 $(S, H|_S)$ は偏極 K3 曲面で S の次数は X の次数 $d = 2g - 2$ に等しい。

補題 X を generic に変形し、 H_i ($1 \leq i \leq n-2$) を generic にとると、 $(S, H|_S)$ は generic な次数 d の偏極 K3 曲面である。

この補題を §3 であげた余指数 3 等質空間 $X = \mathrm{Spin}(10)/P$, $\mathrm{Grass}(2, 6)$, $\mathrm{Sp}(3)/P$, G_2/P に適用すると generic な次数 $d = 12, 14, 16, 18$ の偏極 K3 曲面はこれらの等質空間の中の完全交叉として実現される。これより、Bot の消滅定理 ([3]) を使って計算すると、

(6.1) (S, L) を次数 $d = 12, 14, 16, 18$ の generic な K3 曲面とする。この時、 $\dim H^1(S, T_S \otimes L^{-1})$ は各々 8, 6, 4, 3 に等しい。また、全ての $m \geq 2$ に対して $H^1(S, T_S \otimes L^{-m})$ は消える。

特に, $\mathcal{S}$ は $\mathcal{L}$ に関して条件 (NW) を満たす。

さて, 再び X は一般の余指数 3 Fano 多様体とする。

補題 3 より, X の変形 X' と X の上の基本 member $H_1, \dots, H_{n-2}$ があって $\mathcal{S}' = H_1 \cap \dots \cap H_{n-2}$ は generic な次数 d の偏極 $K3$ 曲面に存在する。定理 5.7 と上の (6.1) より $\dim X' = \dim X$ の評価が得られて, $g = 7, 8, 9, 10$ の場合の定理 A を得る。 $g=12$ の時は, g 場合の 3次元 Fano 多様体が $B_3=0$ と存在するので定理 5.1 より定理 A が従う。

証終

さて, 定理 B であるが, X を指数 2, Picard 数 ≥ 2 の 4次元 Fano 多様体とする。(ES) を仮定するから, 基本線型系 $|H|$ は smooth member Y を持つ。 Y は指数 1 の 3次元 Fano 多様体で Y の Picard 数, 多重数は各々 X のそれに等しい。また, Y の変形同値類は X のそれのみによって決まる。そこで, X を分類することは次の 2つの部分に分れる。

① 3次元 Fano 多様体の変形同値類 $\mathcal{Y}$ を与えた時, $\mathcal{Y}$ の member を基本 member に持つ指数 2 の 4次元 Fano 多様体が存在するか?

② ①の答が Yes なら, X の構造を決定せよ。

①に対しては定理 5.1 が非常に有効である。[11] より, 指数 1, Picard 数 ≥ 2 の 3次元 Fano 多様体の変形同値類は 84 個あるが, X のうちの 51 個に

対しては第3 Betti 数 B_3 は消えている。よて、定理
 3.1 より これらに対しては ①の答は No である。残り
 33個の同値類のうち 15個に対しては X の Chow 環
 等の構造をみていくと矛盾がでてきて、やはり ①の答は
 No になる。最後に残った 18個に対しては ①の答は
 Yes である。そこで、これらに対して ②を考えた方がいい。
 Y には複数の extremal ray があり、各 extremal ray
 は Y に fibre 空間構造 やその上の例外因子等を
 定める。([10])。 X は Y を豊富な因子として含む
 ためにこれらが X に遺伝することが示せ、 X の構造
 を具体的に決めることができる。定理 C に関しても
 同様である。

References

[1] Borel, A and Hirzebruch, F.: Characteristic classes and homogeneous spaces I & II, Amer. J. of Math. 80 (1958), 458 - 538 & 81 (1959), 315 - 382.

[2] Bourbaki, N.: "Éléments de mathématique" Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.

[3] Bott, R.: Homogeneous vector bundles, Ann. of Math. 66 (1957), 203 - 248.

[4] Fujita, T.: On the structure of certain types of polarized varieties I & II, Proc. Japan Acad. 49 (1973), 800 - 802 & 50 (1974), 411 - 412.

[5] ——. : On the structure of polarized manifolds with total deficiency one I & II, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 709 - 725 & 33 (1981), 415 - 434.

[6] ——. : Impossibility criterion of being an ample divisor, J. Math. Soc. Japan 34 (1982), 355 - 363.

[7] Iskovskih, V. A.: Fano 3-folds I & II, Math. USSR. Izv. 11 (1977), 485 - 527 & 12 (1978), 469 - 506.

[8] ——. : Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields, Math. USSR Izv. 14 (1980), 17-39.

[9] Katz, N.: Pinceaux de Lefschetz : Theoreme d'existence, Groupes de monodromie en Geometrie Algebrique (SGA 7, II), Springer Lecture Notes n°340.

[10] Mori, S.: Threefolds whose anticanonical bundles are not numerically effective, Ann. of Math.

[11] Mori, S and Mukai, S.: Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$, Manuscripta Math. 36 (1981), 147-162.

[12] — and —. : On Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$, Advanced Studies in Pure Mathematics 1 (1983), 101-129.

[13] Mori, S and Sumihiko, H.: On Hartshorne's conjecture, J. Math. Kyoto Univ. 18-3 (1978), 522-533.

[14] Šokurov, V.V.: The existence of lines on Fano threefolds, Math. USSR Izv. 15 (1980), 173-209.

Shigeru MUKAI
Nagoya University