

Geodesic flows の generic properties に関する予想とその周辺

徳島大, 教養 桑原 類史

Riemann 幾何学に於いて, 測地線の性質の研究は大きなテーマの1つである。測地線は, 力学的な見方をすれば, 余接バンドル上の Hamilton flow (geodesic flow と呼ばれる) としてとらえることができる。

ここでは, 力学的な立場から, geodesic flows の generic な性質について, いくつかの予想とその周辺の事情を考察する。特に, geodesic flow に関する "Closing lemma" が成り立てば, ある種の性質の genericity が導びかれることを示す。

§1. 定義および Closing lemma.

M をコンパクト, n 次元, C^∞ 多様体 ($\partial M = \emptyset$), T^*M を M 上の余接バンドルとする。 $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n) \in T^*M$ の自然な局所座標とすれば, T^*M は 2 次形式 $\omega = \sum_i dp_i \wedge dx^i$ によって定義されるシンプレクティック多様体になる。 M 上

の C^{k+2} -Riemann 計量 g ($k \geq 0$) に対して, T^*M 上の 函数

$$H_g = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij}(x) p_i p_j$$

を定義する。

$$X_g \lrcorner \omega = -dH_g \quad (\lrcorner: \text{内部積})$$

によって定まる Hamilton ベクトル場 X_g から導びかれる T^*M 上の flow $\{\varphi_t^g\}$ を geodesic flow と呼ぶ。 $\{\varphi_t^g\}$ の積分曲線を M 上に射影したものが Riemann 多様体 (M, g) の測地線を与える。

geodesic flow $\{\varphi_t^g\}$ の周期点の全体を $I(g)$ と表わす。また, $\Omega(g)$ によって $\{\varphi_t^g\}$ の非遊走点の全体を表わすことにする。

ここで, $p \in T^*M$ が非遊走点であるとは, p の任意の近傍 U および正数 T に対して, $t > T$ なる t が存在して, $\varphi_t^g(U) \cap U \neq \emptyset$ となることである。 M がコンパクトであるから,

Poincaré の回歸定理より次が言える。
(および Liouville の定理)

Lemma 1. 任意の計量 g に対して, $\Omega(g) = T^*M$ 。

次に, $\mathcal{R}^k$ ($k=0, 1, 2, \dots, \infty$) を M 上の C^k -Riemann 計量の全体とする。 C^k -Riemann 計量は M 上の 2 階共変テンソルバンドル $(S_2 M)$ の C^k -級 cross-section とみなすことができる。そして, local trivialization によって $\mathcal{R}^k$ に C^k -位相を導入することが

できる。この様に位相を入れれば、 R^k は Baire 空間になる。(実際、 R^k は Banach 空間 $C^k(S_2M)$ の開部分集合である。)

Remark. 位相空間 E が Baire 空間 であるとは、 E の部分集合が第 1 類ならば、 $E \setminus A$ が E で dense であることである。また、これは次の様に言いかえてもよい： E が Baire 空間である。

$\Leftrightarrow E$ の開集合 $O_1, O_2, \dots$ のどれもが E で dense ならば、

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \text{ も } E \text{ で dense である。}$$

さて、以上の準備の下に Closing lemma を述べる。

C^k -closing lemma. $g \in R^k$ ($k=0, 1, 2, \dots, \infty$) で、 $p^* \in T^*M$ の任意の点とする。このとき、 R^k における g の任意の近傍 U に対して、 $p^* \in I(g')$ を満たす g' が U 内に存在する。

残念ながら、 $k \geq 1$ に対してこの lemma は証明されていない。これに関しては §3 で考察する。

§2. Geodesic flows の generic properties.

この節では、geodesic flows の generic な性質に関する次の予想と Closing lemma の関係を論じる。すなわち、次の図式

を示す。

Closing lemma $\Leftrightarrow$ Conjecture 1 $\Rightarrow$ Conjecture 2

(ここで, $A \Rightarrow B$ は, 命題 A から 命題 B が導びかれることを表す。)

Conjecture 1. R^k ($k \geq 3$) の residual subset S^k が存在し,
 $g \in S^k$ ならば

$$\bar{\Gamma}(g) = T^*M \quad (\bar{\Gamma}(g) \text{ は } \Gamma(g) \text{ の閉包である。})$$

となる。

Definition. T^*M 上の C^∞ 函数 f が geodesic flow $\{\varphi_t^g\}$ の
第1積分であるとは, 次の2条件が満たされることである;

(i) $\{\varphi_t^g\}$ の任意のエネルギー-曲面 $H_g = \text{const.}$ 上の任意の開
 集合で f は定数とはならない。

(ii) $X_g f = 0$ 。

Conjecture 2. R^k ($k \geq 3$) の residual subset S^k に対して,
 $g \in S^k$ ならば $\{\varphi_t^g\}$ は第1積分を持たない。

Remarks 1. 位相空間 E の部分集合 A が residual であるとは
 A が可算個の openかつ dense な E の部分集合の共通部分であ

ることである。EがBaire空間ならばAはEでdenseである。
ある性質Pがresidualな部分集合の元に対して成立する時、
性質Pはgenericであると呼ばれる。

2. $\bar{I}(g) \neq T^*M$ であるような計量gの具体的な例は
Weinstein [1]によって与えられている。

3. $\xi = \xi^i \partial_{x^i}$ を (M, g) の Killing ベクトルとすれば, ξ より
定義される函数 $f(x, p) = \sum_i \xi^i p_i$ は $\{\varphi_t^g\}$ の第1積分であ
る。Killingベクトル場が存在しないような C^∞ 計量の全体が
 $\mathcal{R}^\infty$ において open かつ dense であることが知られている
(e.g. Ebin [2])。

いくつかの準備をする。

円周 S^1 から M への完全連続写像 γ で, $\dot{\gamma}$ が2乗可積分であ
るものの全体を $\Lambda(M)$ で表わす。Riemann計量 g に対して,

$$E_g: \Lambda(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad \gamma \mapsto \int_{S^1} |\dot{\gamma}|_g^2$$

が定義される。このとき,

$\gamma \in \Lambda(M)$ が (M, g) の閉測地線 $\Leftrightarrow \gamma$ が E_g の critical point.
さて, E_g の critical value の全体を $\mathcal{L}_g$ とする。

Definition. $g \in \mathcal{R}^k$ ($k \geq 2$) が bumpy metric であるとは, 任
意の $c \in \mathcal{L}_g \setminus \{0\}$ に対して, $E_g^{-1}(c)$ が $\Lambda(M)$ (Hilbert多様体)

の非退化な critical submanifold であることである (see Abraham [3]).

Definition. γ を $\{\varphi_t^g\}$ の周期軌道とする。 γ が 1-elementary であるとは, γ に associate した Poincaré 写像 $P_\gamma: \Sigma \rightarrow \Sigma$ に対して, $dP_\gamma: T\Sigma_{\gamma(0)} \rightarrow T\Sigma_{\gamma(0)}$ が固有値 1 を持たないことである (see Klingenberg [4, Ch.3]). さらに, $g \in \mathcal{R}^k (k \geq 2)$ が 1-elementary であるとは, $\{\varphi_t^g\}$ の全ての周期軌道が 1-elementary であることである。

Lemma 2 (Bott [5]). g が bumpy metric であれば, g は 1-elementary である。

(証明) g が bumpy metric であることは, (M, g) の任意の閉測地線 γ の nullity $\nu(\gamma)$ が零であることと同値である。さらに, $\nu(\gamma)$ は γ に沿う Jacobi 場 Y で $Y(0) = Y(1)$, $\langle Y(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = 0$ を満たすものの全体から成るベクトル空間の次元である。従って, $\nu(\gamma) = \text{dimension of } \ker(dP_\gamma - I)$. $\square$

ここで, Baire 空間上の集合値関数に関する若干の復習をする (see Robinson [6, p.599-p.601]).

Y を距離空間 (距離 d) とする。 Y のコンパクト閉部分集

合の全体を 2^Y と表わす。 2^Y には次の様な距離 d が定義される； $A_1, A_2 \in 2^Y$ に対して，

$$d(A_1, A_2) := \max \left(\sup_{a_1 \in A_1} d(a_1, A_2), \sup_{a_2 \in A_2} d(A_1, a_2) \right).$$

X を Baire 空間とし， $f: X \rightarrow 2^Y$ を集合値函数とする。 f が $x_0 \in X$ において 下半連続 であるとは， $\forall \varepsilon > 0$ に対して， x_0 の近傍 U が存在して， $d(z, f(y)) < \varepsilon$ for $\forall z \in f(x_0), \forall y \in U$ となることである。

Lemma 3. $f_n: X \rightarrow 2^Y$ ($n=1, 2, \dots$) を下半連続な集合値函数族とし， $f_n(x) \subset f_{n+1}(x)$ が満たされているとする。このとき， $f(x) := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$ で定義される $f: X \rightarrow 2^Y$ は下半連続である。

Lemma 4. $f: X \rightarrow 2^Y$ を下半連続な集合値函数とする。このとき， f が連続である様な点の全体は X の residual subset である。

さて， Closing lemma と Conj. 1 の同値性を示そう。その為の lemmas を述べる。

Lemma 5. (Eells-Lemaire [7], Koiso [8]). $g \in R^k$ ($k \geq 3$) で， $\tilde{Y}$ を $\{\varphi_t^g\}$ の周期軌道とする。 $\tilde{Y}$ が 1-elementary ならば， 2^{T^*M}

における $\tilde{\gamma}$ の任意の近傍 U に対して, g の近傍 $V \subset \mathcal{R}^k$ が存在して, $g' \in V$ ならば, $\{\varphi_t^{g'}\}$ の周期軌道 $\tilde{\gamma}'$ で $\tilde{\gamma}' \in U$ となるものが存在する。

Lemma 6. $\tilde{p}, \tilde{q} \in T^*M$ の異なる 2 点とする。このとき, $g \in \mathcal{R}^k$ の任意の近傍 U に対して, 正数 C が存在して, $\tilde{d}(\tilde{p}, \tilde{q}) < C$ ならば, M の C^∞ 微分同相写像 Φ で, $\tilde{\Phi}(\tilde{p}) = \tilde{q}$, $\Phi^*g \in U$ となるものが存在する。ここで, $\tilde{d}(\cdot, \cdot)$ は T^*M 上の適当に定義された距離, $\tilde{\Phi}: T^*M \rightarrow T^*M$ は Φ の自然な lift である。

(証明は容易である。)

さて, $g \in \mathcal{R}^k$ に対して, $S_g^*M := \{\tilde{p} \in T^*M; H_g(\tilde{p}) = 1\}$ とおく。 S_g^*M は T^*M のコンパクト部分集合であり, (M, g) の閉測地線 γ と $\{\varphi_t^g\}$ の S_g^*M 上の周期軌道 $\tilde{\gamma}$ は 1 対 1 に対応する ($\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$)。 M 上の bumpy C^k -metric の全体を $\mathcal{R}_B^k$ で表わす。

Lemma 7. $k \geq 3$ とする。

- (1) $\mathcal{R}_B^k$ は $\mathcal{R}^k$ の residual subset である。
- (2) $g \in \mathcal{R}_B^k$ ならば, $\forall C > 0$ に対して, $E_g(\gamma) < C$ となる閉測地線 γ は有限個である。

$$(3) \Gamma_{1,n}: \mathcal{R}_B^k \rightarrow 2^{\mathcal{T}^{*M}} \quad (n=1,2,\dots)$$

$$q \mapsto \bigcup_i \tilde{\gamma}_i \quad \left(\begin{array}{l} \tilde{\gamma}_i: \tilde{\gamma}_i \subset S_q^* M \text{ かつ } E_q(\pi(\tilde{\gamma}_i)) < n \text{ を満たす} \\ \{\varphi_t^q\} \text{ の周期軌道} \end{array} \right)$$

は下半連続な集合値関数である。

(証明) (1) Abraham [3] 又は Klingenberg [4, Ch. 3] を参照せよ。

(2) $E_q(\gamma) < C$ を満たす閉測地線が無限個あったとすると, E_q が Palais-Smale の条件を満たすことから,

$$\exists \{\gamma_n: \text{閉測地線}\}_{n=1}^{\infty} \text{ s.t. } \gamma_n \rightarrow \gamma_0 \text{ (一様収束)}.$$

ここで, γ_0 は $E_q(\gamma_0) \leq C$ を満たす閉測地線である。これは, E_q が non-degenerate な critical submanifold のみを持つことに矛盾する。

(3) (1)より $\Gamma_{1,n}(q)$ は有限個の周期軌道 $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_k$ から成る。

Lemma 5 より各 $\tilde{\gamma}_i$ に対して, q の近傍 U_i が存在して, $q' \in U_i$ ならば, $\{\varphi_t^{q'}\}$ の周期軌道 $\tilde{\gamma}_i'$ で $\tilde{d}(\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_i') < \varepsilon/2$, かつ $(*) |E_{q'}(\pi(\tilde{\gamma}_i')) - 1| < \varepsilon/2$ となる。 $\tilde{\gamma}_i'' := \pi^{-1}(\pi(\tilde{\gamma}_i')) \cap S_{q'}^* M$ とすれば, $(*)$ より $\tilde{d}(\tilde{\gamma}_i'', \tilde{\gamma}_i') < \varepsilon/2$ となる。従って, $\tilde{d}(\tilde{\gamma}_i, \tilde{\gamma}_i'') < \varepsilon$, すなわち $\tilde{d}(\tilde{\gamma}_i, \Gamma_{1,n}(q')) < \varepsilon$ 。 $U = \bigcap_{i=1}^k U_i$ とおけば, U は q の近傍で, $q' \in U$ ならば $\tilde{d}(\tilde{\gamma}_i, \Gamma_{1,n}(q')) < \varepsilon$ となる。 $\square$

$\mathcal{R}_B^k$ は $\mathcal{R}^k$ の dense subset だから, Baire 空間である。

Lemma 3 より $\bar{\Gamma}_1(q) := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_{1,n}(q)}$ は $\mathcal{R}_B^k$ の下半連続関数であ

る。明らかに,

$$\bar{\Gamma}_1(q) = S_q^* M \iff \bar{\Gamma}(q) = T^* M.$$

S^k を $\bar{\Gamma}_1$ が連続である様な $q \in R_B^k$ の全体とする。Lemma 4 より S^k は R_B^k の residual subset であるから, R^k の residual subset である。

[A] $k \geq 3$ に対して, C^k -closing lemma から Conj. 1 が従うこと.

$q_0 \in S^k$ に対して, $\bar{\Gamma}_1(q_0) = S_{q_0}^* M$ であることを示す。 $\tilde{p} \in S_{q_0}^* M$ かつ, $\tilde{p} \in \bar{\Gamma}_1(q_0)$ とする。 C^k -closing lemma より q_0 の近傍 U ($\subset R^k$) 内に $\tilde{p} \in \bar{\Gamma}(q^{(1)})$ となる $q^{(1)}$ が存在する。 $\tilde{p}$ を通る周期軌道を $\tilde{\gamma}$ とする。 Klingenberq [4, Proposition 3.3.7] によれば $q^{(1)}$ に任意に近い計量 $g^{(2)} \in U$ で, $\pi(\tilde{\gamma})$ が $(M, g^{(2)})$ の閉測地線であり, $\tilde{\gamma}' := \pi^{-1}(\pi(\tilde{\gamma})) \cap S_{g^{(2)}}^* M$ が $\{\varphi_t^{g^{(2)}}\}$ の 1-elementary な周期軌道であるようにできる。 $\tilde{p}' = \pi^{-1}(\pi(\tilde{p})) \cap \tilde{\gamma}'$ とおけば, $\tilde{p}$ と $\tilde{p}'$ は任意に十分近い。 R_B^k が R^k で dense であることと, $\tilde{\gamma}'$ が 1-elementary であることから, $q^{(3)} \in U \cap R_B^k$ が存在し, $\{\varphi_t^{q^{(3)}}\}$ の周期点 $\tilde{q}$ が $\tilde{p}'$ の十分近くにあるようにできる。 さて, Lemma 6 から M の C^∞ 微分同相写像 Φ を $\tilde{\Phi}(\tilde{p}) = \tilde{q}$, かつ $q^{(4)} \equiv \Phi^* q^{(3)}$ が q に十分近いようにとることができる。 このとき, $q^{(4)} \in R_B^k \cap U$ かつ $\bar{\Gamma}(q^{(4)}) \ni \tilde{p}$ である。 $H_{q^{(4)}}(\tilde{p}) = 1 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) とすると, $q = q^{(4)} / (1 + \varepsilon)$ とおけば $\bar{\Gamma}_1(q) \ni \tilde{p}$, かつ

$q \in R_B^k \cap U$ とできる。この様にして, R_B^k 内の列 $\{q_n\}_{n=1}^\infty$ で,
 $q_n \rightarrow q_0$, かつ $\tilde{p} \in \bar{\Gamma}_1(q_n)$ となるものがとれる。ところで, $\bar{\Gamma}_1$
 は q_0 で連続だから, $\tilde{p} \in \bar{\Gamma}_1(q_0)$ となる。これは矛盾である。■

【B】 Conj. 1 から Closing lemma が従うこと。

$q \in R^k$, $\tilde{p} \in T^*M$ とする。 U を q の任意の近傍とすると,
 Conj. 1 より, $\exists q' \in U$ s.t. $\bar{\Gamma}(q') \ni \tilde{p}$. $\tilde{p} \notin \Gamma(q')$ とする ($\tilde{p} \in \Gamma(q')$ ならば証明終わり)。 $\tilde{p}$ の十分近くに $\tilde{p}' \in \Gamma(q')$ が
 存在する。 Φ を M の C^∞ 微分同相写像で $\tilde{\Phi}(\tilde{p}) = \tilde{p}'$, $q'' \equiv$
 $\Phi^*q' \in U$ となるものとする (Lemma 6)。このとき,
 $\tilde{p} \in \Gamma(q'')$ が成り立つ。 ■

【C】 Conj. 1 から Conj. 2 が従うこと。

Proposition 1. $q \in R^k$ ($k \geq 2$) が 1-elementary, かつ $\bar{\Gamma}(q)$
 の内部が空集合でないとする。このとき, $\{\varphi_t^q\}$ は第 1 積分
 を持たない。

(証明) 第 1 積分 F が存在したとすると, $\text{Int } \bar{\Gamma}(q) \neq \emptyset$
 だから, $q \in \Gamma(q)$, かつ $(dH_q \wedge dF)_q \neq 0$ となる点 $q \in T^*M$
 が存在する。 q を通る周期軌道を $\tilde{\gamma}$ とする。 q の近傍におけ
 る T^*M の局所座標として $(y^1 = t, y^2 = H_q, y^3 = F, \dots, y^{2n})$
 ととれる。ここで, t は $\tilde{\gamma}$ に沿う時間パラメータである。

$$P : (y^3 = F, \dots, y^{2n}) \rightarrow (y^3, \dots, y^{2n})$$

を $\tilde{\gamma}$ に沿う Poincaré 写像とする。F が第 1 積分だから、

$$(dP)_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

となり、 $(dP)_q$ は固有値 1 をもつ。従って、 q は 1-elementary でない。これは矛盾である。 $\square$

Conj. 1 と Proposition 1 を合わせれば、 $q \in S^k$ なる q に対して、 q は第 1 積分を持たない。従って、Conj. 2 が導びかれる。

§3. Closing lemma の“証明”について.

一般の flow の C^1 -closing lemma は C.C. Pugh [9, 10] で証明された。その証明は、考えている点 p の近傍で、ベクトル場を摂動することによって点 p が周期点であるようにすることである。そのとき、ベクトル場の摂動を C^1 -位相の意味で任意に小さくする為の工夫が極めて複雑であり、その方法を C^k ($k \geq 2$)-位相まで拡張することは成功していない。又、Hamiltonian flow について、 C^1 -closing lemma は R.C. Robinson [6] で述べられている。その証明は一般の flow の場合の証明がそのまま適用される。geodesic flow も一種の Hamiltonian

flowであるが, geodesic flowの場合, 擾動する要素は計量 $g_{ij}(x)$ だけであり, 一般の Hamiltonian flow の場合よりも擾動の自由度が少ないことが, 証明の困難さを増すことになる。従って, 今のところ, $C^k (k \geq 1)$ -位相について geodesic flow の closing lemma は証明されていない(と思う)。

この節では, C^0 -closing lemma の証明の概略を与える。そして, それを $C^k (k \geq 1)$ -位相に拡張する困難さを見ることにする。

g を Riemann 計量, $\tilde{p} \in T^*M$, $p = \pi(\tilde{p}) \in M$ とする。 $\tilde{p}$ を初期点とする $\{\varphi_t^{\tilde{p}}\}$ の積分曲線を $\tilde{\gamma}(t)$ とし, $\gamma(t) = \pi(\tilde{\gamma}(t))$ とする。ただし, $\gamma(t)$ は $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ かつ $\gamma(0) = p$ とする。 Σ_p を p において $\dot{\gamma}(0)$ に直交する小さな超曲面とする。 Σ_p と Σ_p の焦点の距離を $\delta (> 0)$ とする。 Σ_p 上の点 u を初期点とし, Σ_p に直交する測地線族 $\gamma(t, u)$ を考える。

$$\left. \begin{aligned} m &= \gamma(\delta/2, p), \quad \Sigma_m = \gamma(\delta/2, \Sigma_p) \\ g &= \gamma(-\delta/4, p), \quad \Sigma_g = \gamma(-\delta/4, \Sigma_p) \end{aligned} \right\} \text{ とおく. }$$

$\Sigma_m, \Sigma_p, \Sigma_g$ は互いに微分同型である。

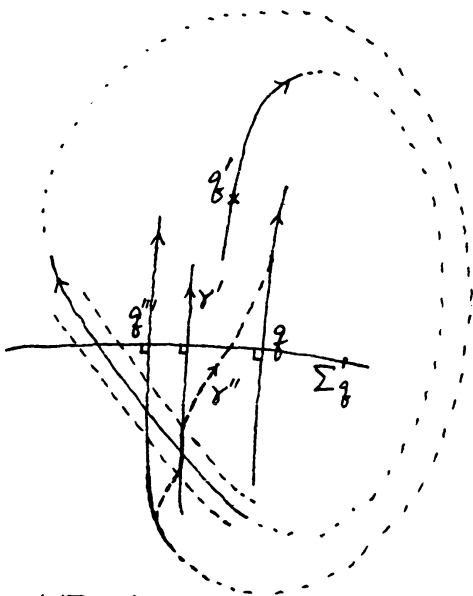
T^*M 上の任意の点は非遊走点だから (Lemma 1), $\forall \varepsilon, N (> 0)$ に対して, 次を満たす Σ_p 上の点 p' が存在する;

$$(C.1) \quad d(g, g') < \varepsilon/2, \quad d(m, m') < \varepsilon/2 \quad \text{ただし, } g' = \gamma(-\delta/4, p')$$

$\gamma'(t, \phi(u))$ をなめらかに結ぶ曲線が (M, g') の測地線になるようにすることができる。

同様に, Σ_m の近傍で g を変形して, m を通る測地線と m' を通る測地線をなめらかに結ぶ測地線を作ることができる。この様にして, p を通る閉測地線を持つ様な計量 g' を構成することができる。これを T^*M に持ち上げれば, $\{\varphi_t^{g'}\}$ は $\tilde{p}$ を周期点としてもつ様にできたことになる。

さて, g と g' の差を評価しなければならぬ。その為に, Gluck-Singer の議論をもう少し詳しく述べる。計量 g' の構成は, まず $\gamma'(t, u)$ と $\gamma'(t, \phi(u))$ をなめらかに結ぶ曲線族 $\gamma''(t)$ を構成し, その曲線族から g' を構成するという方法である。そして, g と g' の差は γ' と γ'' の差で評価できる。



(図2)

ここで注意したいことは, g' を出発した測地線が g'' へ至る途中で何度も Σ_g の近傍を通る可能性があることである。従って, Σ_g の近傍の計量を勝手に変形すると, 途中の軌道が変わって, g'' へ至らなくなってしまう。それを避ける為には, 途中, Σ_g と交わる部分の管状近傍では,

$\gamma'' = \gamma'$ となるようにしなければならない (図2)。以上の様な状況で, g'' と g が任意に近くできるならば (任意の点 $\in T^*M$ が非遊走点だから, これは可能), 管状近傍を十分小さくすることによって, γ' と γ'' の差は C^0 -位相の意味ではいくらでも小さくできる。従って, g と g' は C^0 -位相でいくらでも近くできる。

ところが, $\gamma'' = \gamma'$ とするべき領域が増えることによって, C^k ($k \geq 1$)-位相では, γ' と γ'' は近くすることができない。

この様に, ある点のまわりの計量のみを変形して, 閉測地線を構成することによって C^k ($k \geq 1$)-closing lemma を示すことは非常に難しい。例えば, 不動点定理のようなものによって, 非構成的な証明を工夫する必要があるように思う。

(1981. 10. 22)

REFERENCES

- [1] A. Weinstein, Sur la non-densité des géodésiques fermées, C.R. Acad. Sci. Paris 271(1970), 504.
- [2] D. Ebin, The manifold of Riemannian metrics, Proc. Sympos. Pure Math. 15, Amer. Math. Soc. 1970, 11-40.
- [3] R. Abraham, Bumpy metrics, Proc. Sympos. Pure Math. 14, Amer. Math. Soc. 1970, 1-3.
- [4] W. Klingenberg, Lectures on Closed Geodesics, Springer-Verlag, 1978.
- [5] R. Bott, On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory, Comm. Pure Appl. Math. 9(1956), 171-206.
- [6] R.C. Robinson, Generic properties of conservative systems, Amer. J. Math. 92(1970), 562-603.
- [7] J. Eells and L. Lemaire, Deformations of metrics and associated harmonic maps, "Geometry and Analysis"(Papers dedicated to the Memory of V.K. Patodi).
- [8] N. Koiso, Variation of harmonic mapping caused by a deformation of Riemannian metric, Hokkaido Math. J. 8(1979), 199-213.
- [9] C.C. Pugh, The closing lemma, Amer. J. Math. 89(1967), 956-1009.
- [10] _____, An improved closing lemma and a general density theorem, Amer. J. Math. 89(1979), 1010-1021.
- [11] H. Gluck and D. Singer, Scattering of geodesic fields, I, Ann. of Math. 108(1978), 347-372.