

# 或種の連立微分方程式の標準型

神戸大 理 吉田 正章

## § 0 序

線型二階常微分方程式

$$(1) \quad \ddot{\eta} = p \cdot \dot{\eta} + q \eta$$

を考える。変数変換

$$(2) \quad \eta = a \cdot \xi, \quad \dot{a}/a = p/2,$$

を行えば,

$$(3) \quad \ddot{\xi} = \tilde{q} \cdot \xi, \quad \tilde{q} = q + p^2/4 - \dot{p}/2$$

となり、更に、(1)の線型独立な二の解  $y_1, y_2$  の比  $u = y_1/y_2$  のシュワルツ微分を計算すると,

$$(4) \quad \{u; x\} = \frac{\ddot{u}}{\dot{u}} - \frac{3}{2} \frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^2} = -2 \tilde{q}$$

となる。我々は(3)の型の方程式を(1)の標準型という。

また、(3)の線型独立な二つの解  $\xi_1, \xi_2$  の函数行列式

$$\det \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \dot{\xi}_1 & \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} \text{ は定数である.}$$

我々は以下で、完全積分可能な線型微分方程式

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{\alpha=1}^n g_{ij}^{\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x_{\alpha}} + g_{ij}^0 \eta \quad 1 \leq i, j \leq n$$

の標準型が何であるかを考える。

## § 1 多変数のシュワルツ作用素

この§では、多変数の場合のシュワルツ微分を復習する。

私は東大の織田孝幸氏に教えてもらったので、織田氏の記号に従う。

$$u_i(x_1, \dots, x_n) \quad 1 \leq i \leq n, \quad \det \partial u / \partial x \neq 0$$

が与えられたとき、射影変換

$$(6) \quad \tilde{u}_i = \frac{\sum a_i^j u_j + a_i^0}{\sum a_0^j u_j + a_0^0} \quad (a_i^j) \in GL(n+1)$$

で不変な、 $u_i$  と  $u_i$  の微分を含んだ式を作る。

$$(7) \quad \begin{cases} \xi_0 = \{ \det \partial u / \partial x \}^{-\frac{1}{n+1}} \\ \xi_i = \xi_0 \cdot u_i \\ \vdots \\ \xi_n = \xi_0 \cdot u_n \end{cases}$$

とおくと、 $u_i$  の射影変換に対応して、 $\xi_i$  は線型変換を受ける。次に、 $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  を線型独立解とする線型偏微分方程式を作る。

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\partial_{ij} = \partial_{ji} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{として,}$$

$$(8) \begin{vmatrix} \partial_{ij} \xi & \partial_{ij} \xi_0 & \cdots & \partial_{ij} \xi_n \\ \xi & \xi_0 & & \xi_n \\ \partial_i \xi & \partial_i \xi_0 & & \partial_i \xi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_n \xi & \partial_n \xi_0 & & \partial_n \xi_n \end{vmatrix} = 0$$

展開して、計算すると、(8) は、

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{\alpha} P_{ij}^{\alpha}(u) \frac{\partial \xi}{\partial x_{\alpha}} + P_{ij}^0(u) \xi$$

但し、

$$(10) \quad P_{ij}^{\alpha}(u) = \sum_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial u_k} - \frac{1}{n+1} \left( \delta_j^{\alpha} \sum_{k,q} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_q} + \delta_i^{\alpha} \sum_{k,q} \frac{\partial^2 u_q}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial x_k}{\partial u_q} \right) \quad \delta: \text{クロネッカー記号}$$

$$(11) \quad P_{ij}^0(u) = \left\{ \det \frac{\partial u}{\partial x} \right\}^{\frac{1}{n+1}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left\{ \det \frac{\partial u}{\partial x} \right\}^{-\frac{1}{n+1}} - \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left\{ \det \frac{\partial u}{\partial x} \right\}^{-\frac{1}{n+1}} \cdot P_{ij}^{\alpha}(u) \right]$$

我々は、 $P_{ij}^{\alpha}(u)$ ,  $P_{ij}^0(u)$  をシュワルツ作用素という。

シュワルツ作用素は、 $n=1$ の時と、 $n \geq 2$ の時とで、大いに異なることに注意しよう。即ち、 $n=1$ の場合は、 $P_{ij}^{\alpha}(u) = P_{ij}^1(u) = 0$ ,  $P_{ij}^0(u) = \dot{u}^{\frac{1}{2}} (\dot{u}^{-\frac{1}{2}})''$  故、 $P_{ij}^0(u)$  が、シュワルツ微分である。 $n \geq 2$ の場合は、(9) が完全積分可能ということを使えば、 $P_{ij}^0(u)$  は、 $P_{ij}^{\alpha}(u)$  で表されてしまう。

$$(12) \quad P_{ij}^0(u) = \frac{\partial P_{ij}^r}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ij}^r}{\partial x_r} + \sum_r P_{rj}^l P_{il}^r - \sum_l P_{ij}^l P_{rl}^r$$

## § 2 標準型

完全積分可能な線型微分方程式系

$$(13) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_a q_{ij}^a \frac{\partial \eta}{\partial x_a} + q_{ij}^0 \eta$$

が与えられたとする。

$\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$  を (13) の線型独立な解として,

$$(14) \quad u_i = \frac{\eta_i}{\eta_0} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{とおく。}$$

$$(15) \quad p_{ij}^a = P_{ij}^a(u) \quad \text{とおく。}$$

$P_{ij}^a$  は射影変換で不変な作用素故,  $p_{ij}^a$  は (13) から一意に定る。

定義 方程式 (13) に対して,

$$(14) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_a p_{ij}^a \frac{\partial \xi}{\partial x_a} + p_{ij}^0 \xi$$

を (13) の標準化という。また, 標準化しても変らぬもの  
即ち  $p_{ij}^a = q_{ij}^a$  なる方程式 (13) を標準型という。

定理

$$(15) \quad p_{ij}^a = q_{ij}^a - \frac{\delta_j^a}{n+1} \sum_l q_{il}^l - \frac{\delta_i^a}{n+1} \sum_l q_{jl}^l$$

$$(16) \quad p_{ij}^0 = q_{ij}^0 - \frac{1}{n+1} \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_l q_{il}^l + \frac{1}{n+1} \sum_{a,l} q_{al}^l q_{ij}^a - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \sum_l q_{il}^l \sum_l q_{jl}^l$$

(証明)  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \eta_0^{-1} - \eta_k \eta_0^{-2} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_i}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial x_i \partial x_j} \eta_0^{-1} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_j} \eta_0^{-2} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_i} \eta_0^{-2} + 2 \eta_k \eta_0^{-3} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_i} - \eta_k \eta_0^{-2} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x_i \partial x_j} \\ &= \eta_0^{-1} \left( \sum_{\alpha} g_{ij}^{\alpha} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_{\alpha}} + g_{ij}^0 \eta_k \right) - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_j} \eta_0^{-2} - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_i} \eta_0^{-2} \\ &\quad - \eta_k \eta_0^{-2} \left( \sum_{\alpha} g_{ij}^{\alpha} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_{\alpha}} + g_{ij}^0 \eta_0 \right) + 2 \eta_k \eta_0^{-3} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_i} \end{aligned}$$

この式を, (10) に代入して,

$$\begin{aligned} P_{ij}^{\alpha}(u) &= \sum_k \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial u_k} \left\{ \eta_0^{-1} \left( \sum_{\beta} g_{ij}^{\beta} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_{\beta}} + g_{ij}^0 \eta_k \right) - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_j} \eta_0^{-2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_j} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_i} \eta_0^{-2} + 2 \eta_k \eta_0^{-3} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_j} - \eta_k \eta_0^{-2} \left( \sum_{\beta} g_{ij}^{\beta} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_{\beta}} + g_{ij}^0 \eta_0 \right) \right\} \\ &\quad - \frac{\delta_j^{\alpha}}{n+1} \sum_{k,l} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial u_k} \left\{ \eta_0^{-1} \left( \sum_{\beta} g_{il}^{\beta} \frac{\partial \eta_k}{\partial x_{\beta}} + g_{il}^0 \eta_k \right) - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_l} \eta_0^{-2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \eta_k}{\partial x_l} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_i} \eta_0^{-2} + 2 \eta_k \eta_0^{-3} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_l} - \eta_k \eta_0^{-2} \left( \sum_{\beta} g_{il}^{\beta} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_{\beta}} + g_{il}^0 \eta_0 \right) \right\} \\ &\quad - \frac{\delta_i^{\alpha}}{n+1} \sum_{k,l} \left\{ \dots (i,j) \text{ reversed} \right\} \end{aligned}$$

次に,  $\delta_{\beta}^{\alpha} = \sum_k \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial u_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_{\beta}}$   
 $= \sum_k \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial u_k} \left( \frac{\partial \eta_k}{\partial x_{\beta}} \eta_0^{-1} - \eta_k \eta_0^{-2} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_{\beta}} \right)$

なる関係を作ると, うまく計算できて, (15) を得る.

後半は.

$$\begin{aligned} (17) \quad \{ \det \partial u / \partial x \}^{\frac{1}{n+1}} \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \det \partial u / \partial x \}^{-\frac{1}{n+1}} \\ = - \frac{1}{n+1} \sum_{k,l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_l} \end{aligned}$$

を (11) に代入して, (15) を使えば計算できる.

系 方程式 (13) が標準型 なる為の必要十分条件は,

$$\sum_l g_{il}^l = 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{である.}$$

系 方程式 (13) が標準型 ならば, (13) の線型独立な

解  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$  の函数行列式は定数である.

(証明)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{vmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_n \\ \partial_1 \xi_0 & \dots & \partial_1 \xi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_n \xi_0 & \dots & \partial_n \xi_n \end{vmatrix} &= \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} \xi_0 & \dots & \xi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{ij} \xi_0 & \dots & \partial_{ij} \xi_n \end{vmatrix} c_j \\ &= \sum_{j=1}^n \begin{vmatrix} \xi_0 & \dots & \xi_n \\ \sum_l g_{il}^j \partial_l \xi_0 & \dots & \sum_l g_{il}^j \partial_l \xi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_l g_{nl}^j \partial_l \xi_0 & \dots & \sum_l g_{nl}^j \partial_l \xi_n \end{vmatrix} c_j \\ &= \sum_j \begin{vmatrix} \xi_0 & \dots & \xi_n \\ g_{1j}^j \partial_j \xi_0 & \dots & g_{1j}^j \partial_j \xi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{nj}^j \partial_j \xi_0 & \dots & g_{nj}^j \partial_j \xi_n \end{vmatrix} c_j \\ &= \sum_j g_{ij}^j \times \begin{vmatrix} \xi_0 & \dots & \xi_n \\ \partial_1 \xi_0 & \dots & \partial_1 \xi_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_n \xi_0 & \dots & \partial_n \xi_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

系 方程式 (13) を 標準型 (14) にする為には, 変数変換

$$(18) \quad \eta = a \xi \quad , \quad \text{ここで } a \text{ は}$$

$$(19) \quad d \log a = \frac{1}{n+1} \sum_i \left( \sum_l g_{il}^l \right) dx_i \quad \text{を満たす,}$$

をすればよい。

(証明)  $\eta = a \xi$  とおいて, (13) に代入すると,

$$a \partial_{ij} \xi = \sum_{\alpha} g_{ij}^{\alpha} a \cdot \partial_{\alpha} \xi - \partial_i a \partial_j \xi - \partial_j a \partial_i \xi - \partial_{ij} a \cdot \xi \\ + \sum_{\alpha} g_{ij}^{\alpha} \partial_{\alpha} a \cdot \xi + g_{ij}^0 a \xi$$

故に,

$$(20) \begin{cases} p_{ij}^{\alpha} = g_{ij}^{\alpha} & \alpha \neq i, j \\ p_{ij}^i = g_{ij}^i - \partial_i a / a & i \neq j \\ p_{ii}^i = g_{ii}^i - 2 \partial_i a / a \end{cases}$$

ここで, 6 ページの上の系を使って, (14) が標準型になる為には,  $\sum p_{ii}^i = 0$  故,

$$\sum_{l \neq i} (g_{il}^l - \partial_i a / a) + g_{ii}^i - 2 \partial_i a / a = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_l g_{il}^l - (n+1) \partial_i a / a = 0, \quad (\text{終})$$

(19) を無理に解けば,

$$(21) \quad a(x) = \exp \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_i \int_0^1 \sum_l g_{il}^l(tx) dt \cdot x_i \right\}$$

となる.

以上 § 0 ~ § 2 は全く型式的な計算故,  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ , 更には標数 0 の体上ならば通用する. 色々な応用が考えられるが, ここではすべて省略する.

— 終 —