

概均質ベクトル空間に付随する多変数ゼータ函数

立教大学理学部 佐藤 文広

このノートでは、有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義された概均質ベクトル空間 (a prehomogeneous vector space, 以下 p.v. と略す) について、そのゼータ函数 (一般には多変数の Dirichlet 級数となる) を定義し、その解析接続・函数等式についてこれまでに行われている結果を整理して述べる。(詳細は [8], [9], 及びその引用文献参照)

§ 1. ゼータ函数の定義

$(G, \rho, V) \in \text{p.v.}$, $S \in \rho$ の特異集合とする。すなわち、 G は連結線型代数群 ($/\mathbb{C}$)、 V は有限次元ベクトル空間 ($/\mathbb{C}$)、 ρ は G が V 上の有理表現、 S は V の代数的真部分集合で G が $V-S$ に推移的に作用するようになるものとする。

p.v. の数論的研究では、 (G, ρ, V) はある代数的数体 k 上定義されていると仮定する必要がある。ここでは、有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義されている、すなわち、 G, V は

$$\rho: G \longrightarrow GL(V)$$

は $\mathbb{Q}$ 上定義された代数群の準同型と ρ による $\rho(G)$ 上の構造を備えているとす。このとき、特異集合 S は、 $\mathbb{Q}$ 上定義された代数的集合とす。 S の $\mathbb{Q}$ 上の既約分解を

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n \cup S_{n+1} \cup \dots$$

とす。ここで、 $S_1, \dots, S_n$ は V において余次元 1, すなわち $\mathbb{Q}$ -既約代数曲面であり、 $S_{n+1}, \dots$ は余次元 2 以上の既約成分とす。 $i=1, \dots, n$ について、 S_i の定義多項式として $\mathbb{Q}$ 上既約な $\mathbb{Q}$ -係数多項式 P_i をとって、 $P_i \in \mathbb{Q}[x]$ とかく。

補題 1. (1) $P_1, \dots, P_m$ は、 (G, ρ, V) の相対不変式とす。すなわち、 G の有理指標 $\chi_1, \dots, \chi_m$ で

$$P_i(\rho(g)x) = \chi_i(g) P_i(x) \quad (1 \leq i \leq m, \forall g \in G, \forall x \in V)$$

となるものが存在する。 $\chi_1, \dots, \chi_m$ は、 G の $\mathbb{Q}$ 上定義された指標である。

(2) (G, ρ, V) の相対不変式は $\mathbb{Q}$ -係数で表す。

$$C \cdot \prod_{i=1}^m P_i(x)^{m_i} \quad (C \in \mathbb{Q}, m_i \in \mathbb{Z})$$

の形で表すことができる。

$G_{\mathbb{R}}$ を G の real points となる実 Lie 群、 $G_{\mathbb{R}}^+$ を $G_{\mathbb{R}}$ の指数有限の部分群、 $G_{\mathbb{R}}^+$ の離散部分群 Γ と

$$\Gamma = \{ g \in G_{\mathbb{R}}^+ \cap G_{\mathbb{Z}} ; \chi_1(g) = \dots = \chi_n(g) = 1 \}$$

で定義する。

$x \in V_{\mathbb{Q}}$ について

$$G_x = \{ g \in G ; \rho(g)x = x \},$$

$$G_x^{\circ} = G_x \cap (\text{代数群として } \alpha) \text{ 連結成分},$$

$$G_x^+ = G_x \cap G_{\mathbb{R}}^+, \quad \Gamma_x = G_x \cap \Gamma$$

とおく。次に、

$$V_{\mathbb{Q}}^{\circ} = \left\{ x \in V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}} ; G_x^{\circ} \text{ は non-trivial な } \mathbb{Q}\text{-} \right. \\ \left. \text{有理指標をもちあ} \right\}$$

と定めると、 $V_{\mathbb{Q}}^{\circ}$ は明らかに $\rho(G_{\mathbb{R}})$ -stable な $V_{\mathbb{Q}}$ の部分集合である。

補題 2. (1) $x \in V_{\mathbb{Q}}^{\circ}$ ならば、 G_x^+ は unimodular Lie 群であり、

G_x^+ の Haar 測度に関する G_x^+/Γ_x の体積は有限である。

(2) $V_{\mathbb{Q}}^{\circ}$ が空でなければ、任意の G の $\mathbb{Q}$ -有理指標 χ について、 χ^m が相対不変式に対応するような自然数 m が存在する。

$G_{\mathbb{R}}^+$ の右不変測度 dg をとる。 $G_{\mathbb{R}}^+$ の指標

$$\Delta : G_{\mathbb{R}}^+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\times}$$

を $d(\rho g) = \Delta(\rho)dg$ により定義する。 Δ は G のある $\mathbb{Q}$ -

有理指標の $G_{\mathbb{R}}$ への制限となる。よって、補題 1 (2) と補題 2 (2) により

$$|\det p(g)|/\Delta(g) = |x_1(g)|^{\delta_1} \cdots |x_n(g)|^{\delta_n} \quad (g \in G_{\mathbb{R}}^+)$$

を満足する $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{Q}^n$ が存在する。いま、

$$\omega(x) = \prod_{i=1}^n |p_i(x)|^{-\delta_i} dx \quad (dx \text{ は Euclid 測度})$$

とかくと、 $\omega(x)$ は multiplier Δ の $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ 上の $G_{\mathbb{R}}^+$ -相対不変測度を定める。 $x \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ について、 $G_{\mathbb{R}}^+$ 上の Haar 測度 $d\mu_x$ を

$$dg = \omega(x) d\mu_x$$

とたきように正規化する。 $x \in V_{\mathbb{Q}}^{\circ}$ について

$$\mu(x) = \int_{G_{\mathbb{R}}^+/T_{\mathbb{R}}} d\mu_x$$

とかくと、補題 2 (1) により $\mu(x)$ は有限である。

$G_{\mathbb{R}}^+$ により $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の軌道分解を

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_\nu$$

と書く。 V は有限であることが知られている。又、 $V_{\mathbb{Q}} \cap p(\Gamma)$ - 不変な格子 L をとって

$$L^{\circ} = L \cap V_{\mathbb{Q}}^{\circ}, \quad L_i = L^{\circ} \cap V_i \quad (1 \leq i \leq \nu)$$

とかく。

次のように Dirichlet 関数と考える：

$$\zeta_i(L; s) = \sum_{x \in \Gamma \backslash L_i} \mu(x) / \prod_{i=1}^n |p_i(x)|^{s_i} \quad (s \in \mathbb{C}^n).$$

Dirichlet 級数 $\xi_1(L:s), \dots, \xi_\nu(L:s)$ を (σ として, $\operatorname{Re} s_1, \dots, \operatorname{Re} s_m$ が十分大きいとき絶対収束するならば) (G, p, V) ($\nu \leq L$) に付随する Zeta 函数という。

V_p 上の急減少函数 f に対し, 預令

$$Z(f, L:s) = \int_{G_{\mathbb{A}}^+ / T} \prod_{i=1}^m |x_i(g)|^{s_i} \sum_{x \in L^0} f(p(g)x) dg,$$

$$\varphi_i(f:s) = \int_{V_i} \prod_{i=1}^m |p_i(x)|^{s_i} f(x) dx \quad (1 \leq i \leq \nu)$$

を考へる。

補題 3 (1) $\varphi_i(f:s)$ ($1 \leq i \leq \nu$) は $\operatorname{Re} s_1, \dots, \operatorname{Re} s_m > 0$ で絶対収束し正則函数を表わす。さらに, S の函数として $\mathbb{C}^m$ 上の有理型函数に解析接続される。

(2) $\xi_1(L:s), \dots, \xi_\nu(L:s)$ が $\operatorname{Re} s_1, \dots, \operatorname{Re} s_m$ が十分大きいとき絶対収束していることを仮定する。このとき, 次の預令表示が得られる!

$$Z(f, L:s) = \sum_{i=1}^{\nu} \xi_i(L:s) \varphi_i(f:s-\delta)$$

§2. 函数等式と解析接続

G が Reductive 代数群, S が絶対既約超曲面 (従って $n=1$) の場合は, M. Sato & T. Shintani [3] で取扱われ, 函数等式と解析接続については満足すべき結果が得られている。そこで $n \geq 2$ の場合を主に考察しよう。このとき表現 ρ は既約ではない得たこと知られている。特に

$$(G, \rho, V) = (G, \rho_1 \oplus \rho_2, E \oplus F) \quad / \mathbb{Q}$$

と $\mathbb{Q}$ 上の表現 ρ_1, ρ_2 の直和に分解する場合を考へる。但し, $n=1$ の場合も含むために, $E = \{0\}, V = F, \rho_2 = \rho$ とする特殊な場合を除外しよう。

定義. $\mathbb{Q}$ -係数相対不変式 $p(x, y) \ (x, y) \in E \oplus F$ で,

$$\det \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y_i \partial y_j} \right) (x, y) \neq 0$$

となるものが存在するとき, F は $\mathbb{Q}$ 上正則な直和因子 と呼ぶ。

F^* で F の双対空間, ρ_2^* で ρ_2 の反値表現を表わし,

$$(G, \rho^*, V^*) = (G, \rho_1 \oplus \rho_2^*, E \oplus F^*)$$

と置く。 $(G, \rho^*, V^*) \in (G, \rho, V)$ の F に属する部分双対という。以下, この節では, F が $\mathbb{Q}$ 上正則であることをする。

次の補題は, $\mathbb{Q}$ 上正則な直和因子の性質を述べている。

補題 4. F は $\mathbb{Q}$ 上正則な直和因子とすると,

(1) (G, ρ^*, F^*) も p.v. で, F^* は $\mathbb{Q}$ 上正則な直和因子である。

(2) (G, p^*, V^*) の特異集合 S^* に含まれる余次元 1 の $\mathbb{Q}$ -既約成分の個数は n である。すなわち, (G, p, V) のそれと一致している。

(3) $Q_1, \dots, Q_m \in S^*$ の余次元 1 の $\mathbb{Q}$ -既約成分の定義多項式, $\chi_1^*, \dots, \chi_n^*$ はそれぞれ対応する G の $\mathbb{Q}$ -有理指標とする。このとき, G の指標群のうち $\chi_1^*, \dots, \chi_n^*$ によって生成される部分群は, $\chi_1, \dots, \chi_n$ によって生成される部分群に一致する。これは階数 n の自由 $\mathbb{Z}$ -モジュール群である。

(4) $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ の $G_{\mathbb{R}}^+$ -軌道の個数は L , すなわち $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の $G_{\mathbb{R}}^+$ -軌道の個数に等しい。

Local zeta の函数等式: $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ の軌道分解 ($G_{\mathbb{R}}^+$ による) を

$$V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^* = V_1^* \cup \dots \cup V_\nu^*$$

とする。 $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の急減少函数 f^* について

$$\mathfrak{Z}_i^*(f^*; s) = \int_{V_i^*} \prod_{i=1}^n |Q_i(x, y^*)|^{s_i} f^*(x, y^*) dx dy^*$$

(dx, dy^* はそれぞれ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n$ の Euclid 測度) とおく。又, f^* の $\mathbb{R}^n$ に関する部分 Fourier 変換 $\hat{f}^*$ を

$$\hat{f}^*(x, y) = \int_{F_{\mathbb{R}}^*} f^*(x, y^*) e^{2\pi i \langle y, y^* \rangle} dy^*, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times F_{\mathbb{R}}^*$$

とする。

補題4の(3)に於て,

$$\chi_i = \prod_{j=1}^n \chi_j^* u_{ij} \quad (1 \leq i \leq n)$$

を満たす $U = (u_{ij}) \in GL(n; \mathbb{Z})$ がとれる。又, 補題2の(2)によつて

$$|\det p_2(g)| = \prod_{i=1}^n |\chi_i(g)|^{\lambda_i} \quad (g \in G_{\mathbb{R}}^+)$$

とある $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{Q}^n$ が存在する。この U, λ は函数等式を記述する重要な量である。

次の定理は、 ∞ -素点における local zeta の函数等式とも呼ばべきものであり、zeta 函数の函数等式の根拠となる。

定理 A. F は、 $\mathbb{Q}$ 上正則な直和因子, S は余次元 2 の既約成分を有するならば、次の函数等式が成立つ。

$$\widehat{\Phi}_i(f^*; s) = Y(s) \sum_{j=1}^v a_{ij}(s) \Phi_j^*(f^*; (s+\lambda)U)$$

ここで、 $Y(s)$ は Γ -函数の適当な積で、又 $a_{ij}(s)$ は指数函数を用いて表され、いずれも $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の急減少函数 f^* のとり方によらぬ。

ゼータ函数の函数等式 $V_{\mathbb{Q}}$ 内の格子 L として、 $L = M \oplus N$, M, N はそれぞれ $E_{\mathbb{Q}}, F_{\mathbb{Q}}$ の Γ -不変な格子, の形をとっているものとす。 N^* は N の双対格子, すなわち,

$$N^* = \{ y^* \in F_{\mathbb{Q}}^* \mid \langle y, y^* \rangle \in \mathbb{Z}, \forall y \in N \}$$

とし、 $L^* = M \oplus N^*$ とおく。 L^* は $V_{\mathbb{Q}}^*$ の $\rho^*(\Gamma)$ -不変な格

子がある。 $\xi_i(L; s), \xi_i^*(L^*; s) (1 \leq i \leq r)$ は、それぞれ、 (G, p, V) と L , (G, p^*, V^*) と L^* に付随する zeta 函数とする。次の仮定をおく。

仮定(*). $V_{\mathbb{Q}}^0 = V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}}$. つまり、 $\xi_i(L; s), \xi_i^*(L^*; s) (1 \leq i \leq r)$ は、それぞれ、 $\{s \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Re} s_i > a_i (1 \leq i \leq n)\}$, $\{s \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Re} s_i > a_i^* (1 \leq i \leq n)\}$ で絶対収束する。

Γ が $\mathbb{Q}$ 上正則な直和因子であることから、 $V_{\mathbb{Q}}^{*0} = V_{\mathbb{Q}}^* - S_{\mathbb{Q}}^*$ が成り立つことに注意しておく。

$\mathbb{C}^n$ の領域 B, B^*, D, D^* は次のように定義する。

$$B = \{s \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Re} s_i > \max(a_i, \delta_i) (1 \leq i \leq n)\},$$

$$B^* = \{s \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Re} s_i > \max(a_i^*, \delta_i^*) (1 \leq i \leq n)\},$$

$$D = B \cup (B^*U + \lambda) \text{ の合併集合の convex hull,}$$

$$D^* = B^* \cup (B - \lambda)U \text{ の合併集合の convex hull.}$$

但し、 $\delta^* = (\delta_1^*, \dots, \delta_n^*) \in \mathbb{R}^n$ は、 (G, p^*, V^*) について δ と同様に定義される。 δ と δ^* の間には、 $\delta^* = (\delta - 2\lambda)U$ の関係がある。又、 $D^* = (D - \lambda)U$ である。

さて、定理 A と補題 3 (2) で与えられた種命表示に基づいて次の証明ができる。

定理 B. 定理 A の仮定に加えて、上記の仮定(*)が成立つとす。このとき、

$$(1) \xi_1(L; s), \dots, \xi_r(L; s) \text{ (resp. } \xi_1^*(L^*; s), \dots, \xi_r^*(L^*; s)) \text{ は}$$

D (resp. D^*) 上の有理型函数に解析接続される。

$$(2) \quad v(N^*) = \int_{F^*/N^*} dy^* \quad \text{とよくと, 函数等式}$$

$$v(N^*) \xi_i^*(L^*; (s-\lambda)V) = \gamma(s-\delta) \sum_{j=1}^V q_{ij}(s-\delta) \xi_j(L; s)$$

が成立つ。

系. G が Reductive で, V が $\mathbb{Q}$ 上正則であり, 仮定(*)が満たされているとする。このとき, ゼータ函数 $\xi_i(L; s)$, $\dots$, $\xi_r(L; s)$ は $\mathbb{C}^m$ 全体に有理型函数として延長できる。

(証明) G が Reductive で, V が $\mathbb{Q}$ 上正則ならば, 定理 A の仮定は自動的に満足される。又, このとき $V = -1_m$ とおくとおこができるから $D = \mathbb{C}^m$ となる。よって, 主張は定理 B の (1) から直ちに得られる。 ■

定理 B によれば, $\xi_i(L; s)$ は, $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{Q}$ 上正則な直和因子の数だけ) の函数等式を満足する。すなわち, 多変数ゼータ函数は各数 α の函数等式を持つもののである。具体例については, 整數論城崎シンポジウム (1979) 報告集にいくつかまとめておいたので参照して下さい。

§3. 函数等式の証明 (スケッチ)

この節では、定理 A から定理 B が導かれる直筋を簡単に述べる。

f, f^* をそれぞれ V_R, V_R^* 上の急減少函数とすると、補題 3 の (2) によって、次の積分表示が得られる：

$$Z(f, L; s) = \sum_{i=1}^n \xi_i(L; s) \mathcal{Q}_i(f; s - \delta) \quad (s \in B),$$

$$Z^*(f^*, L^*; s) = \sum_{i=1}^n \xi_i^*(L^*; s) \mathcal{Q}_i^*(f^*; s - \delta^*) \quad (s \in B^*).$$

ここで、 Z, Z^* は次のような積分である：

$$Z(f, L; s) = \int_{G_R^T / \Gamma} \prod_{i=1}^n |\chi_i(g)|^{s_i} \sum_{x \in L \setminus S} f(p(g)x) dg,$$

$$Z^*(f^*, L^*; s) = \int_{G_R^T / \Gamma} \prod_{i=1}^n |\chi_i^*(g)|^{s_i} \sum_{x^* \in L^* \setminus S^*} f^*(p^*(g)x^*) dg.$$

函数等式の証明にとって、中心的作用を果すのは次の補題である。

補題 5. $f^* \in V_R^*$ 上の急減少函数で、 $f^*, \hat{f}^*$ はそれぞれ特異集合 S, S^* 上で 0 となるようなものとする。こ

のとき、 $Z(f, L; s), Z^*(f^*, L^*; s)$ はそれぞれ D, D^* 上の正則函数に延長され

$$\psi(N^*) Z^*(f^*, L^*; (s - \lambda)U) = Z(\hat{f}^*, L; s)$$

が成立つ。

(証明) 点 $b \in \mathbb{Z}^n \cap B$ と $b^* \in \mathbb{Z}^n \cap (B^*U^{-1} + \lambda)$ とし,

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) = b - b^*,$$

$$\chi^\beta = \chi_1^{\beta_1} \cdots \chi_n^{\beta_n}$$

と置く。領域 $D_\pm, D_\pm^*$ を

$$D_\pm = \{s \in \mathbb{C}^n; s \pm t\beta \in B \text{ for } \exists t \geq 0\}$$

$$D_\pm^* = \{s \in \mathbb{C}^n; s \mp t\beta U \in B^* \text{ for } \exists t \geq 0\}$$

と定める。さらに

$$\left. \begin{aligned} Z_+(f, L; s) \\ Z_-(f, L; s) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \int_{|\chi^\beta(q)| \geq 1} \\ \int_{|\chi^\beta(q)| \leq 1} \end{aligned} \right\} \prod_{i=1}^n |\chi_i(q)|^{s_i} \sum_{x \in L \setminus S'} f(p(q)x) dq$$

$$\left. \begin{aligned} Z_+^*(f^*, L^*; s) \\ Z_-^*(f^*, L^*; s) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} \int_{|\chi^\beta(q)| \leq 1} \\ \int_{|\chi^\beta(q)| \geq 1} \end{aligned} \right\} \prod_{i=1}^n |\chi_i^*(q)|^{s_i} \sum_{x^* \in L^* \setminus S'^*} f^*(p^*(q)x^*) dq$$

とみると, $Z_\pm(f, L; s)$ (resp. $Z_\pm^*(f^*, L^*; s)$) は $D_\pm$ (resp. $D_\pm^*$) で絶対収束し

$$Z(f, L; s) = Z_+(f, L; s) + Z_-(f, L; s) \quad (s \in D)$$

$$Z^*(f^*, L^*; s) = Z_+^*(f^*, L^*; s) + Z_-^*(f^*, L^*; s) \quad (s \in D^*)$$

が成立つ。ここで、部分 Fourier 変換に Poisson 和公式を適用すると, f^* に関する仮定によって,

$$\prod_{i=1}^n |\chi_i(q)|^{\lambda_i} \sum_{x \in L \setminus S'} \hat{f}^*(p(q)x) = v(N^*) \sum_{x^* \in L^* \setminus S'^*} f^*(p^*(q)x^*)$$

を得る。これから、少くとも形式的には

$$Z_{\pm}^*(f^*, L^*; (S-\lambda)U) = v(N^*)^{-1} \widehat{Z}_{\mp}(\hat{f}^*, L; S)$$

となる。この式が両辺の絶対収束域を調べてみよう。

右辺は $D_{\mp}$ 上で絶対収束している。一方左辺は $D_{\pm}^* U^{-1} + \lambda$ で絶対収束する。 β を選んでおき、この2つの領域の共通部分は、空でない凸集合である。よって、上の式は

$$D_{\mp} \cup (D_{\pm}^* U^{-1} + \lambda)$$

で成立ち、函数等式

$$Z^*(f^*, L^*; (S-\lambda)U) = v(N^*)^{-1} \widehat{Z}(\hat{f}^*, L; S)$$

は、 $B \cup (B^* U^{-1} + \lambda) \left(\subset \{D_+ \cup (D_-^* U^{-1} + \lambda)\} \cap \{D_- \cup (D_+^* U^{-1} + \lambda)\} \right)$ で成立ち、両辺はこの領域での正則函数を表わしている。従って Bochner の定理によって、 $\mathbb{C}$ の convex hull である D まで正則函数として解析接続される。 $\square$

さて、補題5の条件を満たす函数 f^* は、十分多く構成できる ([3] の Final Remarks 参照, 又は [8])。例えは、 f^* が $G_{\mathbb{R}}^+$ -軌道 V_i^* に含まれ、 $\Phi_i^*(f^*; S) \neq 0$ となるものかとれる。このとき、補題5の函数等式は、

$$\begin{aligned} \xi_i^*(L^*; (S-\lambda)U) \Phi_i^*(f^*; (S-\lambda)U - \delta^*) \\ = v(N^*)^{-1} \sum_{j=1}^v \xi_j(L; S) \widehat{\Phi}_j(\hat{f}^*; S - \delta) \quad (S \in D) \end{aligned}$$

を意味している。— 又、定理 A により

$$\begin{aligned}\Phi_j(\hat{f}^*; s-\delta) &= \gamma(s-\delta) \sum_{\ell=1}^{\nu} a_{j\ell}(s-\delta) \Phi_{\ell}^*(f^*; (s-\delta+\lambda)U) \\ &= \gamma(s-\delta) a_{ji}(s-\delta) \Phi_i^*(f^*; (s-\lambda)U-\delta^*)\end{aligned}$$

である。ここで、 $\text{supp } f^* \subset V_i^*$, 及び $\delta^* = (\delta-2\lambda)U$ であることを用いた。この2つの式より直ちに,

$$\begin{aligned}\xi_i^*(L^*; (s-\lambda)U) \\ = (UCN^*)^{-1} \gamma(s-\delta) \sum_{j=1}^{\nu} a_{ji}(s-\delta) \xi_j^*(L^*; s) \quad (s \in D)\end{aligned}$$

を得る。これは、定理 B の函数等式に他ならない。

又、 $\text{supp } f^* \subset V_i^*$, $\Phi_i^*(f^*; s) \neq 0$, $Z^*(f^*; L^*; s)$ が D^* 上の正則函数に延長できること、この3つの事実から、 $\xi_i^*(L^*; s)$ が D^* 上の有理型函数に解析接続されることかわかる。

$\text{supp } \hat{f}^* \subset V_i$, $\Phi_i(\hat{f}^*; s) \neq 0$ となるような f^* で補題 5 の条件を満たすものも構成できる。この f^* を用いれば、

$\xi_i(L^*; s)$ が D 上の有理型函数に解析接続されることもわかる。

§4. ゼータ函数の収束

具体的に p.v. が与えられて、 ζ のゼータ函数を構成しよう
とするときには、 $\zeta_i(L; s)$ の収束をまず確かめねばならぬ。
これについて、一般に次の予想である。

予想: $\zeta_1(L; s), \dots, \zeta_r(L; s)$ は $\operatorname{Re} s_1 > \delta_1, \dots, \operatorname{Re} s_r > \delta_r$ で絶対収束する。 $\delta_1, \dots, \delta_r$ は絶対収束臨座標を与える。

多くの場合、個別的にこのことは確かめられているもののほか、
ある程度一般の結果として次のようなことがわかる。

$$H = \{g \in G; \chi_1(g) = \dots = \chi_n(g) = 1\},$$

ζ の連結成分を H^0 とおく。 $t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ について、

$$V(t) = \{x \in V - \mathcal{P}; p_1(x) = t_1, \dots, p_n(x) = t_n\}$$

とみると、 H は $V(t)$ に推移的に作用する。

定理 C (1) H^0 が $V(t)$ に simply transitively に作用している
とすれば、 $\zeta_1(L; s), \dots, \zeta_r(L; s)$ は $\operatorname{Re} s_1, \dots, \operatorname{Re} s_r$ が十分大ま
いと絶対収束する。

(2) さらに、 $\mathbb{Q}$ -既約な相対不変式 $p_1, \dots, p_n$ が、 $\mathbb{C}$ 上でも
既約であれば、 $\zeta_1(L; s), \dots, \zeta_r(L; s)$ は $\operatorname{Re} s_1 > \delta_1, \dots, \operatorname{Re} s_r > \delta_r$
で絶対収束する。

この定理は、T. Suzuki [6] で用いられている方法を精密化
することによって証明できる。実は、定理 C はもっと一般化できる
が条件の記述が複雑になるので省略する (cf. [9])。しかし

上の定理のレベルで^も色々興味ある実例が構成できる。次にその一例をあげよう。その前に定理Bの系と定理Cを組み合わせて次の定理が得られることに注意しておく。

定理D. G がReductive, V が $\mathbb{Q}$ 上正則, $V(t)$ は H^0 がsimply transitivelyに作用するならば、ゼータ函数 $\zeta_V(L:s), \dots, \zeta_r(L:s)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の有理型函数に延長される。

例. $G = n \times n$ 下三角行列の群

$$V = \{ X \in M_n ; {}^t X = X \}$$

$$p(g)X = gXg^t$$

に $\rho \mapsto p.v.$ を得られる。 $X \in V$ の $i \times i$ の首席 minor行列式を $p_i(X)$ と記すと、特異集合 S は

$$S = \bigcup_{i=1}^n \{ X \in V ; p_i(X) = 0 \}$$

と与えられる。そこで、

$$H^0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G \right\}.$$

$$T_\infty = H^0 \cap M_n(\mathbb{Z}) \quad \text{と置く。}$$

$L (\in V_\mathbb{Q})$ は T_∞ -invariant lattice とし、 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{Z}^n$

に $\rho \mapsto$

$$L_\varepsilon = \{ X \in L ; \operatorname{sym} p_i(X) = \varepsilon_i \}$$

と置く。 (G, p, V) と L に付随するゼータ函数は

$$\zeta_\varepsilon(L:s) = \sum_{X \in T_\infty \backslash L_\varepsilon} \frac{1}{\prod_{i=1}^n |p_i(X)|^{-s_i}} \quad (s \in \mathbb{C}^n)$$

で定まる。この空間は定理 C の (2) の条件を満足し $\delta = (1, \dots, 1)$ である。すなわち、 $\xi_\epsilon(L; s)$ は $\operatorname{Re} s_1, \dots, \operatorname{Re} s_n > 1$ で絶対収束する。さらに L が、 $SL(n; \mathbb{Z})$ で stable な格子の場合には、 $\xi_\epsilon(L; s)$ は、定理 D の条件を満足する空間のゼータ函数と (Riemann ゼータ函数の積を除いて) 一致することから示され、従って、 $\mathbb{C}^n$ 上の有理型函数に解析接続することからできる。このことと ξ_ϵ の函数等式については、[10] を参照されたい。

§5. 今後の課題

最後に、今後検討されるべき課題をいくつかあげておきたい。

(1) ゼータ函数の収束判定条件： §4 で述べた予想が成立すれば大変具合が良い。ただし、函数等式の証明に限れば、収束の限界が $\delta_1, \dots, \delta_n$ で与えられることは必要ではなく、 $\operatorname{Re} s_1, \dots, \operatorname{Re} s_n$ が十分大きいところでは収束することから示されれば十分である。また、定理 C が、一例であるが、部分的な結果である。でも実用的な収束判定条件を見出すことも重要である。A. Weil と J-I. Igusa に与えられた判定条件 ([7], [1]) は少し厳しすぎる条件であるが、M. Sato & T. Shintani [3] で有効に利用されている。

(2) Reductive で tor 群に対するゼータ函数の解析接続:

定理 B の系によれば, 群 G が reductive で V が $\mathbb{Q}$ -正則 (さらにゼータ函数の収束を仮定する) ならば, $\zeta_1(L; s)$, $\dots$, $\zeta_r(L; s)$ は $\mathbb{C}^n$ 全体に有理型に延長される。 V が $\mathbb{Q}$ -正則であっても, G が reductive でなければ, 定理 B を用いてゼータ函数を $\mathbb{C}^n$ 全体に延長することはできない。この場合、どのように解析接続可能^であるか、例えば定理 B で与えられた領域 D が限界であるかどうか等々、多くの問題がある。

(3) $V_{\mathbb{Q}}^{\circ} \subsetneq V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}}$ の場合のゼータ函数。

定理 B の証明に際し、我々は $V_{\mathbb{Q}}^{\circ} = V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}}$ を仮定した。 $V_{\mathbb{Q}}^{\circ}$ が $V_{\mathbb{Q}} - S_{\mathbb{Q}}$ の真部分集合となることは、ゼータ函数の研究は著しく困難となる。典型的な例は C. L. Siegel [5] にある二次形式で $\mathbb{Q}$ 上で non-trivial 零点を持つ場合のゼータ函数である。二次形式が $xx - y^2$ で与えられる場合には、Siegel の結果の改良が T. Shintani [4] にある。この論文の結果は多変数ゼータ函数の応用という観点から見ても興味深い。

(4) ゼータ函数の留数、特殊値の計算法。

p.v. のゼータ函数の数論的応用を考える場合には、種における留数や、特殊値の計算についての理論を^{てい}発展させる^{べき}ことが望まれる。

(5) 可約な p.v. の 分類: 既約な p.v. の 分類は, M. Sato & T. Kimura [2] でなされた。多変数ゼータ函数の具体例を豊富に構成していくためには, 可約な p.v. の 分類の試みが必要と進められる必要がある。又, その際, 全空間の正則性ばかりでなく, どんな直和因子が正則かも調べられる必要がある。分類の第一歩としては, 本講義録の木村達雄氏による報告を参照したい。

(6) "正則な p.v. の 特異集合は超曲面である" という予想が解決されるならば, これまでの記述にある "特異集合は超曲面であるとする" という仮定は完全に省くことができるので, 理論的には好ましい。

<参考文献>

- [1] J-I. Igusa, On certain representations of semi-simple algebraic groups and the arithmetic of the corresponding invariants (1), Inv.Math., 12(1971), 62-94.
- [2] M. Sato and T. Kimura, A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their invariants, Nagoya Math. J. 65(1977), 1-155.
- [3] M.Sato and T. Shintani, On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math., 100 (1974), 131-170.

- [4] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 22(1975), 25-65.
- [5] C.L. Siegel, Uber die Zetafunktionen indefiniter quadratischen Formen, Math. Zeit., 43(1938), 682-708.
- [6] T. Suzuki, On zeta functions associated with quadratic forms of variable coefficients, Nagoya Math. J., 73(1979), 117-147.
- [7] A. Weil, Sur les formules de Siegel dans la theorie des groupes classiques, Acta Math., 113(1965), 1-87.
- [8] F. Sato., Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces I: Functional Equations (preprint).
- [9] _____, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces II: A Convergence Criterion (preprint).
- [10] _____, Zeta functions in several variables associated with prehomogeneous vector spaces III: Eisenstein series for indefinite quadratic forms (preprint).
- [11] _____, 概均値ベクトル空間の多変数 Zeta 函数, 整数論城崎シンポジウム報告集 (1979).