

標数 2 階数 2 の Lie 型の群を

成分とする群について

東大 教養 五味健作

筑波大 数系 宮本 泉

東大理大学院 山田裕理

M. Aschbacher の画期的な研究 [1] 以来、成分型の群の研究は目ざましい勢いで進展を続け、今や終りに近づきつつある。この小文ではその現状を概観し、それに関連して我々三人の研究について報告する。用語、問題の背景などについては「成分型の群について」、1975 年代数学シンポジウム（群論および代数幾何学）記録、19-31、を参照していただきたい。

成分型の群に関する目標は次の予想を証明することである。

(※) 有限群 G の involution t の中心化群 $C(t)$ の 2 成分 L で $L/Z^*(L)$ が既知の単純群に同型なものがあれば、 L の正規包 $\langle L^G \rangle$ の組成因子はすべて既知の単純群である。

これが証明されれば単純群分類の「半分」が終ることになり、有限単純群論に一大エポックを画することになる。

ここで既知の単純群を次の 4 系列に分ける。

A : 交代群

$\mathcal{L}$: 標数 2 の Lie 型の群

$\mathcal{L}'$: 奇標数の Lie 型の群

$\mathcal{S}$: 散在群 (sporadic groups)

(※) に関してこれまで次のことが知られている。

Unbalanced group theorem 有限群 G のある involution t に対して

$O(C_G(t)) \not\subseteq O(G)$ ならば、 G の 2 成分 L で $L/Z^*(L) \in \mathcal{L}' \cup A \cup$

$\{L_3(4), \text{He}\}$ なるものがある。

この大定理は最近 Aschbacher, Thompson, R. Solomon をはじめとする多くの人々の努力により証明された模様である。これにより Thompson の B-conjecture が肯定的に解決される。

B-conjecture (theorem) 有限群 G とその任意の 2 - 部分群 T に対して

$B(C(T)) \leq B(G)$ 。

B-conjecture のもとで次の基本定理が成立する。

Theorem (Aschbacher, Foote) (※) を証明するには L が標準部分群の場合を考えればよい。

L が標準部分群ならば $K = C(L)$ は tightly embedded subgroup になる。次の Aschbacher の定理は、より一般的な場合を扱っている。

Theorem (Aschbacher) 有限群 G が tightly embedded subgroup を持ち、 K の Sylow 2 群は一般四元数群、 $F^*(G)$ が単純なら、 $F^*(G) \in \mathcal{L}'$ 。

次に

Theorem (Aschbacher, Seitz) 有限群 G が標準部分群 L を持ち、 $L/Z(L)$ は既知の群、かつ $C(L)$ の 2-rank が 2 以上ならば $\langle L^G \rangle / Z(\langle L^G \rangle)$ も既知の群。

以上により、結局次の場合を考えればよい。

- (1) L は G の標準部分群
- (2) $\tilde{L} = L/Z(L)$ は既知の単純群
- (3) $C(L)$ の Sylow 2 群は巡回群

(1) + (3) は次のことと同値になる。

G のある involution t に対して、 L は $C(t)$ の正規準単純部分群であり、 $C(L) \cap C(t)$ の Sylow 2 群は巡回群。

この場合にもすでに多くのことが知られている。

(1) $\tilde{L} \in \mathcal{A}$: Solomon, Harris 等が解決した。

(2) $\tilde{L} \in \mathcal{L}'$: Walter 等が少くとも標数 $\neq 3$ の場合を解決しているようだ。

(3) $\tilde{L} \in \mathcal{F}$: Finkelstein, Solomon 等の人々がほとんどの場合を扱ったようだ。

(4) $\tilde{L} \in \mathcal{L}$: $\tilde{L}$ の BN- pair rank を k で表わす。さらに $Z(L)$ の位数は奇数とする。(そうでない場合はわずかしかない)。 $k=1$ の場合は Griess, Mason, Seitz が解決した。 $k \geq 2$ の場合は Seitz 等の人々が研究している。現在のところ Seitz は次のことを主張している。

「 $\tilde{L} = \text{Sp}_4(2^n)$ 、 $U_4(2^n)$ 、 $U_5(2^n)$ 、 $\text{Sp}_6(2)$ 、 $U_6(2)$ 、 $O_8^\pm(2)$ の場合が解決されれば、 $k \geq 3$ のときには L を含む部分群 G_0 で $G_0/Z(G_0) \in \mathcal{L}$ または $G_0/Z(G_0) \cong L \times L$ なるものを構成することができる。」(G_0 が G の正規部分群であることを証明しなければならないが、それはまだできていないようだ。) したがって上の例外的な場合を処理することが必用になる。ここで報告するのは $\tilde{L} \cong \text{Sp}_4(2^n)$ の場合である。

Theorem (五味、部分的に山田) 有限群 G が標準部分群 L を持ち、 $L/Z(L) \cong \text{Sp}_4(2^n)$ 、かつ $C(L)$ の Sylow 2 群は巡回群であるとする。 L の正規

包を X で表わす。このとき次のいずれかが成立する。

$$(1) X/O(X) \cong \widetilde{Sp}_4(2^n)$$

$$(2) X/Z(X) \cong \widetilde{U}_4(2^n), \widetilde{U}_5(2^n), \widetilde{L}_4(2^n), \widetilde{L}_5(2^n), \\ \widetilde{Sp}_4(2^{2n}), \widetilde{Sp}_4(2^n) \times \widetilde{Sp}_4(2^n)$$

この定理の証明に使われたのと同様の方法を使って、宮本泉が $\widetilde{L} = \widetilde{U}_4(2^n)$ の場合を研究している。

以上の他には rank が 2 の例外型の群 $G_2(2^n)$ 、 ${}^3D_4(2^n)$ 、 ${}^2F_4(2^n)$ 、および Tits の群 ${}^2F_4(2)'$ が残されているが、山田裕理、Assa が研究している。

[1] Aschbacher, On finite groups of component type, Illinois J. ,
1975.