

電気回路網の安定性について

早大 理工 松本 隆

横浜市大 文理 一楽重雄

徳大 エ 川上 博

加州大バークレー L.O. Chua

抵抗 n -port

n_R 個の抵抗と n 個の端子対 (port と呼ぶ)

からなる電気回路網を (抵抗) n -port という。 v_R 及び v_p を、各々、抵抗及び port の電圧とし、 i_R 及び i_p を、各々、抵抗及び port の電流とする。 $v = (v_R, v_p)$, $i = (i_R, i_p)$ とすると、 $(v, i) \in \mathcal{L} \cap \mathcal{K} \triangleq \Sigma$ を満たさなければならない、但し、 $\mathcal{L}$ は抵抗特性を表わす。 $\mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ の $2b - n_R$ 次元 C^1 多様体、 $\mathcal{K}$ は Kirchhoff space で、 b 次元線形部分空間である。 ($b = n_R + n$)。 Σ を n -port $\mathcal{N}$ の configuration space という。

面白い例をいくつかあげてみる。図1(a)は抵抗3つと port1つとつからなる回路で、1-port と呼ばれる。 R_1 と R_2 の特性を与えた時、 Σ はどのようなものになるか、また port から見た時、どのような電圧・電流特性を持つか考えてみる。図1(b)の左側は R_1, R_2 の8つの組合せが示されている。

$i_{Rk} = f_{Rk}$ あるいは $v_{Rk} = g_{Rk}(i_{Rk})$, $k = 1, 2$, である。

Σ を描くことは技術的にどれ程易しくないのぞ、 Σ の (v_p, i_p) 一空間への射影, すなわち, port から見た電圧・電流特性を示したのが図1(b)の右側である。図2は norator と呼ばれるもので, $v_p - i_p$ 特性は全空間 $\mathbb{R}^2$ となる。図3は nullator と呼ばれ, $v_p - i_p$ 特性は原点のみである。図4では, R_1 及び R_2 の特性が (b) 及び (c) で与えられていると $v_p - i_p$ 特性は (d) の様になる。図5で $i_{pk} = f_{Rk}(v_{Rk})$, $k=1, 2$, とすると, $v_p - i_p$ 特性は $v_p = f_{R_1}(p)$, $i_p = f_{R_2}(p)$, $p = v_{R_1} = v_{R_2}$, なるパラメータ表示になる。逆に言えば, $v_p - i_p$ 特性が $v_p = f_1(p)$, $i_p = f_2(p)$, p はパラメータ, で表現される 1-port は, R_1, R_2 の特性を各々 $v_{Rk} = f_k(v_{Rk})$ とする事により図5(a)の回路で実現される。尚この場合 Σ は self intersection を持たず, 任意の C^1 関数 f_{Rk} , $k=1, 2$, に対して, 1次元 C^1 多様体となる。図6では, R_1, R_2 を (a), (b) の様に与えると $v_p - i_p$ 特性は同図(d)の様になる。

定義 Σ が n 次元 C^1 多様体の時, N を正則 (regular) n -port という。

$\dim \Lambda = 2b - n_R$, $\dim K = b$ であるから Λ 而 K であらば N は正則である。 Λ 而 K をチェックするには次の様にすればよい。 N のひとつの木を $\mathcal{T}$ とし, $\mathcal{L}$ を補木とする。 B

及び Q を各々, σ に関する基本ルーフ行列及び基本カット
セット行列とすると,

$$B = [1 : B_\sigma], \quad Q = [-B_\sigma^T : 1] \quad (1)$$

の形で与えられる。 Λ は $2b - n_R$ 次元 C^1 多様体であるから,
各点 $(v_0, i_0) \in \Lambda$ に対して, 近傍 $U \subset \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ と
 C^1 関数 $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n_R}$ があって

$$\Lambda \cap U = f^{-1}(0) \quad (2)$$

$\text{rank}(Df)_{(v,i)} = n_R, (v,i) \in \Lambda \subset U$
が成立する。 $K = \text{Ker } B \times \text{Ker } Q$ だから, $\Sigma \cap U$ は $Bv=0,$
 $Qi=0, f(v,i)=0$ で与えられる。今,

$$\mathcal{F}_{(v,i)} = \left[D_{v_\sigma} f - (D_{v_\Sigma} f, B_\sigma; D_{i_\Sigma} f + (D_{i_\sigma} f) B_\sigma^T) \right]_{(v,i)} \quad (3)$$

とおくと,

$$\Lambda \cap K \iff \begin{array}{l} \text{各点 } (v,i) \in \Sigma \text{ に対して} \\ \text{rank } \mathcal{F}_{(v,i)} = n_R \end{array}$$

となる。但し $v = (v_\Sigma, v_\sigma), i = (i_\Sigma, i_\sigma)$ 。

抵抗特性 Λ が

$$\Lambda = \{ (v,i) \mid (v_R, i_R) \in \Lambda_R \} \quad (4)$$

で与えられる場合も数多くある。この時, (2) の f は (v_p, i_p)
に依存しない。今 $U_R = U \cap \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_R}, f_R(v_R, i_R) = f(v_R, i_R)$
とおく。又, $\pi_R' : \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \longrightarrow \mathbb{R}^{n_R} \times \mathbb{R}^{n_R}$ を射影

$$\pi'_R(v, i) = (v_R, i_R) \quad (5)$$

を定義し,

$$\pi_R = \pi'_R \circ ? \quad (6)$$

とおく。但し, $? : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ は inclusion である。次に

電圧, 電流を

$$v = (v_{R\ell}, v_{p\ell}, v_{Rg}, v_{pg}), \quad i = (i_{R\ell}, i_{p\ell}, i_{Rg}, i_{pg})$$

と分割し, (1) の B_g も

$$B_g = \begin{bmatrix} B_{RR} & B_{RP} \\ B_{PR} & B_{PP} \end{bmatrix}$$

と分割する。凡が (4) を与えられる時, 次が成立する:

$$\Lambda \text{ 市 } K \iff \begin{array}{l} \text{各点 } (v_R, i_R) \in \pi_R(\Sigma) \text{ に対して} \\ \text{rank } \mathcal{F}_R(v_R, i_R) = n_R \end{array}$$

但し,

$$\mathcal{F}_R(v_R, i_R) = \begin{bmatrix} D_{v_{Rg}} f_R - (D_{v_{R\ell}} f_R) B_{RR} - (D_{v_{R\ell}} f_R) B_{RP} \\ D_{i_{R\ell}} f_R + (D_{i_{Rg}} f_R) B_{RR}^T - (D_{i_{Rg}} f_R) B_{PR}^T \end{bmatrix}$$

先にあげた例では, 図 1 の場合, (vi) を除いて全て, Λ 市 K である。図 2, 3, 4, 6 では Λ 市 K , 図 5 では Λ 市 K となる。

安定性

抵抗特性 Λ は, 種々の物理的パラメーター (例えば温度) に

依存する。ここでは Λ が少し変っても Σ が定性的に変るか変らないかを考える。実際に用いられる回路では、 Λ は常に小さな擾動を受けているので、それと共に Σ が急激に変っては困る。また、回路網の計算機シミュレーションに於ても計算誤差は擾動と考えられるので、数値的に安定な数学モデルではないと困る。

さて、 Λ が少し動くという事実を定式化する。 M を $\mathbb{R}^n$ の C^1 多様体とし、 $C^1(M; \mathbb{R}^n)$ を M から $\mathbb{R}^n$ への C^1 関数の全体とする。 $F \in C^1(M; \mathbb{R}^n)$ とし、

$$\mathcal{U}(F; \varepsilon(x)) = \left\{ G: M \rightarrow \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} G \in C^1(M, \mathbb{R}^n) \\ \|F(x) - G(x)\| + \|(dF)_x - (dG)_x\| \\ < \varepsilon(x), \quad x \in M \end{array} \right. \right\}$$

を考える。但し、 $\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}^+$ は任意の正值連続関数。

$C^1(M; \mathbb{R}^n)$ の強 C^1 位相は上の様な集合から生成される。

この位相に関して $\text{Emb}^1(M; \mathbb{R}^n)$ は開なので、次の様な定義を可る。

定義 $\imath_M: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を inclusion とし、 $\mathcal{V}(\imath_M)$ を十分小さな $\imath_M$ の近傍で、 $\mathcal{V}(\imath_M)$ の全ての要素が M の C^1 embedding である様に可る。この時、 Λ の擾動 $\hat{\Lambda}$ を $\hat{\Lambda} = G(\Lambda)$, $G \in \mathcal{V}(\imath_M)$, と定義可る。

次の結果では、技術的理由から、 Λ が閉である事を仮定可

る。電気回路では L は殆んど全ての場合閉である。

結果 L が閉である抵抗 m -port N を考える。 $L \cap K \neq \emptyset$ とする。

(i) もし L 閉 K であれば, N は正則, として, 次の意味で安定: L の十分小さな任意の擾動 $\hat{L}$ に対して, $\hat{\Sigma} = \hat{L} \cap K$ は n 次元 C^1 多様体であり続ける。実際, Σ と $\hat{\Sigma}$ は C^1 diffeo.

(ii) もし L 閉 K であれば, N は次の意味で不安定:

(a) Σ が n 次元多様体でない場合, L の擾動 $\hat{L}$ があつて, $\hat{\Sigma}$ は n 次元多様体となる。

(b) Σ が n 次元多様体である場合, L の擾動 $\hat{L}$ があつて, $\hat{\Sigma}$ は $(n+k)$ 次元多様体を含む, $k > 0$ 。

上の結果によれば, 安定な m -port は正則なものに限られる。

(ii)(a)を示す際, 回路では $L \cap K = \emptyset$ は意味がないので注意を要する。電圧, 電流が抵抗特性とキルヒホフの法則を同時に満たさなければならぬ。だから, L 閉の時, L を少し動かして $\hat{L}$ 閉 K とする場合, $\hat{L} \cap K \neq \emptyset$ を保証しなければならない。そのため, (v, i) を nontransversal intersection とし, その点での $T(v, i)L$ と $T(v, i)K$ を考える。 $T(v, i)L$ を少し回転させると $A(T(v, i)L) \cap T(v, i)K$ とで交る。但し A は回転を表わす行列。 L を

(v, i) の近くで少し回転させ、他は動かさない様にして得られたものを L_1 とする。又 (v, i) は L_1 と K の transversal intersection になったが、未だ他にも nontransversal intersection が残っているかも知れないし、また、 L_1 を少し動かす事によって、新しい nontransversal intersection ができてしまったかも知れない。そこで、 L_1 を少し動かした L ととり L と K とできる事を用いる。 L_1 と K は (v, i) で non empty, transversal intersection をもつから少し動かしても non empty intersection を持ち続ける。従って $L \cap K \neq \emptyset$ 。

(ii)(b) で (v, i) を nontransversal intersection とする。この時、ある $k > 0$ に対して

$$\dim (T_{(v,i)} L + T_{(v,i)} K) = 2b - k$$

であるから、

$$\dim (T_{(v,i)} L \cap T_{(v,i)} K) = n + k$$

となり、 k は nontransversality から来る余分の次元である。そこで L を局所的に $T_{(v,i)} L$ の上におしつぶし、他はそのままにしておけば、望むものが得られる。

回路擾動による正則 m -port の構成

与えられた m -port N で、 L と K であつたとする。 L を少し動かして L と K , $L \cap K \neq \emptyset$, とできる事は、先の結

果と同様に示せる。 m -port N に新しい n 個の port をつくって $(m+n)$ -port にする操作を回路擾動と呼ぶ。これに対して N の擾動を素子擾動と呼ぶ。ここでは、回路擾動による正則 $(m+n)$ -port の構成を考える。

結果 抵抗 m -port N で、 L 市 K , $L \cap K \neq \emptyset$, とし、 L である場合を考える。任意の木を T とし、対応する補木を L とする。 T の各枝と並列に新しい port をつくり、 L の各枝と直列に新しい port をつくり、これを $\hat{N}$ と呼ぶ。この時 $\hat{N}$ は $(m+b)$ -port で、 $\hat{L} \cap \hat{K} \neq \emptyset$, $\hat{L}$ 市 $\hat{K}$, 従って、 $\hat{N}$ は正則、そして安定である。

(注意) 新しい port をつくと、 L も K も変わる。

証明 T と並列につく、 K port の枝を T_1 , L と直列につくった port の枝を L_1 とする。 $\hat{T} = L \cup T_1$ は $\hat{N}$ の木となり、 $\hat{L} = T \cup L_1$ は $\hat{N}$ の $\hat{T}$ に関する補木となる。 $\hat{N}$ の変数を

$$\hat{v} = (v_{\hat{T}}, v_{\hat{L}_1}, v_{\hat{L}}, v_{\hat{T}_1}), \quad \hat{i} = (i_{\hat{T}}, i_{\hat{T}_1}, i_{\hat{L}}, i_{\hat{T}_1})$$

と分割する。 $(v_0, i_0) \in L \cap K \neq \emptyset$ に対して

$$\hat{v}_0 = (v_{0T}, 0, v_{0L}, v_{0T}), \quad \hat{i}_0 = (i_{0T}, i_{0L_1}, i_{0L}, 0)$$

とおくと

$$(\hat{v}_0, \hat{i}_0) \in \hat{K} \quad (7)$$

となる。これは $(\hat{v}_0, \hat{i}_0)$ が T_1 を開放、 L_1 を短絡した事に相当するからである。又、抵抗は付け加えていないから、

$$\hat{\mathcal{L}} = \{(\hat{v}, \hat{i}) \mid (v, i) \in \mathcal{L}\} \quad (8)$$

となり, $(\hat{v}_0, \hat{i}_0) \in \hat{\mathcal{L}}$. (7)(8) より

$$(\hat{v}_0, \hat{i}_0) \in \hat{\mathcal{L}} \cap \hat{K} \neq \emptyset.$$

を得る。さて, $\hat{\mathcal{N}}$ の基本ループ行列 $\hat{B}$ の主要部 $\hat{B}_\sigma$ は次の様に与えられる:

$$\hat{B}_\sigma = \begin{bmatrix} v_{\mathcal{L}} & v_{\sigma_1} \\ 0 & -1 \\ 1 & B_\sigma \end{bmatrix} \begin{matrix} v_\sigma \\ v_{\mathcal{L}_1} \end{matrix}$$

次に, $\hat{f}(\hat{v}, \hat{i}) = f(v, i)$,

$$D_{\hat{v}_\sigma} \hat{f} = [D_{v_\sigma} f \mid 0], \quad D_{\hat{v}_{\mathcal{L}}} \hat{f} = [D_{v_{\mathcal{L}}} f \mid 0],$$

$$D_{\hat{i}_\sigma} \hat{f} = [D_{i_\sigma} f \mid 0], \quad D_{\hat{i}_{\mathcal{L}}} \hat{f} = [D_{i_{\mathcal{L}}} f \mid 0].$$

である事に注意すると

$$\hat{\mathcal{F}}(\hat{v}, \hat{i}) = [D_{v_{\mathcal{L}}} f \mid D_{v_\sigma} f \mid D_{i_\sigma} f \mid D_{i_{\mathcal{L}}} f] = (Df)(v, i)$$

を得る。従って

$$\text{rank } \hat{\mathcal{F}}(\hat{v}, \hat{i}) = n_R$$

となり, $\hat{\mathcal{L}}$ 亦 $\hat{K}$ が従う。

$\mathcal{L}$ が (4) で与えられる場合は, 加える port 数は少なくて可也。

結果 $\mathcal{L}$ が (4) で与えられており, $\mathcal{L} \not\subset K$, $\mathcal{L} \cap K \neq \emptyset$, とする。 $\mathcal{T}$ を N の任意の木とし, $\mathcal{L}$ を対応する補木とする。 $\mathcal{T} = R_{\mathcal{T}} \cup P_{\mathcal{T}}$, $\mathcal{L} = R_{\mathcal{L}} \cup P_{\mathcal{L}}$ と分割する。但し $R_{\mathcal{T}}$ は木

の抵抗枝, R_p は木の port 枝, 他にも同様な意味を持つ。
 R_p の各枝と並列に port をつくり, R_L の各枝と直列に
 port をつる。こうしてできたものを $\hat{N}$ とすると, これは
 $(n+nR)$ -port であって, $\hat{L} \cap \hat{K} \neq \emptyset$, $\hat{L} \nsubseteq \hat{K}$, 従って, $\hat{N}$
 は正則, として安定である。

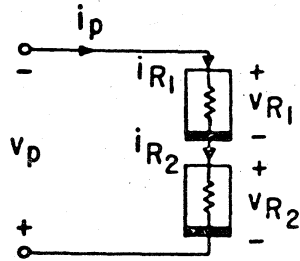
問題 1 $\pi_p' : \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ を $\pi_p'(v, i) = (v_p, i_p)$
 で定義し, $\pi_p = \pi_p' \circ \tau$ とおく。但し $\tau : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$
 は inclusion. $\pi_p(\Sigma)$ の安定性を定義し, 調べる事。

問題 2 N_k を m_k -port とする, $k=1, \dots, m$. N_k は
 全て L_k 和 K_k を満たすとする。 N_k を互につなぎ合わせて
 できる回路を N とする。 $\hat{L}$ 和 $\hat{K}$ となる十分条件を N_k
 の性質のみから調べる事。

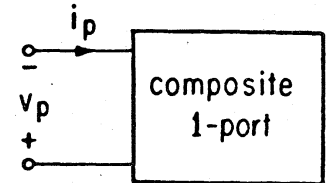
[文献]

[1] L. O. Chua, T. Matsumoto and S. Ichiraku, Geometric Properties of
 Nonlinear Resistive n-Ports, IEEE Trans. Circuits and Systems, to appear

[2] T. Matsumoto, L. O. Chua, H. Kawakami and S. Ichiraku, Geometric
 Properties of Nonlinear Dynamic Networks, preprint

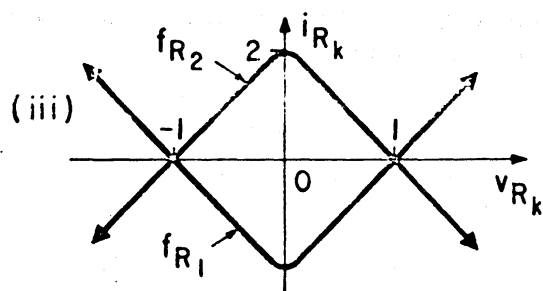
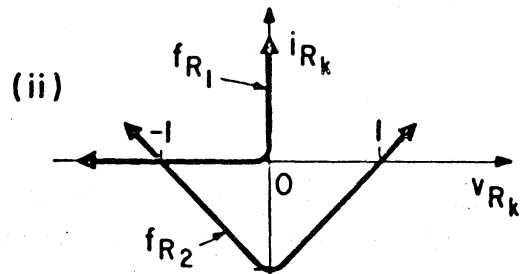
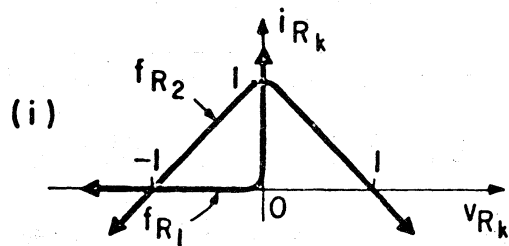


$\equiv$



(a)

Constitutive relations
of R_1 and R_2



Constitutive relation
of the composite port

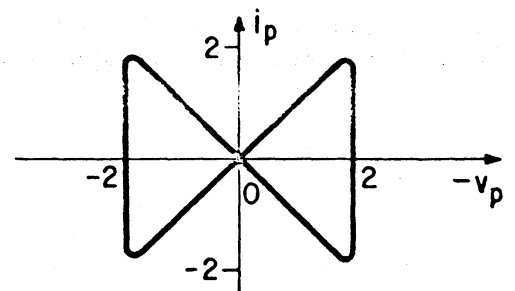
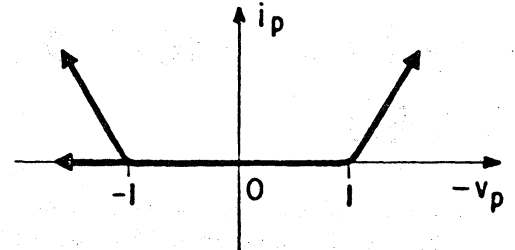
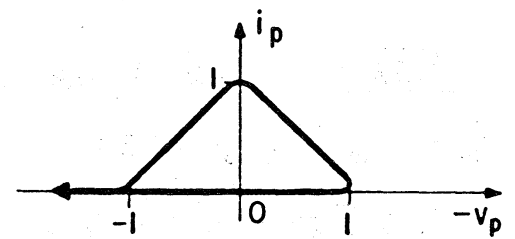
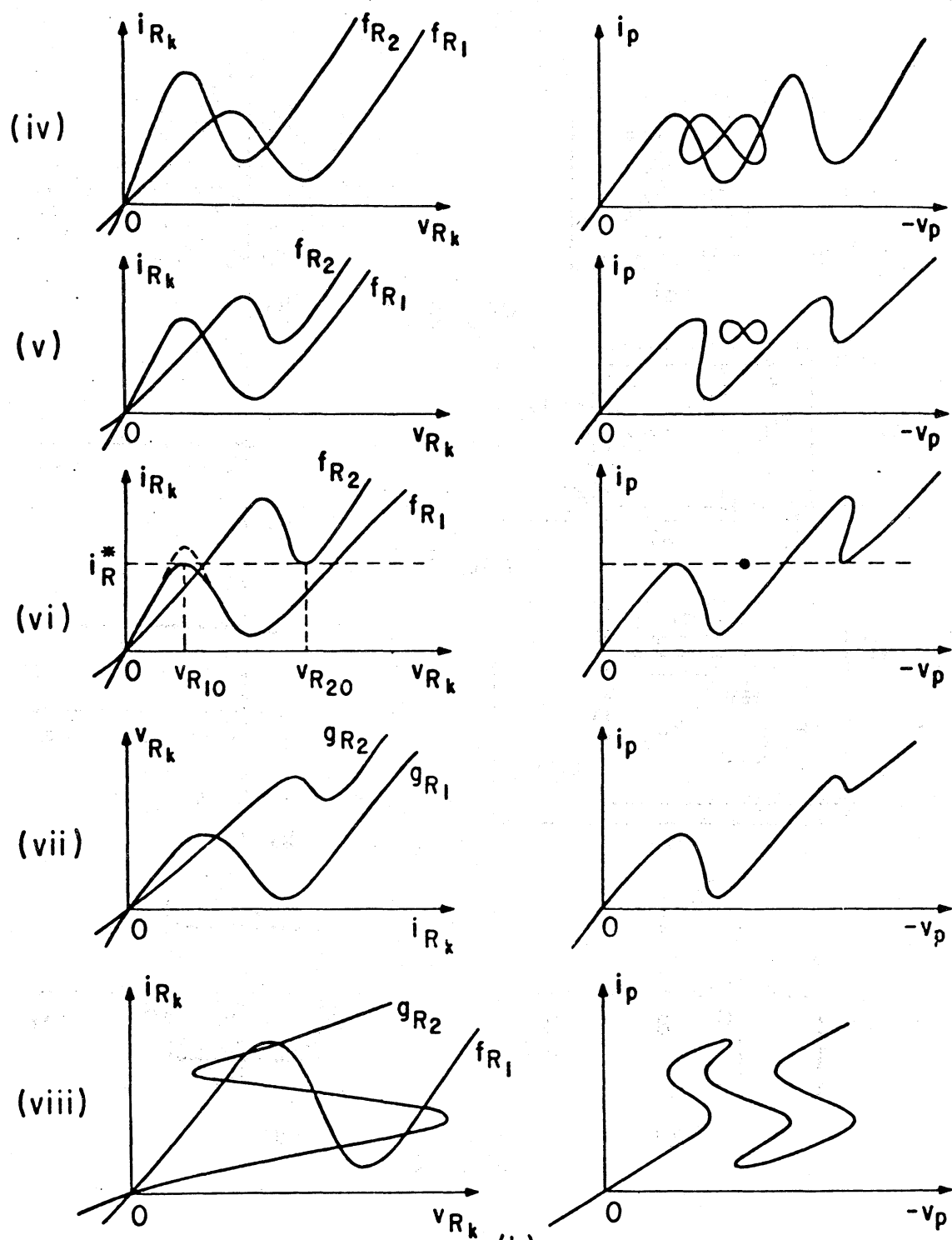
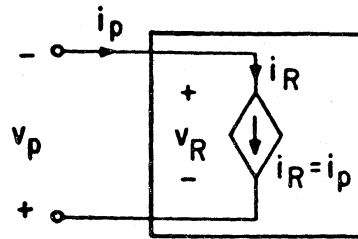


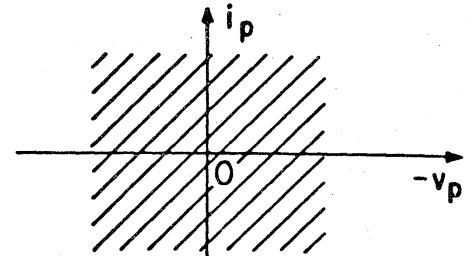
Fig. 1



(b)
Fig. 1

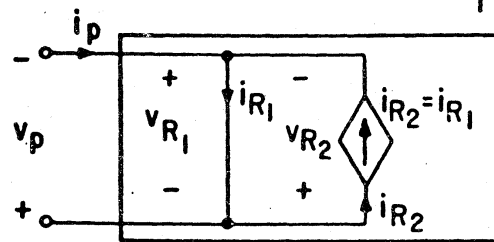


(a)

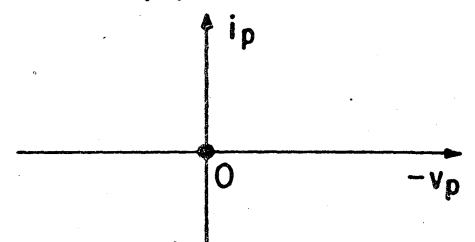


(b)

Fig. 2

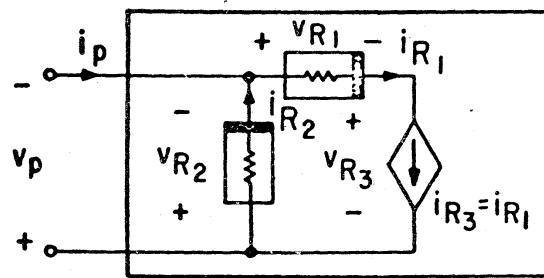


(a)

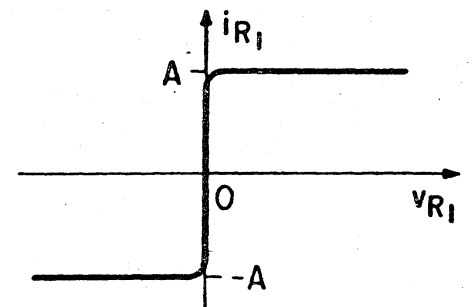


(b)

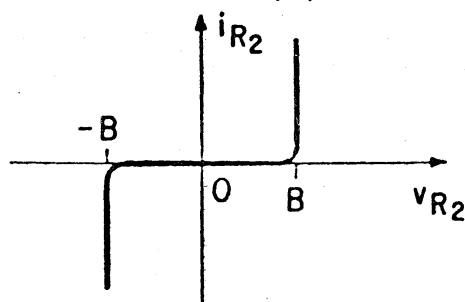
Fig. 3



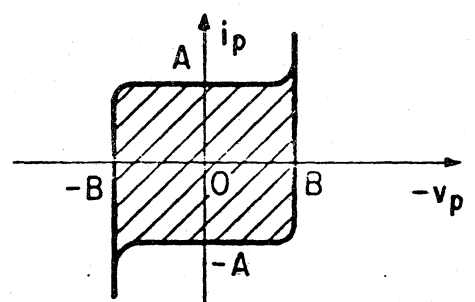
(a)



(b)

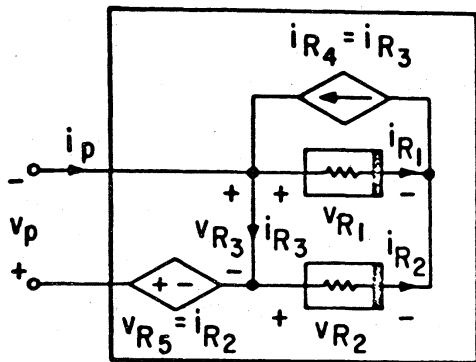


(c)

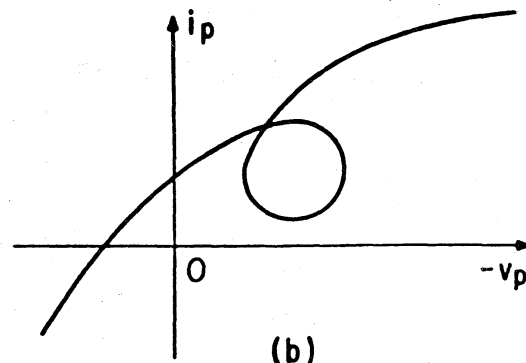


(d)

Fig. 4

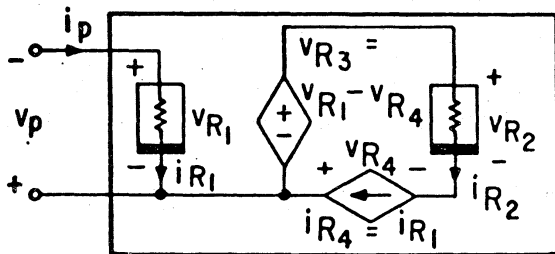


(a)

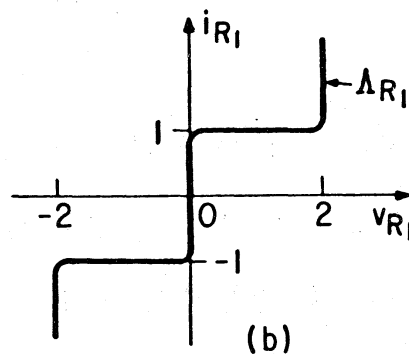


(b)

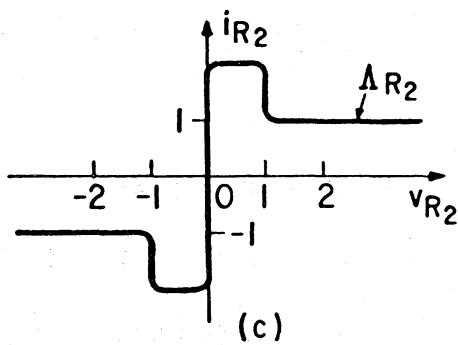
Fig. 5



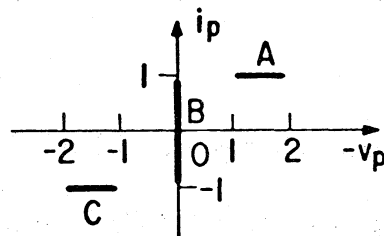
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 6