

同一粒子配列の標準砂におけるセン断弾性係数, セン断強度と垂直応力, 水因垂直応力の関係

丸井 英明・佐々 恭二・武居 有恒

Relationships of modulus of shearing elasticity and shearing
strength of sand to normal stress and hydro-normal stress

Hideaki MARUI, Kyōji SASSA and Aritsune TAKEI

要 旨

斜面の安定問題を考える場合、土の強度及び変形を規定するセン断弾性係数が、土中深度によって如何なる分布を示すか、或は地下水面の存在や水分状況によってどの様に変化するかを知することは極めて重要である。そこでこれらの問題について精度よく調べるために、繰り返しセン断により砂を弾性状態（変形に際しても粒子配列が変わらない状態）にして、同一粒子配列下において垂直応力とセン断弾性係数、セン断強度の関係について調べ、これらが直線関係にあることを実験的に検証した。また、砂粒子の表面についた毛管水の表面張力による凝集力（セン断に際しては垂直応力と同じ働きをする）を水因垂直応力と呼び、この力がセン断弾性係数、強度にどのような影響を及ぼすかについても同様に粒子配列が変わらない状態で実験を行った。その結果、砂が不飽和から飽和へ変わることによる水因垂直応力の減少によってセン断弾性係数、セン断強度が低下することを検証した。

は じ め に

第1節において、佐々、或は村山の砂の三粒子モデルによる砂の弾性の原因の考察について記し、垂直応力がセン断弾性係数を規定することを示した。第2節において、弾性波伝達速度測定によってなされた垂直応力とセン断弾性係数の関係に関する研究について記した。Hardin, Richart はセン断弾性係数が等方応力のベキ乗に比例するという関係を導いているのに対し、佐々等はセン断弾性係数と垂直応力は直線関係にあるという結果を得ている。そこでこの両者の関係を正確に求めるために第3節に示した様な方法によって同一の粒子配列、構造を持った標準砂において垂直応力を変えてセン断試験を行った。又、第5節に示す水因垂直応力についても、その有無によるセン断弾性係数、セン断強度の変化を正確に求めるために、同様の方法によって実験を行った。

1. 砂の弾性の原因

斜面の安定問題を扱う場合、大別して二つの手法がある。一つはクーロン式を用いて剛体力学的に解く方法であり、今一つはレオロジーモデルを用いて変形を考慮して解く方法である。この

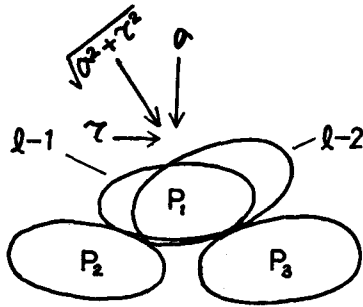


Fig. 1. Sliding of sand particle (Sassa)

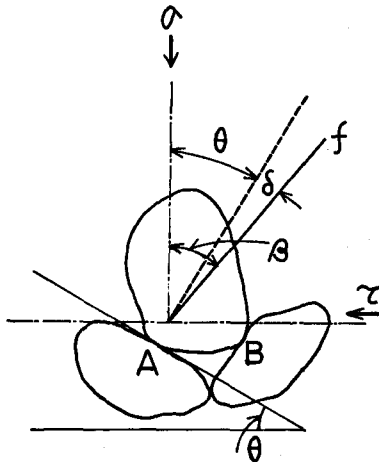


Fig. 2. Sliding of sand particle (Murayama)

二つのうちクーロン式はもともと土の研究から出て来たものであるが、レオロジーモデルは流体力学や高分子化学で発達して来たものを土質力学へ取り入れたものである。この経緯から土質力学でもまず粘土の流動など粘性を表わすものに取り入れられてきた。この範囲ではレオロジーモデルをそのまま用いてもさして問題はないが、斜面の安定問題など弾性の問題、ことに土被り圧＝拘束圧の異なる斜面内の変形を扱う場合、土の弾性の原因と一般の弾性体例えば高分子化合物や金属材料などの弾性の原因が異なるために同列には扱えない。即ち高分子化合物や金属材料においては、弾性変形とそれに伴う弾性回復力は分子間結合（イオン結合、共有結合、ファンデルヴァールス結合等）によって引き起こされると考えられるが、砂質土においては飽和時にはこれに相等する何等の結合力も考えられないにも拘らず飽和砂も弾性及び弾性回復力を示す。それ故に砂の場合の弾性の原因は、他の弾性体、金属・高分子化合物等とは基本的に異なると考えられる。

筆者の一人佐々は1972年砂の三粒子モデルにより、垂直応力が砂のせん断変形に対する弾性回復力となることを示した。即ち図1において三つの砂粒子を考え、下の二つは静止しているとする。まず垂直応力 σ のみが作用している時は σ に対して最も安定な位置（通常砂粒子の短軸方向が σ の方向に一致する位置）例えば $l-1$ の位置を占める。次にせん断力 τ が作用するとその合力方向

$\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ に対して最も安定な位置例えば $l-2$ の位置を占める。そしてせん断力 τ を取り除けば、砂粒子 l_1 は再び σ に対して最も安定な位置 $l-1$ へ戻る（砂粒子間の物理的な摩擦があるので完全には戻らない）。従って砂のせん断に関する弾性の原因は垂直応力であり、せん断弾性係数は垂直応力に依存する。一方、村山も1975年同じく三粒子モデルによる砂の弾性が砂粒子自体の弾性によってではなく、砂の滑動によって生じること述べている。図2において、一定の垂直応力の下でせん断応力 τ を増加していくと接点Bにおける接触圧は減少し、遂に接点Bは接触を断ち、粒子は接点Aのみで下方粒子に接しながら左方に滑動する。ここで、 f ：粒子に作用する力、 β ：粒子間力の方向角、 θ ：接点方向角、 δ ：粒子間摩擦角、とすると、 $(\theta + \delta)$ が粒子の滑動に対する抵抗角となり、それよりも β が大きくなれば滑動する。砂が弾性状態にある場合は、粒子がせん断力によって隣接する摩擦斜面に沿って移動して停止し、次いでせん断力を除荷すれば、停止位置より当初の位置に復帰し、弾性状態では載荷と除荷によって除荷時の砂の粒子構造には変化が生じない。（但し、三粒子のみで砂の弾性変形を説明するには無理があり、佐々の図も、村山の図も矛盾がある。）

2. 垂直応力とせん断弾性係数の関係についてのこれまでの研究

前節に記した様に砂の弾性の原因は垂直応力にあり、垂直応力はクーロン式による如く強度も

左右し、弾性係数も左右するにも係らず、レオロジーモデルを斜面安定問題、変形問題に用いる場合、解析的なものであれ、有限要素法であれ、筆者の知るほとんどの研究においてレオロジーモデルの弾性係数が土被り圧に係らず一定として扱われている。佐々は若干の実験とクーロン式からの推定 ($\tau = C + \sigma \tan \varphi$ に $\tau = G\gamma$ を代入すると $G = \frac{C}{\gamma} + \frac{\tan \varphi}{\gamma} \sigma$, G は割線弾性係数。土を modified voigt model で表わしても同様な式になる。) から、セン断弾性係数は垂直応力と直線関係にあるとして斜面安定解析に用いている。

ところが、垂直応力とセン断弾性係数の関係については、Hardin, Richart の三軸セル内での弾性波伝達速度測定の研究以来、国内で行われた多くの研究は、すべてセン断弾性係数は等方応力 σ_m のべき乗に比例する (両対数で直線関係) という関係を導いている⁸⁾。これはクーロン式との整合性の点でも、斜面安定など地盤解析に用いる際の複雑さの点からも余り好ましいことではない。そこで標準砂のモデル地盤内の同一深度に木板と shot mark 用受振器各1個を配置し、2 ton ジャッキ4台で砂層表面に垂直応力を与えつつ、セン断弾性係数を測定したところ $\sigma = 0$

の場合は直線から離れるが、他は直線上に載ることが認められた (図3, 図4)。一方 Hardin, Richart のデータを正規方眼紙上にプロットして整理すると $\sigma_m = 1.2 \sim 1.5 \text{ kg/cm}^2$ で屈折点を持つ直線であることがわかった (図5) (国内の研究も同様)。図3, 4の $\sigma = 0$ で値が下がるのと、図5で屈折点が出る理由は、垂直応力の小さい時には砂の締固めの際に出来る構造が弛み弾性係数が低下するためである可能性が考えられる。そして図3, 4の場合は鉄の箱であるので側面の拘束が強く弛が

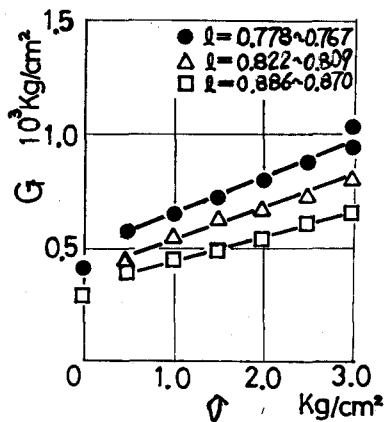


Fig. 3. Relationship between the modulus of shearing elasticity and the normal stress (no water supply)

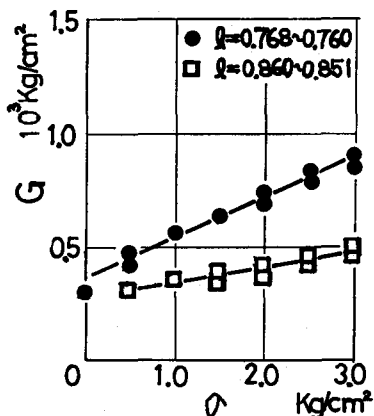


Fig. 4. Relationship between the modulus of shearing elasticity and the normal stress (saturated)

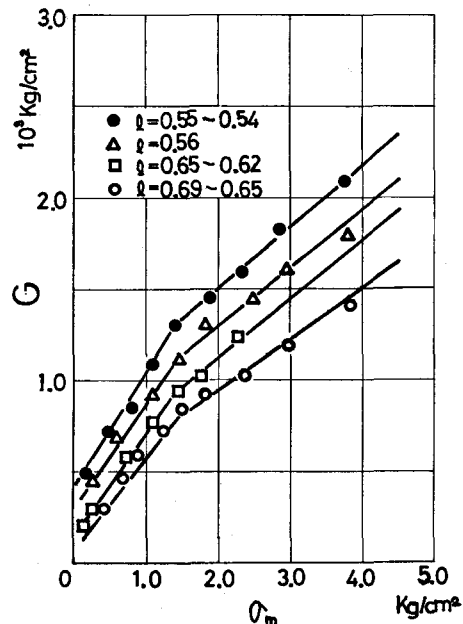


Fig. 5. Relationship between the modulus of shearing elasticity and the isotropic stress by B.O. Hardin and F.E. Richart (saturated)

少ないため弾性係数は $\sigma = 0$ の時にわずかに低下するだけであるが、図5の場合は三軸セルで側面がゴムであるために弛が大きく拘束圧が $\sigma = 1.2 \sim 1.5 \text{ kg/cm}^2$ になり弛が無くなる迄は弾性係数は大きく低下しているのであると思われる。

3. 繰り返しせん断試験法

せん断弾性係数が垂直応力とどのような関係にあるかは、応用を考える場合極めて重要であり、斜面安定問題では特に静的な変形、歪レベルの大きい所での関係が重要である。この点について調べる際に、異なるサンプルで垂直応力を変えて実験を行った場合には、各実験毎にサンプル内の粒子配列が異なり、実験値のバラツキが大きく、実験の精度を一定以上あげることは困難であると考えられる。そこで正確にせん断弾性係数と垂直応力の関係を求めるため、同一サンプルで、同一密度、同一粒子配列の試料に異なった垂直応力を載荷し、各々の場合に対するせん断抵抗力及びせん断弾性係数を求めた。試験機としてはせん断弾性係数が求まる様に単純せん断試験機を用いた。実験方法は図6の模式図に示すものであり、まず垂直応力として $\sigma = 1.5 \text{ kg/cm}^2$ を載荷し、4%の歪を与え、その時の応力 τ_4 を読み取り、 $\tau = 0 \sim \tau_4$ の間を繰り返しせん断し、応力-歪曲線がほぼ同じ経路を辿る様になり、歪回復時の残留歪がほぼゼロと見なせる状態（変形の際にも粒子配列が変わらない状態）まで持っていく。この時の $\tau-r$ 曲線の傾きがその状態でのせん断弾性係数である。次に垂直応力を段階的に減少させて同じ歪の範囲でせん断

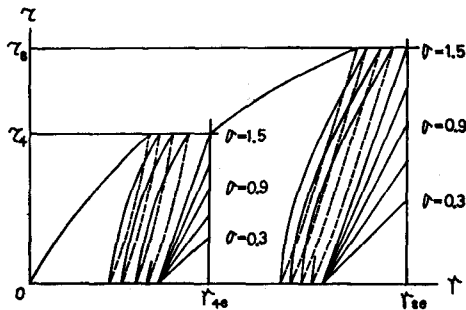


Fig. 6. Chart of the repeated shearing test

する（この時 $r_{4\sigma}$ の歪以上の歪を与えない様に注意する。 $r_{4\sigma}$ 以上の歪を与えると粒子配列が変わり弾性状態でなくなる）。この時の $\tau-r$ 曲線の傾きがその垂直応力の下でのせん断弾性係数である。この様に順次 σ を変えて実験すれば、同一粒子配列下でのせん断弾性係数と垂直応力の関係が求まる。さらに、歪レベルがより大きくなった場合についても調べるために、一度垂直応力を初期の状態（ $\sigma = 1.5 \text{ kg/cm}^2$ ）まで戻してから、8%までせん断し、歪レベルが4%の時と同様の手順で $\tau = 0 \sim \tau_8$ の間を繰り返しせん断し弾性化した状態で段階的に垂直応力 σ を変えてせん断弾性係数の測定を行った。8%の歪レベルでの測定を終えた後、再度垂直応力を初期の状態に戻し、16%までせん断し繰り返しせん断を行い同様の計測を行った。

4. 垂直応力とせん断弾性係数、せん断強度の関係

せん断抵抗力と垂直応力の関係を図7、図8に示す。図7は飽和した標準砂での試験結果であり、図8は不飽和（ $S_r = 33.2\%$ ）の標準砂での試験結果である。せん断抵抗力と垂直応力は直線関係にあり、その勾配は歪レベルが大きい程大である。これは砂粒子の相対移動の x 方向成分がせん断歪であるので、歪が大きい程垂直応力とせん断力の合力方向である粒子間力の方向角（ $\tau-\sigma$ 直線の傾きに等しい）が大となるためである。（この点に関しては、村山モデルでは説明が無理である。）

せん断弾性係数と垂直応力の関係を図9、10、11に示す。図9は飽和した標準砂での試験結果であり、図10、11は不飽和の標準砂（それぞれ $S_r = 52.3\%$, $S_r = 33.2\%$ ）での試験結果である。

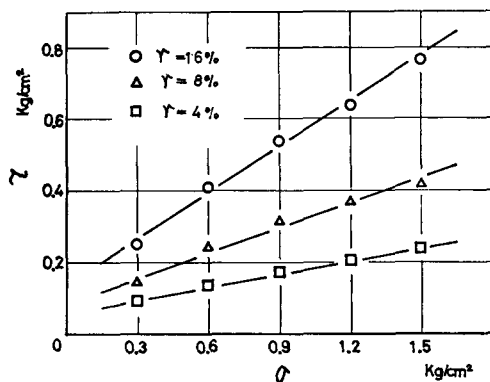


Fig. 7. Relationship between the shearing resistance force and the normal stress
rd=1.55, Sr=100%, w=27%

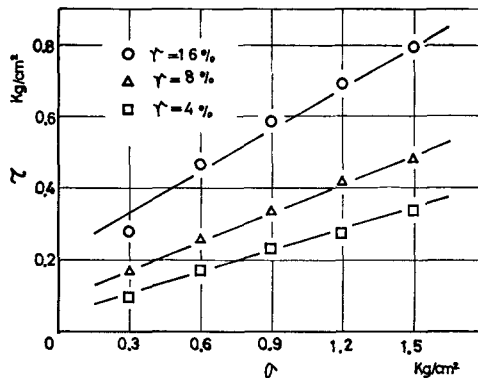


Fig. 8. Relationship between the shearing resistance force and the normal stress
rd=1.57, Sr=33.2%, w=8.7%

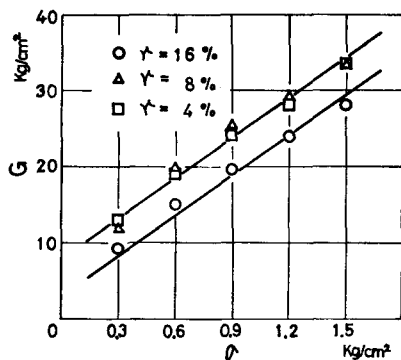


Fig. 9. Relationship between the modulus of shearing elasticity and the normal stress
rd=1.55, Sr=100%, w=27%

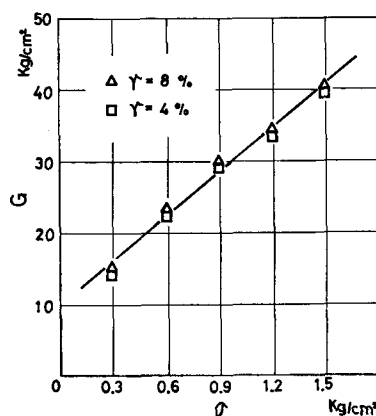


Fig. 10. Relationship between the modulus of shearing elasticity and the normal stress
rd=1.57, Sr=52.3%,
w=13.7%

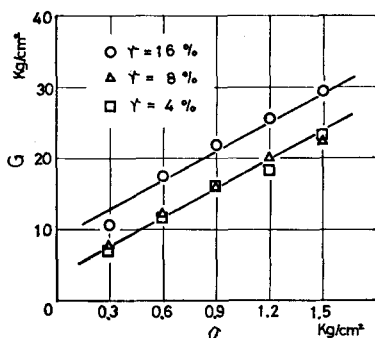


Fig. 11. Relationship between the modulus of shearing elasticity and the normal stress
rd=1.57, Sr=33.2%,
w=8.7%

いずれの場合においてもせん断弾性係数は垂直応力とはほぼ直線関係にあると見なし得る。又歪レベルが4%の時も8%の時もほぼ同一直線上に載っており、所定の垂直応力の下では歪レベルに係らずせん断弾性係数は一定となることが推察される。しかし歪レベルが16%の時の直線は、4%、8%の時の直線よりも上に来たり、下に来たりしており、これは16%歪は破壊歪付近であるので不安定になっているために強度のバラツキが大きいからであると考えられる。又、せん断弾性係数の値は後で記す様に飽和の場合よりも不飽和の場合の方が大きく直線は上に来ると考えられる。ところが、図10の直線は図9よりも上にあり妥当であるが、図11の $S_r=33.2\%$ の場合は飽和の場合の図9より低い位置にあり矛盾した結果となっている。この理由は不明である。

現実の斜面においてもせん断弾性係数の深度方向分布が直線的になるかどうかは、同種の土層

でも土層の不均一性、風化度やインターロッキングの程度の差等のために、サンプル試験で求めた結果とは必ずしも一致しないが、セン断弾性係数と垂直応力の直線関係は今後レオロジーモデルを斜面安定問題へ適用していく際に有効であると考えられる。

5. 水因垂直応力

土中の水は種々の状態で存在しているが、毛管水は粒子の接触点に位置を占め表面張力によって土粒子間隙に保持されているもので、重力水（或は自由水）は、重力の作用で移動し粒子と粒子の間の大きな間隙を満たしているものである。土が不飽和の状態にある時は、土粒子の表面についた毛管水はその表面張力に基づく凝集力によって土粒子を相互に引きつける働きをしている。この水による土粒子を引きつける力是一種の拘束圧であり、セン断に際しては垂直応力と同じ働きをしていると考えられる。一方、土が飽和の状態にある時には毛管水の作用は土粒子間隙が重力水で満されることにより解消してしまい、逆に間隙水圧が作用するが、この間隙水圧も見掛け上、水による負の垂直応力として扱うことが出来る。そこでこの両者、土が不飽和の時作用する毛管水による凝集力と、飽和の時作用する間隙水圧を総称して水因垂直応力 (hydro-normal stress) と呼んでいる⁹⁾¹⁰⁾。

この水因垂直応力は斜面崩壊に対して極めて重要な意味を持つと考えられる。実際の斜面崩壊、地すべりにおいても、モデル実験においても地下水面近辺ですべる現象がしばしば観察される。この場合水面付近では間隙水圧は作用しないことから所謂有効応力を用いたモール＝クーロン式では説明がつかない。ここではむしろ土が不飽和の状態から飽和の状態に変わることによって水の表面張力に起因する凝集力——水因垂直応力が減少し、その結果土のセン断強度が低下することが重要な役割を果していると考えられる。そこで、水因垂直応力を σ_{hy} と表示し、これを用いると、モール＝クーロンの式では $\tau = C + (\sigma + \sigma_{hy}) \tan \varphi$ と表わされ、水分条件の変化を表わせなかったモール＝クーロン式を拡張しあらゆる含水状態に対して適用可能にすることができる。この水因垂直応力について、特にセン断弾性係数との関係について、ベーン試験、弾性波速度測定⁷⁾¹⁰⁾、単純セン断試験によって調べて来た。しかし、標準砂等の場合、この正の方向の水因垂直応力は比較的小さいと考えられ、サンプル毎に飽和度を変えて実験しても、サンプル毎の粒子配列の差異のために正確な値は求まらない可能性がある。そこで、第3節で記したと同様の繰り返しセン断を行い、弾性状態にある砂において、不飽和の状態から注水によって飽和の状態に変わることによる水因垂直応力の減少に伴うセン断強度、セン断弾性係数の低下を検証した。

6. 水因垂直応力の減少に伴うセン断強度、セン断弾性係数の低下

試験方法は図6の模式図と同様に、まず垂直応力としての $\sigma = 1.5 \text{ kg/cm}^2$ を載荷し、8%までセン断し、その時の応力の値 τ_s を読み取り、 $\tau = 0 \sim \tau_s$ の間を繰り返しセン断し、弾性状態にした。そして垂直応力を段階的に減少して同じ歪の範囲をセン断し、セン断強度、或はセン断弾性係数を求めた。その結果図12の上方白抜の直線を得た。図12の座標は横軸に垂直応力、縦軸は左側にセン断抵抗力、右側にセン断弾性係数を取ってある。次いで、垂直応力を一度初期の状態 $\sigma = 1.5 \text{ kg/cm}^2$ まで再載荷してからサンプルに注水し飽和させた。このままの状態では注水に伴って体積が収縮し、粒子の配置が変化するので、体積変形が起らない様に注水に応じて垂直荷重を減少させたところ $\sigma = 0.9 \text{ kg/cm}^2$ になった。この不飽和の時と同一の粒子配列、粒子配置の状態段階的に垂直応力を下げて不飽和の時と同じ歪の範囲でセン断を行ない図の下方、黒塗の直

線を得た。図12においては乾燥密度、 1.55g/cm^3 の標準砂において初期の飽和度0.37%から注水によって100%飽和まで変化したことによって、見掛け上垂直応力 σ が 0.17kg/cm^2 減少し（図中 σ_{hy} で示した部分）、摩擦角 $\tan^{-1}(\tau/\sigma)$ が 5.9° 減少したことを示す。このことは飽和度が0.37%から100%まで変化した為の水因垂直応力 σ_{hy} の変化量が 0.17kg/cm^2 であることを示しており、又一方、 $\tan^{-1}(\tau/\sigma)$ は粒子接点の方向角 (θ) と粒子

間の物理的な摩擦角 (δ) の和になるので、 $\tan^{-1}(\tau/\sigma)$ の変化量 5.9° は水が砂粒子接点にはいり込んだことによる物理的な摩擦角の変化であると考えられる。同様に図13は、乾燥密度 1.57g/cm^3 の標準砂において、まず垂直応力として $\sigma=2.4\text{kg/cm}^2$ を載荷して、図12の場合では歪レベルは8%であったけれどもこの場合には16%歪までセン断し、その時の応力 τ_{16} を読み取り、 $\tau=0\sim\tau_{16}$ の間を繰り返しセン断し弾性化した状態で垂直応力 σ を段階的に下げていき、図13上方白抜の直線を得、その後垂直応力を一度 $\sigma=2.4\text{kg/cm}^2$ まで再載荷してから注水して飽和させた。この場合も注水によって体積変形が生じない様に注水に応じて垂直荷重を減少させたところ $\sigma=0.9\text{kg/cm}^2$ になり、この状態で順次垂直応力を下げて図13の下方黒塗の直線を得た。図13は飽和度を52.3%から100%に変えることにより σ が 0.37kg/cm^2 減少し、摩擦角 $\tan^{-1}(\tau/\sigma)$ が 3° 減少したことを示している。このことは、飽和度が52.3%から100%まで変化した時の水因垂直応力 σ_{hy} の変化量が 0.37kg/cm^2 であることを示しており、又一方、 $\tan^{-1}(\tau/\sigma)$ の変化量 3° は水が砂粒子接点にはいり込んだことによる物理的な摩擦角の変化であると考えられる。

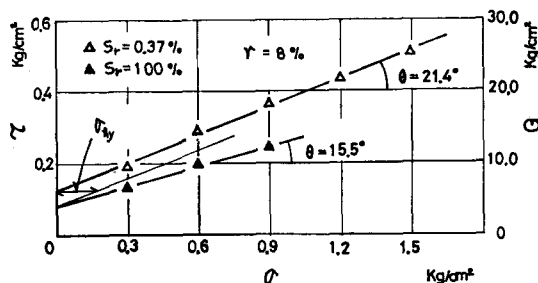


Fig. 12. The difference of the shearing resistance force by the degree of saturation (0.37%, 100%)

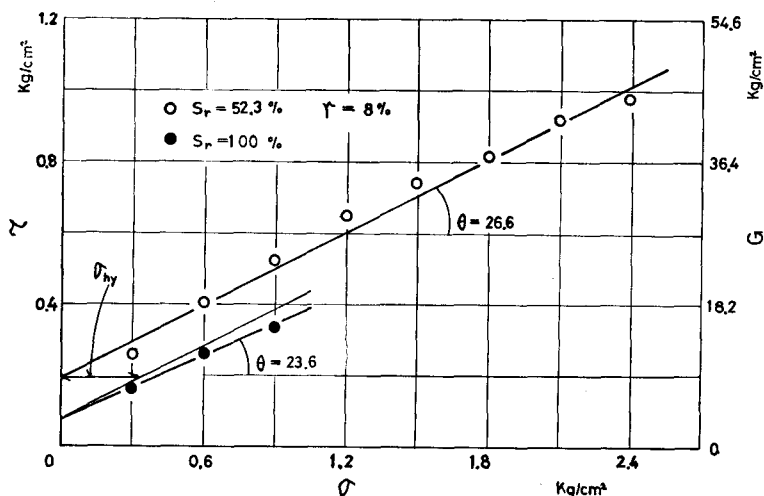


Fig. 13. The difference of the shearing resistance force by the degree of saturation (52.3%, 100%)

お わ り に

本研究では、標準砂を用いて繰り返しせん断試験を行い弾性状態にして、同一粒子配列の下で、せん断弾性係数、せん断強度と垂直応力の直線関係を検証し、又、砂が不飽和から飽和の状態に変わる際の水因垂直応力の減少に伴うせん断弾性係数、せん断強度の低下について検証した。実際の地盤の中において、せん断弾性係数、せん断強度の深度方向の分布がどの様になるかという問題と、地下水面の存在や水分状況の変化によってせん断弾性係数、せん断強度がどの様に変化するかという点については、引用文献 8) にあげた現位置せん断試験等の方法によって実測し検討を加えなければならないと考える。

最後に本研究の遂行に当り有益な御助言を頂いた本学砂防研究室小橋澄治先生に謝意を表します。

引 用 文 献

- 1) 佐々恭二：斜面安定解析—I——主として標準砂使用室内実験に基づいて——，新砂防，86号，5～17，(1972)
- 2) Kyoji SASSA, Aritsune TAKEI : Fundamental research for the analysis of slope stability—On the relation $G_s = g_s(\sigma + \sigma')$ and $r_y = \text{const.}$ ——, Memoirs of the College of Agriculture, Kyoto University, No. 108, 1～27, (1976)
- 3) 村山塑郎：弾性状態にある砂の構成式，土木学会論文報告集，236号，125～137，(1975)
- 4) 佐々恭二：斜面安定解析—II——主として標準砂使用室内実験に基づいて——，新砂防，90号，8～19，(1974)
- 5) Kyoji SASSA, Aritsune TAKEI : An analysis of slope stability—On the depth where slip surface is formed in a slope——, Memoirs of the College of Agriculture, Kyoto University, No. 108, 29～54, (1976)
- 6) Hardin, B. O. & Richart, F. E. : Elastic wave velocities in granular soils, Proc. ASCE, 89, SM 1, 33～65, (1963)
- 7) 佐々恭二，阪田大蔵：弾性波速度測定による $G_s = g_s(\sigma + \sigma')$ 関係について，第11回土質工学会講演集，407～410，(1976)
- 8) 佐々恭二，日浦啓全，小川清：新原位置せん断試験 PABIJAST とその試験結果について，第5回岩の力学国内シンポ講演集，205～210，(1977)
- 9) 松村和樹，佐々恭二，大手桂二：水因垂直応力 (Hydro-normal stress) について，第31回土木学会講演概要集，76～77，(1976)
- 10) 佐々恭二，阪田大蔵，日置象一郎：地下水面上昇及び土被り圧変化にともなう砂中の弾性定数の変化について，昭和51年土木学会関西支部講演概要集，(1976)

Résumé

When we consider a slope stability, it is quite important to know how the modulus of shearing elasticity (which prescribe the intensity and deformation of sand) is distributed at each depth or how it changes in presence of the ground-water level or the moisture of sand. Then (to examine about this problem with high accuracy) we repeated the SHEARING many times and made the ELASTIC CONDITION of sand—the condition under which particle arrangement never changes at its deformation—and proved the next thing by experiments. That is to say, at the same arrangement of particles, the relation between the normal stress and the modulus of shearing elasticity or the shearing strength give the essentially straight lines.

We also called the cohesive stress of the capillary water 'Hydro-normal Stress' (which

is adhered to the surface of sand particle and perform the same task as the normal stress in the case of shearing) and made an experiment under the conditions of the same arrangement of particles as a clue to elucidate the effect of this stress for the modulus of shearing elasticity or the shearing strength. As the result of this experiments, we proved the next thing. The modulus of shearing elasticity or the shearing strength decrease due to the reduction of the hydro-normal stress which reduce by the change of sand condition (non saturated state to saturated state).