

$$\rho(r, t) = e^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d^3 r' \phi(r' t') r^R(r, r'; t-t') \quad (5)$$

$$r^{12}(r, r'; t-t') = -i\theta(t-t') < [n(r), n(r')] >$$

で与えられる。2体の retarded Green 関数 r^R を、温度 Green 関数の解析接続としてもとめるといふ伝統的手法に従い、且つこれに Gor'kov decoupling の近似を施して、 r の温度表示として、

$$r(r, r'; i\omega_m) = \frac{1}{2} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_n} \text{tr} \{ \tau_3 g(r, r'; i\omega_n) \tau_3 g(r, r'; i\omega_n - i\omega_m) \} \quad (6)$$

(tr は Nambu spin space に関してとる)

をうる。(3)と(6)とから、density response function の periodic order parameter $\Delta(r)$ に関する摂動展開がえられる。以上のスキームで、periodic order parameter の超音波吸収に対する効果を考えてみたい。

L.N.Cooper, A.Houghton, H.J.Lee, Phys. Rev. 148 (66) 198

Ultrasonic Attenuation in the Strong-Coupling Superconductor — Transverse Wave —

黒 田 義 浩 (京大理・松原研)

外部から導入した超音波の影響下にある電子系に於ては、Thermal Phonon, Impurity 等による散乱は、格子系と共に動く「新しい座標系」に移つて考えれば、通常の場合と全く同じような摂動として取扱うことが出来る。⁽¹⁾⁽²⁾

ここでは、Thermal Phonon, Impurity 等による散乱を含めて、一般に Complex renormalization factor $Z(\omega)$, complex gap parameter $\phi(\omega)$ で記述される Superconducting system⁽³⁾ に於ける超音波(横波)吸収を取り扱うことにする。

今、Ultrasonic wave によつて生じた velocity field を $u(r, t) = u_0$

$\exp[i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)]$ とすると、「新しい座標系⁽²⁾」による系のハミルトニアン H は Nambu Notation を用いて、次のように表わされる。(但し、 $\mathbf{u}_0 \parallel z$ 軸, $\mathbf{q} \parallel x$ 軸とする)

$$H = H_0 + H_{el} + H_I$$

$$H_0 = \sum_p \epsilon_p \psi_p^+ \tau_3 \psi_p + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}, \lambda} \{ \pi_{\mathbf{q}\lambda}^* \pi_{\mathbf{q}\lambda} + \omega_{\mathbf{q}\lambda} Q_{\mathbf{q}\lambda}^* Q_{\mathbf{q}\lambda} \} +$$

$$+ \sum_{\substack{p, q \\ k, \lambda}} \frac{V_{\mathbf{q}-\mathbf{k}, \lambda}}{\sqrt{\Omega}} Q_{\mathbf{q}\lambda} \psi_{p+q, -k} \tau_3 \psi_p + \sum_{p, q} V_{im}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{R}_j} \psi_{p+q}^+ \tau_3 \psi_p$$

$$H_{el} = (e/mc) \sum_{p, q} [\mathbf{A}(\mathbf{q}) \cdot (\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q})] \psi_{p+q}^+ \psi_p$$

$$H_I = u \cdot h(\mathbf{q}, \omega_0) e^{i\omega_0 t} + u \cdot h(-\mathbf{q}, -\omega_0) e^{-i\omega_0 t}$$

$$h(\mathbf{q}, \omega_0) = (q/\omega_0) \tau_{xz}(\mathbf{q}) - m j_x(\mathbf{q})$$

$$\left[\begin{array}{l} \tau_{ij}(\mathbf{q}) = \sum_p (1/m) (\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q})_i (\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q})_j \psi_{p+q}^+ \tau_3 \psi_p \\ j_i(\mathbf{q}) = \sum_p (1/m) (\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{q})_i \psi_{p+q}^+ \psi_p \end{array} \right.$$

又、吸収係数 α^T は⁽⁴⁾ $\alpha^T = Q / \frac{1}{2} \rho_{ion} v_s u^2$

$$Q \equiv \frac{d}{dt} \langle H \rangle = (-i) \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \langle [\frac{\partial H_I}{\partial t}(t), H_I(t')] \rangle_R$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re} [i\omega_0 u^2 \langle [h(\mathbf{q}, \omega_0), h(-\mathbf{q}, -\omega_0)] \rangle_R(-\omega_0)]$$

(但し、 $\langle [] \rangle_R$ は、 $H_0 + H_{el}$ で記述される系に於ける Retarded Green's F_R とする)

ここで、 H_{el} を Random Phase Approx. で考慮すると⁽⁵⁾

$$\alpha^T = \text{Re} \left\{ \frac{\omega_0}{i\rho_{ion} v_s} \left[\langle [h, h] \rangle'_R(\omega_0) - \frac{\langle [h, j_x] \rangle'_R(\omega_0) \frac{4\pi e}{q^2} \langle [j_x, h] \rangle'_R(\omega_0)}{1 + \frac{4\pi e}{q^2} \langle [j_x, j_x] \rangle'_R(\omega_0)} \right] \right\}$$

研究会報告

(但し、 $\langle [\dots] \rangle'_R$ は、 H_0 で記述される系に於ける Retarded Green's F_n とする)

今、 $\omega_0 \ll \Delta_0$, $v_S \ll v_F$ を考慮して

$$\alpha^T = \text{Re} \left\{ \frac{\omega_0}{i \rho_{\text{ion}}} \left[\langle [\tau_{xz}, \tau_{xz}] \rangle'_R(\omega_0) - \frac{(\langle [\tau_{xz}, j_x] \rangle'_R(\omega_0))^2}{\langle [j_x, j_x] \rangle'_R(\omega_0)} \right] \right\}$$

ところで、 $\langle [A, B] \rangle'_R(\omega_0)$ を求めるには、それに対応する Thermal Λ^{F_n} Green's

$\langle\langle AB \rangle\rangle(i\omega_n)$ を求めて、Complex ω -plane の上半面で、解析接続すればよい。さて、夫々の Thermal Green's F_n は H_0 で記述される系の One Particle Green's F_n を求めるのと同程度の近似で次のようになる。

$$\begin{aligned} \langle\langle \tau_{xz} \tau_{xz} \rangle\rangle'(i\omega_n) = & T \sum_{n_1} \int d^3 p \left\{ -\frac{1}{m^2} \left(p - \frac{1}{2}q\right)_x^2 \left(p - \frac{1}{2}q\right)_z^2 \times \right. \\ & \left. \times \text{Sp} [\tau_3 \mathcal{G}(p-q, i\omega_n, -i\omega_n) \tau_3 \mathcal{G}(p, i\omega_n)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\langle \tau_{xz} j_x \rangle\rangle'(i\omega_n) = & T \sum_{n_1} \int d^3 p \left\{ -\frac{1}{m^2} \left(p - \frac{1}{2}q\right)_x^2 \left(p - \frac{1}{2}q\right)_z \times \right. \\ & \left. \times \text{Sp} [\mathcal{G}(p-q, i\omega_n, -i\omega_n) \tau_3 \mathcal{G}(p, i\omega_n)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle\langle j_x j_x \rangle\rangle'(i\omega_n) = & T \sum_{n_1} \int d^3 p \left\{ -\frac{1}{m^2} \left(p - \frac{1}{2}q\right)_x^2 \times \right. \\ & \left. \times \text{Sp} [\mathcal{G}(p-q, i\omega_n, -i\omega_n) \mathcal{G}(p, i\omega_n)] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ここで、} \mathcal{G}(p, i\omega_n) = \frac{zZ(z) + \epsilon(p) \cdot \tau_3 + \phi(z) \tau_1}{z^2 Z(z)^2 - \epsilon(p)^2 - \phi(z)^2} \Big|_{z=i\omega_n}$$

これらを解析接続した結果は、次の通りである。

$$\begin{aligned} \langle [\tau_{xz}, \tau_{xz}] \rangle'_R(\omega_0) = & \frac{\beta \omega_0}{2(2\pi)^2} \frac{p_0^4}{q} \int_0^\infty d\omega \text{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right) \cdot \left[1 + \frac{\omega^2 |Z(\omega)|^2 - |\phi(\omega)|^2}{|\omega^2 Z(\omega)^2 - \phi(\omega)^2|}\right] \times \\ & \times \alpha_0 \left[\frac{2}{3} - F(\alpha_0)\right] \end{aligned}$$

$$\langle [\tau_{xz} \tau_{xz}] \rangle'_R(\omega_0) = \frac{\beta \omega_0}{(2\pi)^2} \frac{p_0^3}{q} \int_0^\infty d\omega \text{sech}\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right) \cdot \text{Re}\left[\frac{\omega Z(\omega)}{\sqrt{r}}\right] \left[\frac{2}{3} - F(\alpha_0)\right] +$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\omega_0}{(2\pi)^2} \frac{p_0^3}{q} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right) \cdot \frac{\partial}{\partial\omega} \left[\frac{\omega Z(\omega)}{\sqrt{r^*}} \right] \cdot \left[\frac{2}{3} - F(\beta_0) \right] \\
\langle [j_x, j_x] \rangle_R'(\omega_0) &= \frac{\beta\omega_0}{2(2\pi)^2} \frac{p_0^2}{q} \int_0^\infty d\omega \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right) \left[1 + \frac{\omega^2 |Z(\omega)|^2 + |\phi(\omega)|^2}{|\omega^2 Z(\omega)^2 - \phi(\omega)^2|} \right] \left[\frac{-1}{\alpha_0} F(\alpha_0) \right] + \\
& + \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{p_0^2}{q} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tanh\left(\frac{1}{2}\beta\omega\right) \cdot \left[\frac{2\phi^{*2}}{r^*} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial\omega} \left(\frac{\phi^{*2}}{r^*} \right) \right] \left[-\frac{1}{\beta_0} F(\beta_0) \right]
\end{aligned}$$

ここで、 $\alpha_0 = \frac{2i}{v_q} \operatorname{Im}[Z \cdot (\omega^2 - A^2)^{\frac{1}{2}}]$, $r = \omega^2 Z(\omega)^2 - \phi(\omega)^2$, $\beta_0 = \frac{2}{v_q} \sqrt{r^*}$

$$F(z) = z^2 - \frac{1}{2} z(1-z^2) \ln\left(\frac{1-z}{-1-z}\right)$$

今、Impurity Scattering のみの場合を考えると、

$$Z_n = 1 + \frac{i}{2|\omega|\tau}, \quad \phi \equiv 0, \quad \text{より}$$

$$\alpha_n^T = \frac{Nm}{\rho_{\text{ion}} v_s \tau} [1 - g(q\ell)] \cdot g(q\ell)^{-1}$$

$$Z_s = 1 + \frac{1}{2\tau\sqrt{A^2 - \omega^2}} \quad \text{より、}$$

$$\alpha_s^T = \frac{Nm}{\rho_{\text{ion}} v_s \tau} [1 - g(q\ell)] \cdot 2f(A)$$

結局、 $\alpha_s/\alpha_n = g(q\ell) \cdot 2f(A)$

ここで、 $g(z) \equiv \frac{3}{2} z^{-3} [-z + (1+z^2)\tan^{-1}(z)]$

この結果は、仮説的に Quasi-particle Model を用いて導かれた Cleiborne-Morse の式⁽⁶⁾の justification になつていゝと思う。

Phonon による散乱の場合を含めて、ここで得られた結果の、より詳細な考察は、別の機会に改めて述べたいと思う。

Reference

- (1) E.I. Blount Phys. Rev. 114 418 (59)
- (2) T. Tsuneto Phys. Rev. 121 402 (61)

研究会報告

- (3) Y.Nambu Phys. Rev. 117 648 (60)
Y.Wada Phys. Rev. 135 A1481 (64)
D.J.Scalapino, J.R.Schrieffer, J.W.Wilkins
 Phys. Rev. 148 263 (66)
- (4) T.Tsuneto Rutgers University Report (64)
- (5) L.P.Kadanoff, I.I.Falko Phys. Rev. 136 A1170 (64)
K.Maki Phys. Rev. 148 370 (66)
- (6) L.T.Claiborne, R.W.Morse Phys. Rev. 136 A893 (64)