

符号 $(2,2)$ のユニタリ群の L 関数について

東大・理 (学振) 菅野 寿史

(Sugano Takashi)

符号 $(2,2)$ の *direct similitude unitary group* 上の正則尖点形式に付随する L 関数について、その解析接続・関数等式を示す。最近、Piatetski-Shapiro, Rallis [14] において、古典群上の保型形式の L 関数を調べるかなり一般的な方法が見い出された。それをこの場合に適用し、詳しく計算することによっても得られると思われる。しかしここでは、Hecke [5], Andrianov [1] で行われた Fourier 係数から作られる Dirichlet 級数を調べる手法の一般化である [21], [22] を用いて証明する。

§ 1. 設定・主結果

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d_K})$ を判別式 d_K の虚 2 次体、 $\mathcal{O}_K, \delta_K$ をそれぞれ K の整数環、共役差積 *ideal* とする。 $\mathbb{Q}$ 上の代数群 G を

$$G_{\mathbb{Q}} = \left\{ g \in GL_4(K) \mid {}^t \bar{g} \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix} g = \mu(g) \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{pmatrix}, \det g = \mu(g)^2 \right\}$$

で定義する。これは例えば Shimura [17] で、*direct similitude unitary group* とよばれているものである。 $G^{(1)}$ により $\mu(g)=1$ で定義される部分代数群をあらわす。素数 p に対し、 $U_p = G_F \cap GL_4(\mathcal{O}_{k,p})$ ($\mathcal{O}_{k,p} = \mathcal{O}_k \otimes \mathbb{Z}_p$) , $U_{A,f} = \prod_{p < \infty} U_p$ とおく。

G の実点の単位元成分 G_∞^+ は、 $I_{2,2}$ 型領域 $\mathcal{D} = \{Z \in M_2(\mathbb{C}) \mid (2i)^{-1}(Z - {}^t\bar{Z}) > 0\}$ に一次分数変換 $g \langle Z \rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ ($g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G_\infty^+, Z \in \mathcal{D}$) で作用する。 $J_1(g, Z) = CZ+D$, $J_2(g, Z) = \bar{C} {}^t Z + \bar{D}$ は、ともに $G_\infty^+ \times \mathcal{D}$ 上の正則保型因子であり、 $g \in G_\infty^+$ ゆえ $\det J_1(g, Z) = \det J_2(g, Z)$ が成立する。 ([19] (1.19))。 $Z_0 = i1_2$ の $G_\infty^{(1)}$ における固定化群を U_∞ と書く ($\cong S(U(2) \times U(2))$)。

$\ell = (\ell_1, \ell_2)$, $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2$ ($d_1, d_2 \geq 0$) に対し、 $GL_2(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C})$ の既約表現 $\rho = \rho_{\ell, d}$ を $\rho_{\ell, d}(g_1, g_2) = (\det g_1)^{\ell_1} \sigma_{d_1}(g_1) \otimes (\det g_2)^{\ell_2} \sigma_{d_2}(g_2)$ で定義し、表現空間を $V = V_{\ell, d}$ と書く。ここで σ_d は $GL_2(\mathbb{C})$ の d 次対称テンソル表現。 ρ は $u \in U_\infty$ に対し、 $\rho(u) = \rho(J_1(u, Z_0), J_2(u, Z_0))$ によって U_∞ の既約表現を定めるが、 V の内積 $\langle, \rangle$ をこれが *unitary* となるよう選んでおく。

このノートで扱う *cusp form* を定義しよう。

$$S(\rho_{\ell, d}, U_{A,f}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ F: G_A \rightarrow V \mid \begin{array}{l} \text{i) } \sim \text{iii) } \end{array} \right\}$$

- i) $F(\gamma x g u_\infty u_f) = \rho(u_\infty)^{-1} F(g) \quad \forall \gamma \in G_{\mathbb{Q}}, \quad \forall x \in \mathbb{Q}_A^\times, \\ \forall (u_\infty, u_f) \in U_\infty \times U_{A,f},$
 ii) $Z = g_\infty \langle Z_0 \rangle \in \mathcal{D}$, $g_f \in G_{A,f}$ のとき、
 $\mu(g_\infty)^{-(l_1+l_2+(d_1+d_2)/2)} \rho(J_1(g_\infty, Z_0), J_2(g_\infty, Z_0)) F(g_\infty g_f)$
 は、 $Z \propto g_f$ のみに依存し Z の関数としては正則、
 iii) cuspidal ; すなわち、 G の任意の proper parabolic subgroup の unipotent radical N に対し、
 $\int_{N_{\mathbb{Q}} \backslash N_A} F(n g) d n = 0 \quad \forall g \in G_A.$

この定義より、 $d_1 + d_2 = \text{odd}$ ならば $S(\rho; U_{A,f}) = \{0\}$ となる。従って以下 $d_1 + d_2 = \text{even}$ としてよい。また ℓ については $\ell_1 + \ell_2$ のみに依存する。

$G_p \times U_p$ の組で決まる Hecke 環 $\mathcal{H}_p$ が、右から convolution で $S(\rho; U_{A,f})$ に作用している。この作用は (Petersson 内積に関して) 可換正規で、 $S(\rho; U_{A,f})$ は $\mathcal{H}_{A,f} = \bigotimes_{p \leq \infty} \mathcal{H}_p$ (制限テンソル積) の同時固有関数からなる基底をもつ。そこで、 F が同時固有関数 : $F * \phi = \lambda_F(\phi) F \quad \text{for } \forall \phi \in \mathcal{H}_{A,f}$, とし、 F の L 関数 $L(F; \Delta)$ を

$$L(F; \Delta) = \prod_{p < \infty} L_p(F; \Delta) \quad \text{と定義する。}$$

$$\text{但し, } L_p(F; \Delta) = (1-p^{-2\Delta})^{-1} (1-p^{-2\Delta-2})^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_F(T(p^l)) p^{-(\Delta+2)l}$$

$$T(p^l) = \{ g \in G_p \cap M_4(\mathcal{O}_{K,p}) \mid \mu(g) \in p^l \mathbb{Z}_p^\times \} \in \mathcal{H}_p.$$

(これは、 $P \nmid d_K$ なら 6 次の、 $P \mid d_K$ なら 5 次の Euler 積である) この L 関数について、次の結果を得る。

Theorem $F \in S(\mathcal{P}_{\ell, d}; U_{A, f})$ が $\chi_{A, f}$ の同時固有関数であるとする。このとき、

$$\zeta(F; \lambda) = |d_K|^{\frac{\lambda}{2}} (2\pi)^{-3\lambda} \Gamma(\lambda + \ell_1 + \ell_2 + \frac{d_1 + d_2}{2} - 2) \Gamma(\lambda + 1 + \frac{d_1 + d_2}{2}) \\ \times \Gamma(\lambda + \frac{|d_1 - d_2|}{2}) L(F; \lambda)$$

は、高々 $\lambda = -1, 0, 1, 2$ に *simple pole* をもつ他は正則な関数として、全 λ 平面に解析接続され、関数等式

$$\zeta(F; \lambda) = \zeta(F; 1 - \lambda) \quad \text{をみたす。}$$

また、 $d_1 \neq d_2$ ならば *entire* であり、 $\lambda = -1, 2$ で *pole* をもつ可能性は $d_1 = d_2 = 0$ の場合にのみ生ずる。

Remark この L 関数は、 G の L 群 ${}^L G_{K/\mathbb{Q}} \simeq GO(6; \mathbb{C})$ の *natural representation* に対応するものである。

この Theorem は §6 で証明される。§2-§5 はそのための準備。§7, §8 では、[23] で考えた Maass space に関することについて述べる。

§2. 四元数環

$\mathbb{Q}$ 上の 4 次元 vector space $\mathcal{V} = \{X \in M_2(K) \mid {}^t \overline{X} = X\}$ を考え、 $\mathcal{V}$ 上の内積として $\text{tr}(XY)$ ($X, Y \in \mathcal{V}$) をとる。 $\mathcal{V}$ の lattice $\mathcal{L} = M_2(\mathcal{O}_K) \cap \mathcal{V}$ の dual lattice を $\mathcal{L}^*$

と書く。すなわち、

$$\mathcal{L}^* = \left\{ S = \begin{pmatrix} m & \alpha \\ \alpha & n \end{pmatrix} \mid m, n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \delta_K^{-1} \right\}.$$

$S \in \mathcal{V}$, $\det S \neq 0$ のとき、 $B(S)$ は cyclic algebra (K, ω_S) , $\omega_S^2 = -\det S$ をあらわす。これは四元数環で、その判別式 (分岐する素数の積) を $d(S)$ と書く。

$\mathbb{Q}$ 上の代数群 G^* を、 $G_{\mathbb{Q}}^* = \{ g \in GL_2(K) \mid \det g \in \mathbb{Q}^\times \}$ で定義し、これを $g \mapsto \tilde{g} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \det g \cdot {}^t \bar{g}^{-1} \end{pmatrix}$ によって、しばしば G の部分代数群ともみる。さて、 $S \in \mathcal{V}$, $\det S \neq 0$ のとき、 S の direct similitude unitary 群 $H(S)_{\mathbb{Q}} = \{ g \in G_{\mathbb{Q}}^* \mid {}^t \bar{g} S g = (\det g) S \}$ は、 $B(S)_{\mathbb{Q}}^*$ に同型であることは、良く知られている (eg. [17])。

$\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}^+ = \{ S \in \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \mid \det S > 0 \}$ に同値関係 $\sim$:

$S \sim S' \iff \exists l \in \mathbb{Q}^\times, \exists \gamma \in G_{\mathbb{Q}}^* \text{ s.t. } S' = l \cdot (\det \gamma)^{-1} \cdot {}^t \bar{\gamma} S \gamma,$
をいれる。

Lemma 1 $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}^+ / \sim$ の代表元 S をとって、次の形のものをとることが出来る。

$$S = \begin{pmatrix} 1 & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix} \in \mathcal{L}^*, \quad |d_K| \det S = \prod_{p < \infty} p^{v_p} d(S), \quad 0 \leq v_p \leq 1.$$

この Lemma の形の S を、reduced と呼ぶことにする。後に利用するために、 $B(S)$ の $M_2(K)$ への imbedding をひとつ次のように決めておく。 $S = \begin{pmatrix} 1 & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = b + \omega_S$ とし、 $\psi_S(\omega_1 u + \omega_2 v) = \begin{pmatrix} u & -c \bar{v} + b(u - \bar{u}) \\ v & \bar{u} + {}^t \bar{b}(b v) \end{pmatrix}$ とおく。

この写像により、同型 $B(S)^* \simeq H(S)$ が得られる。 ω_1, ω_2 を basis とする右 $\mathcal{O}_K$ -module $\mathcal{O}(S) = \omega_1 \mathcal{O}_K + \omega_2 \mathcal{O}_K$ は $B(S)$ の order となるが、容易にわかるように

$$\mathcal{O}(S)_p \text{ が } B(S)_p \text{ の maximal order} \iff \nu_p = 0.$$

以下、reduced な S をひとつ固定し、しばしば S を略す。

Lemma 2 次の coset 分解が成立する。

$$G_p^* = \bigsqcup_{m \geq 0} H_p \begin{pmatrix} 1 & \\ & p^m \end{pmatrix} U_p^* \left(\bigsqcup H_p \begin{pmatrix} \pi_p & \\ & p\pi_p^{-1} \end{pmatrix} U_p^* \right)$$

(disjoint), ここで $U_p^* = G_p^* \cap GL_4(\mathcal{O}_{K,p})$ で、右辺のカッコは pld_K か $\text{pld}(S)$ か $\nu_p = 0$ のときのみあらわれる (π_p は K_p の素元)。

$m \geq 0$ のとき、 $\mathcal{O}_p$ の sub-order $\mathcal{O}_{m,p}$ を $\omega_1 \mathcal{O}_{K,p} + \omega_2 p^m \mathcal{O}_{K,p}$ で定義。 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & p^{-m} \end{pmatrix} \psi_S(\mathcal{O}_{m,p}^*) \begin{pmatrix} 1 & \\ & p^m \end{pmatrix} \subset GL_2(\mathcal{O}_{K,p})$ である。

§3. Eisenstein series のための準備

$\mathbb{Q}$ 上の代数群 G' を、

$$G'_{\mathbb{Q}} = \left\{ g \in GL_2(B) \quad g^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g = \nu(g) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \nu(g) \in \mathbb{Q}^* \right\}$$

で定義する。ここで $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ に対し $g^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix}$ ($-$ は B の main involution)。定理は、この群上の Eisenstein series の性質に帰着して証明されるので、この群について少し調べておく。

次の埋め込みにより、 G' を G の部分代数群とみる。

$$\Psi_S: G' \hookrightarrow G$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & h_S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_S(\alpha) & \Psi_S(\beta) \\ \Psi_S(\gamma) & \Psi_S(\delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & h_S \end{pmatrix},$$

ここで、 $h_S = \begin{pmatrix} c & -b \\ -\bar{b} & 1 \end{pmatrix} \sqrt{d_K} \in GL_2(K)$ 。各 p に対し、 $\mu_p \geq 0$ を殆んど全ての p で $\mu_p = 0$ となるように選ぶ $\mu = (\mu_p)$ と書く。
 $M_{\mu_p, p} = \begin{pmatrix} 1 & \mu_p \end{pmatrix}$, $U'_{\mu_p, p} = \{g \in G'_p \mid \widetilde{M}_{\mu_p, p}^{-1} \Psi_S(g) \widetilde{M}_{\mu_p, p} \in U_p\}$ とする。
 これは、 $\{g \in G'_p \mid \nu(g) \in \mathbb{Z}_p^\times, g \in \begin{pmatrix} \sigma_{\mu_p, p} & \sigma_{\mu_p, p} \alpha_S^{-1} \\ \alpha_S \sigma_{\mu_p, p} & \sigma_{\mu_p, p} \end{pmatrix}\}$ と書かれる ($\alpha_S = \omega_S \sqrt{d_K}$)。簡単のため、 $U'_{\mu, A, f} = \prod_{p < \infty} U'_{\mu_p, p}$ とおく。

$\mathcal{D}' = \{z \in B_\infty \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \mid \text{tr } z > 0\}$ に、 G'_∞ の単位元成分が、(一次分数変換で)作用してゐる。 $G_\infty^{(1)} = \{g \in G'_\infty \mid \nu(g) = 1\}$ における $z_0 = N(\alpha_S)^{-1/2}$ の固定化群を U'_∞ であらわす。すなわち、 $U'_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & bz_0 \\ z_0^{-1}\bar{b} & a \end{pmatrix} \mid a\bar{a} + b\bar{b} = 1, \bar{a}b + \bar{b}a = 0 \right\} \cong SU(2)^2$ 。
 $M_\infty = \sqrt{\begin{pmatrix} c & -b \\ -\bar{b} & 1 \end{pmatrix}} N(\omega_S)^{-1/4}$ とおく。

$\widetilde{M}_\infty^{-1} \Psi_S(U'_\infty) \widetilde{M}_\infty \subset U_\infty$ であり、 $u_\infty = \begin{pmatrix} a & bz_0 \\ z_0^{-1}\bar{b} & a \end{pmatrix}$ に対し、

$$\begin{cases} J_1(\widetilde{M}_\infty^{-1} \Psi_S(u_\infty) \widetilde{M}_\infty, z_0) = M_\infty^{-1} \psi_S(a+b) M_\infty \\ J_2(\widetilde{M}_\infty^{-1} \Psi_S(u_\infty) \widetilde{M}_\infty, z_0) = \bar{M}_\infty^{-1} \psi_S(a-b) \bar{M}_\infty \end{cases},$$

が成立する。ゆえに、 ρ は $U'_\infty = SU(2) \times SU(2)$ の表現 $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ をみちびく、これを ρ'_S であらわそう。 $B_\infty^{(1)} = \{b \in B_\infty^\times \mid N(b) = 1\} \cong SU(2)$ の制限

$$\rho'_S(b) = \rho'_S\left(\begin{pmatrix} b & \\ & 1 \end{pmatrix}\right) = \rho\left(\begin{pmatrix} \psi_S(b) & \\ & t\overline{\psi_S(b)}^{-1} \end{pmatrix}\right) \quad \text{により、}$$

$B_\infty^{(1)}$ の表現が得られるが、Clebsch-Gordan のよく知られた定理

から、 $\rho'_S | B_\infty^{(1)} \cong \bigoplus_{\nu=0}^{\min(d_1, d_2)} \sigma_{d_1+d_2-2\nu}$ である。

Lemma 3 岩沢分解 $G'_A = P'_A U'_{0,A}$ が成立する。

== で、 $U'_{0,A} = U'_\infty \times U'_{0,A,f}$, $P' = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G' \right\}$ 。

Remark $\nu_p = 0$ なる p についての $G'_p = P'_p U'_{0,p}$ の成立は、 $U'_{0,p}$ が maximal lattice を stable にする subgroup であることから良く知られている (cf. Satake [15])。 $\nu_p = 1$, $p \nmid d(S)$ のときは、 $G'_p \cong \mathrm{GSp}(2, \mathbb{Q}_p)$, $O_{0,p} \cong \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ p* & * \end{pmatrix} \mid * \in \mathbb{Z}_p \right\}$ であり、 $U'_{0,p}$ は $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{Z}_p)$ と共役でない maximal compact subgroup となる。 $p \mid d(S)$, $\nu_p = 1$, $p \mid d_K$ のときは、(そしてこのときに限る) $U'_{0,p}$ は maximal ではない。

次節で用いられる Eisenstein series は、 $P'_A U'_{\mu,A}$ 上に support をもつ G'_A 上の関数を使って定義される。 $P'_A U'_{\mu,A}$ を特徴付けておく ($U'_{\mu,A} = U'_\infty \times U'_{\mu,A,f}$) 。

$$g = \begin{pmatrix} x_1 + \omega_S x_2 & (y_1 + \omega_S y_2) \alpha_S^{-1} \\ \bar{\alpha}_S (z_1 + \omega_S z_2) & w_1 + \omega_S w_2 \end{pmatrix} \in G'_p \quad \text{に対し,}$$

$$\kappa(g) = z_2 \bar{w}_1 + z_1 \bar{w}_2 \quad \text{とおく} \quad (\kappa(g) \in \mathbb{Q}_p) \quad .$$

Lemma 4 $g \in U'_{0,p}$ のとき、

$$g \in P'_p U'_{\mu,p} \iff \kappa(g) \in p^{\mu_p} \mathbb{Z}_p \quad .$$

§4. Eisenstein series

$\rho'_S | B_\infty^{(1)}$ の既約成分を ν ととり (σ_d, V_d) とする。
($d = d_1 + d_2 - 2\nu$, $V_d \subset V$ とみる)。 B_A^λ 上の保型形式の空間を、

$S(\sigma_d; \mathcal{O}_{\mu, A, f}^*) \stackrel{\text{def}}{=} \{ f: B_{\mathbb{Q}}^* \backslash B_A^* / \mathcal{O}_{\mu, A, f}^* \rightarrow V_d \mid f(bu_{\infty}) = \sigma_d(u_{\infty})^{-1} f(b) \}$
 と定義する。 $d = \text{odd}$ なら空間は潰れるから、以下 $d = \text{even}$ を
 仮定する。 B_A 上の $\text{End}(V_d)$ に値をとる Schwartz-Bruhat 関数
 $\varphi = \prod_v \varphi_v$ を次のようにえらぶ。

$$\begin{cases} \varphi_{\infty}(x) = \sigma_d(\bar{x}) e[iN(x)] & (\sigma_d(ru_{\infty}) = r^d \sigma_d(u_{\infty}), r \in \mathbb{R}, u_{\infty} \in B_{\infty}^{(d)}), \\ \varphi_p = \mathcal{O}_{\mu_p, p} \text{ の特性関数.} \end{cases}$$

$f \in S(\sigma_d; \mathcal{O}_{\mu, A, f}^*)$ の zeta 関数を、

$$(Z_{\varphi}(s)f)(h) = \int_{B_A^*} |N(\beta)|_A^{s+\frac{1}{2}} \varphi(\beta) f(h\beta^{-1}) d^{\times}\beta$$

で定義。 $f'(h) = f(h\alpha_{s, f}^{-1})$ ($\alpha_{s, f}$ は α_s の finite part) とおく。

Proposition (Jacquet-Langlands [6] §14) $Z_{\varphi}(s)f$ は、全
 s 平面に高々 $s = -1/2, 3/2$ の simple pole をもつ他は正則な
 関数として解析接続され、関数等式

$$Z_{\varphi}(s)f = (-1)^{d/2} C_0^{-s+1/2} Z_{\varphi}(1-s)f'$$

をみたす。ここで、 $C_0 = |d_K \det S| \prod_{p < \infty} p^{2\mu_p}$ 。また、 $d > 0$
 或いは $d = 0$ で f が定数関数と直交するならば、entire。

ρ_S を、 $\sigma_{d_1} \otimes \sigma_{d_2}$ と同一視し、 $B_A \oplus B_A$ 上の関数 $\Phi(x, y)$
 $= \Phi_{\infty}(x, y) \cdot \prod_{p < \infty} \Phi_p(x, y)$ を次のように定義しよう。

$$\begin{cases} \Phi_{\infty}(x, y) = \sigma_{d_1}(\overline{y+xz_0}) \otimes \sigma_{d_2}(\overline{y-xz_0}) e[i(N(y)+N(xz_0))], \\ \Phi_p = \alpha_S \mathcal{O}_{\mu_p, p} \oplus \mathcal{O}_{\mu_p, p} \text{ の特性関数.} \end{cases}$$

$S(\sigma_d; \mathcal{O}_{\mu, A, f}^*)$ の元 f で、 $\mu_p \geq 1$ なるすべての p に対し、
 $f * \mathcal{O}_{\mu_p-1, p}^* = 0$ を満たすものの全体を、 $S(\sigma_d; \mathcal{O}_{\mu, A, f}^*)^{(0)}$

であらねす。 $f \in S(\sigma_d; \mathcal{O}_{\mu, A, f}^{\times})^{(0)}$, $g \in G'_A$ に対し、

$$L_{\Phi}^f(g; \lambda) = |\nu(g)|_A^{d+1/2} \int_{B_A^{\times}} |N(\beta)|_A^{d+1/2} \Phi(\beta(0, 1)g) f(\beta^{-1}) d^{\times} \beta \text{ であら。}$$

Lemma 5

$$L_{\Phi}^f(g; \lambda) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{d_1+d_2+1}{2})}{\Gamma(\lambda + \frac{d_1+d_2-2\nu+1}{2})} \mathcal{P}_S(u(g)_{\infty})^{-1} |t(g)|_A^{d+1/2} Z_g(\lambda) f(\beta(g)) \\ \quad \text{if } g = \begin{pmatrix} t(g)\beta(g) & * \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix} u(g), u(g) \in U'_{\mu, A}, \\ 0 & \text{if } g \notin P'_A U'_{\mu, A}. \end{cases}$$

すなわち、 $L_{\Phi}^f(\cdot; \lambda)$ の support は $P'_A U'_{\mu, A}$ に入る。

そこで Eisenstein series $E^*(g, f; \lambda)$ を、

$$E^*(g, f; \lambda) = c_0^{\frac{\lambda}{2}} \zeta(2\lambda+1) \frac{\Gamma(\lambda + \frac{|d_1-d_2|+1}{2})}{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \sum_{\gamma \in P'_Q \backslash G'_Q} L_{\Phi}^f(\gamma g; \lambda+1)$$

で定義する。($\zeta(\lambda) = \pi^{-\lambda/2} \Gamma(\frac{\lambda}{2}) \zeta(\lambda)$)。

Proposition 1 $E^*(g, f; \lambda)$ は有理型関数として全 λ 平面上に解析接続され、関数等式 $E^*(g, f; \lambda) = E^*(g, f; -\lambda)$ をみたす。 $\lambda = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ で高々 simple pole をもつ他では正則で、 $\pm \frac{3}{2}$ での pole は $d_1 = d_2 = 0$ のときのみあこり得る。また、 $d_1 \neq d_2$ ならば entire。

証明は、Langlands による Eisenstein series の一般論に帰着される (cf. [10], [3], [4], [7])。しかし、上の具体的な関数等式を得るためには、かなりの計算を要する。たとえば、Weyl 群の元で "折り返した" とき、support が再び $P'_A U'_{\mu, A}$ に入ることもなくとも、 $f \in S(\sigma_d; \mathcal{O}_{\mu, A, f}^{\times})^{(0)}$ でなければ言えない。

証明を簡単にスケッチしておこう。まず一般論より、 $E^*(g, f; \lambda)$ は全 λ 平面に解析接続され、関数等式

$$E^*(g, f; \lambda) = E(g, \Phi'; -\lambda) \quad \text{が知られている。}$$

$$\begin{aligned} \text{そこで、} \quad E(g, \Phi'; \lambda) &= \sum_{\gamma \in P'_Q \backslash G'_Q} \Phi'(\gamma g) |t(\gamma g)|_A^{\lambda + \frac{3}{2}}, \\ \Phi'(g) |t(g)|_A^{-\lambda + \frac{3}{2}} &= c_0^{\lambda/2} \zeta(2\lambda+1) \frac{\Gamma(\lambda + \frac{|d_1 - d_2| + 1}{2})}{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})} \\ &\quad \times \int_{N'_A} L_{\Phi}^f(w_s^{-1} n g; \lambda+1) dn, \end{aligned}$$

$$N' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad w_s = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_s^{-1} \\ \alpha_s & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{vol}(N'_Q \backslash N'_A) = 1.$$

Φ' の定義にあられる積分

$$\int_{B_A^*} |N(\beta)|_A^{\lambda + 3/2} \int_{B_A} \Phi(\beta(0, 1) w_s^{-1} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_0) f(\alpha_s \beta, \alpha_s^{-1} \beta^{-1}) d^x \beta dy$$

($k_0 \in U'_{0,A}$) を少し調べねばならない。 $\beta \in B_p^*$, $k_0 \in U'_{0,p}$ のとき、 $\psi(\beta; k_0) = \{ y \in B_p^- \mid \beta(0, 1) w_s^{-1} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k_0 \in \alpha_s \mathcal{O}_{\mu_p, p} \oplus \mathcal{O}_{\mu_p, p} \}$ とおけば、上の積分の p -part は、

$$\int_{B_p^*} |N(\beta)|_p^{\lambda + \frac{3}{2}} \text{vol} \psi(\beta; k_0) f(\alpha_s \beta, \alpha_s^{-1} \beta^{-1}) d^x \beta \quad \text{である。}$$

Lemma 6

(i) $\mu_p \geq 1$ かつ $\pi(k_0) \notin p^{\mu_p} \mathbb{Z}_p$ のとき、

$$\text{vol} \psi(\varepsilon \beta; k_0) = \text{vol} \psi(\beta; k_0) \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{O}_{\mu_p-1, p}^*.$$

(ii) $\text{vol} \psi(\beta; 1) = |N(\beta)|_p^{-1} p^{-\mu_p + \ell(\beta)} \mathcal{G}_p(\beta)$, 　　ここで

$\ell(\beta)$ は、 $p^{-\ell(\beta)} \beta$ が $\mathbb{Z}_p$ -module $\mathcal{O}_{\mu_p, p}$ の primitive element となるように選んでおく。

この Lemma は、 $\text{vol} \psi(\beta; k_0)$ を explicit に求めることによ

$$\text{但し、 } C_0 = \begin{cases} U_P \operatorname{diag}(P, P, P, P) U_P & \text{if } P \nmid d_K, \\ U_P \operatorname{diag}(\pi, P\pi^{-1}, P\bar{\pi}^{-1}, \bar{\pi}) U_P & \text{if } P \mid d_K, \end{cases}$$

$$C_1 = U_P \operatorname{diag}(P, P, 1, 1) U_P, \quad C_2 = U_P \operatorname{diag}(P^2, P, 1, P) U_P, \quad \text{また} \\ K_P = \mathbb{Q}_P \oplus \mathbb{Q}_P \text{ のとき、 } \pi = (P, 1) \times L \quad C_3 = U_P \operatorname{diag}(P\pi, \bar{\pi}, \bar{\pi}^{-1}, \bar{\pi}) U_P, \\ C_4 = \bar{C}_3 \quad \text{とおいだ。}$$

$\mathcal{H}_P$ 係数の多項式 $P_P(T)$ を、

$$P_P(T) = \begin{cases} \{1 - C_1 P^{-2} T + (C_2 + (P^3 + P^2 - P + 1) C_0) P^{-3} T^2 - C_0 C_1 P^{-2} T^3 + C_0^2 T^4\} \\ \quad \times (1 - C_0 T^2) & \text{if } \left(\frac{K}{P}\right) = -1, \\ \{1 - C_1 P^{-2} T + (C_2 + (P^2 + P + 1) C_0) P^{-3} T^2 - C_0 (C_3 + C_4 + 2C_1) P^{-3} T^3 \\ \quad + C_0 (C_2 + (P^2 + P + 1) C_0) P^{-3} T^4 - C_1 C_0^2 P^{-2} T^5 + C_0^3 T^6\} & \text{if } \left(\frac{K}{P}\right) = 1, \\ \{1 - (C_1 - (P^2 - 1) C_0) P^{-2} T + (C_2 - (P - 1) C_0 C_1 + (P^3 + P^2 - P + 1) C_0^2) P^{-3} T^2 \\ \quad - (C_1 - (P^2 - 1) C_0) C_0^2 P^{-2} T^3 + C_0^4 T^4\} (1 - C_0 T) & \text{if } \left(\frac{K}{P}\right) = 0, \end{cases}$$

で定義する。 $\mathcal{H}_P$ の 1 次表現 λ に対し、local L function を

$$L_P(\lambda; \lambda) = \left\{ \lambda(P_P(T)) \mid T = P^{-1} \right\}^{-1} \quad \text{で導入しておく。}$$

Remark G は $\mathbb{Q}$ 上の quasi-split 群で、 K で split する。

[9] で導入された L 群は、今の場合

$${}^L G_{K/\mathbb{Q}} = {}^L G^0 \rtimes \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \operatorname{GO}(6; \mathbb{C}) = \{g \in \operatorname{GL}_6(\mathbb{C}) \mid {}^t g g \in \mathbb{C}^\times\}.$$

上の local factor は、 ($P \nmid d_K$ のときは) この natural representation ${}^L G_{K/\mathbb{Q}} \hookrightarrow \operatorname{GL}_6(\mathbb{C})$ に対応している。

(generalized) local Whittaker function と言ふべきものを考えよう。
 $\mu = \mu_P \geq 0$ をとり、

$$\mathcal{W}_\mu = \{W: \widetilde{\mathcal{O}}_{\mu, P}^* \backslash G_P / U_P \rightarrow \mathbb{C} \mid W\left(\begin{pmatrix} 1 & X \\ & 1 \end{pmatrix} g\right) = \chi(hSX) W(g) \quad \forall X \in \mathcal{V}_P^*\}$$

とおく。ここで χ は $\mathbb{Q}_p$ の conductor $\mathbb{Z}_p$ の character。この空間には右から $\mathcal{H}_p$ が、左から $\mathcal{H}'_p = \mathcal{H}(B_p^\times, \mathcal{O}_{\mu,p}^\times)$ が convolution で作用している。 $W \in \mathcal{W}_\mu$, $m \geq 0$, $l \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$W_{m,l}(\hbar) = W\left(\left(\begin{smallmatrix} p^{m+l} & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right) \overline{\hbar\left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & p^m \end{smallmatrix}\right)}\right) \quad (\hbar \in B_p^\times) \quad \text{とおく。}$$

以下 $W \in \mathcal{W}_\mu$ について、次の状況を考える。

$$(*) \quad \begin{cases} W * \phi = \chi(\phi) W & \text{for } \forall \phi \in \mathcal{H}_p, \quad W_{m,l} = 0 \text{ for } 0 \leq m \leq \mu-1, \\ W_{\mu,l}(1) \neq 0 \text{ for some } l, \quad (\mathcal{O}_{\mu-1,p}^\times) * W = \sigma_p W & \text{if } \mu \geq 1. \end{cases}$$

Remark pld_k のときのみあらわれる Lemma 2 の例外 case についても、 $(W * c_0)_{0,l}(\hbar) = W\left(\left(\begin{smallmatrix} p^l & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right) \overline{\hbar\left(\begin{smallmatrix} \pi & \\ & p\pi^{-1} \end{smallmatrix}\right)}\right)$ であることに注意すれば、全ての場合について、 W は $W_{m,l}$ 達で完全に定まる。また、定義より $l < 0 \Rightarrow W_{m,l} = 0$ 。

Proposition 2 $(*)$ の状況下で、次の等式が成立。

$$(i) \quad \sigma_p = 0 \quad \text{if } \mu \geq 1,$$

$$(ii) \quad \int_{B_p^\times} \int_{\mathbb{Q}_p^\times} W\left(\left(\begin{smallmatrix} t & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right) \overline{\hbar\left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & p^\mu \end{smallmatrix}\right)}\right) |t|_p^{\lambda-2} \varphi_p(\hbar) |N(\hbar)|_p^{\lambda+1} d^\times \hbar d^\times t \\ = p^{-\mu(\lambda-2)} (1-p^{-2\lambda}) L_p(\lambda; \lambda) W\left(\left(\begin{smallmatrix} p^\mu & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right) \overline{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & p^\mu \end{smallmatrix}\right)}\right),$$

ここで、 φ_p は §4 同様 $\mathcal{O}_{\mu,p}$ の特性関数。また Haar meas. はそれぞれ $\text{vol}(\mathcal{O}_{\mu,p}^\times) = 1$, $\text{vol}(\mathbb{Z}_p^\times) = 1$ と正規化しておく。

証明はまず、 $\mathcal{H}_p$ の W の作用を $W_{m,l}$ の言葉で書き、漸化式を作る。これを見れば、(i) がわかる。 $\left\{ \sum_{l=0}^{\infty} W_{\mu,l}(\hbar) p^{2-\lambda} l \right\} \times P_p(p^\lambda)$ を、 p^λ の多項式として具体的に求める。 $\mathcal{H}'$ の構造, (i), 条件 (*) を使い $B_p^\times$ 上の積分が計算される。

§6. 定理の証明

$S(\rho_{\ell,d}; U_{A,f})$ の元 $F (\neq 0)$ を、 $\chi_{A,f}$ 同時固有関数とする。

F の Fourier 係数を

$$F_S(g) = \int_{\mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \setminus \mathcal{V}_A} F\left(\begin{pmatrix} 1 & X \\ & 1 \end{pmatrix} g\right) \chi(-t_0 S X) dX \quad \text{で定義する。}$$

ここで、 $S \in \mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$, $g \in G_A$, $\chi = \prod_v \chi_v \in (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_A)^{\wedge}$, $\chi_v(x) = \mathbb{Q}[x]$ 。

正則性より $S \notin \mathcal{V}_{\mathbb{Q}}^+ \Rightarrow F_S = 0$ である。従って、Lemma 1 より G_A 上の関数として $F_S \neq 0$ なる、reduced な S が存在する。この S を今後固定しておく。 G_A の岩沢分解より、 $\mathbb{Q}_A^{\times}$ の元 t と $G_A^{\times}$ の元 g が存在し、 $F_S\left(\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} g\right) \neq 0$ をみたく。

Lemma 2 から各 p に対し $m_p \geq 0$ (殆んどすべての p で $m_p = 0$) と、 $t \in \mathbb{Q}_A^{\times}$ が存在して、 H_A 上の関数として $F_S\left(\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \widehat{h}\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & p^{m_p} \end{pmatrix}\right)\right) \neq 0$ (前節の Remark を参照)。このような (m_p) のうち、極小なものを選びとり、 $\mu = (\mu_p)$ と書くことにする。 $M_{\mu,p,p} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & p^{m_p} \end{pmatrix}$, M_{∞} を §3 で定められたものとし、 $M_{\mu,A} = M_{\infty} M_{\mu,A,f}$, $M_{\mu,A,f} = \prod_{p \in \mathbb{P}} M_{\mu,p,p}$ と略記する。 $F_S\left(\begin{pmatrix} t & \\ & 1 \end{pmatrix} \widehat{h} M_{\mu,A}\right)$ は H_A 上の関数として、左 $H_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_A^{\times}$, 右 $\mathcal{O}_{\mu,A,f}^{\times}$ 不変で、 $H_{\infty}^{\vee} = B_{\infty}^{(1)}$ の右からの作用で表現 ρ_S' があらわれる。この関数に於てあらわれる ρ_S' の既約成分のひとつを、 σ_d ($d = d_1 + d_2 - 2\nu$) とする。 $f \in S(\sigma_d; \mathcal{O}_{\mu,A,f}^{\times})$ のとき、新たな G_A 上の関数を、

$$W_f(g) = W_{F,S,f}(g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{B_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_A^{\times} \setminus B_A^{\times}} \langle f(h), F_S(\widehat{h} g) \rangle_{\vee} dh \quad \text{と定義。}$$

$S(\sigma; \mathcal{O}_{\mu, A, f}^x)$ は $\mu_p \geq 1$ なる p について、 $\mathcal{O}_{\mu_{p-1}, p}^x$ の特性関数からなる基底をもち、 $W_f((\begin{smallmatrix} t & \\ & 1 \end{smallmatrix}) \widetilde{M}_{\mu, A})$ はこの空間における、Petersson 内積に他ならないから、 $f * \mathcal{O}_{\mu_{p-1}, p}^x = \sigma_p f$, $t \in \mathbb{Q}_A^x$ で、 $W_f((\begin{smallmatrix} t & \\ & 1 \end{smallmatrix}) \widetilde{M}_{\mu, A}) \neq 0$ としてよい。

W_f は global Whittaker function と言うべきものである。 F が Hecke eigen であること、 μ の極小性、及び $W_f((\begin{smallmatrix} t & \\ & 1 \end{smallmatrix}) \widetilde{M}_{\mu, A}) \neq 0$ より、 W_f は G_p 上の関数として §5 (*) の条件をみたす $\mathcal{W}_{\mu_p}$ の元である。従って、Proposition 2 (i) より $\sigma_p = 0$ 。すなわち f は、必然的に $S(\sigma; \mathcal{O}_{\mu, A, f}^x)^{(0)}$ に入る。

この f をもとに、Eisenstein series を定義。

$$Z^*(F, S, f; \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A} \langle E^*(g, f; \lambda - \frac{1}{2}), F(\Psi_S(g) \widetilde{M}_{\mu, A}) \rangle_V dg$$

とおく。右辺は Proposition 1 により解析接続・関数等式がわかっている。これを変形して $\zeta(F; \lambda)$ に (定数倍を除き) 一致することを示せば良い。定義より、

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= c_0^{\frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{2})} \zeta(2\lambda) \Gamma(\lambda + \frac{|d_1 - d_2|}{2}) / \Gamma(\lambda) \\ &\quad \times \int_{G_{\mathbb{Q}} \backslash G_A} \sum_{\gamma \in P'_{\mathbb{Q}} \backslash G'_{\mathbb{Q}}} \langle L_{\Phi}^f(\gamma g; \lambda + \frac{1}{2}), F(\Psi_S(g) \widetilde{M}_{\mu, A}) \rangle_V dg. \end{aligned}$$

Lemma 5 を使い、

$$\begin{aligned} \text{積分} &= \int_{P'_{\mathbb{Q}} \backslash G_A} \langle L_{\Phi}^f(g; \lambda + \frac{1}{2}), F(\Psi_S(g) \widetilde{M}_{\mu, A}) \rangle_V dg \\ &= \int_{P'_{\mathbb{Q}} \backslash P_A} \langle L_{\Phi}^f(p; \lambda + \frac{1}{2}), F(\Psi_S(p) \widetilde{M}_{\mu, A}) \rangle_V dp \end{aligned}$$

を知る。 F が cusp form であることより、

$$\int_{B_{\mathbb{Q}} \backslash B_A} F(\Psi_S((\begin{smallmatrix} x & \\ & 1 \end{smallmatrix}) g)) dx = \sum_{m \in \mathbb{Q}^x} F_S((\begin{smallmatrix} m & \\ & 1 \end{smallmatrix}) g) .$$

$$\begin{aligned}
\therefore Z^*(F, S, f; \lambda) &= c_0^{\frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{2})} \pi^{-\lambda} \Gamma(\lambda) \zeta(2\lambda) \frac{\Gamma(\lambda + \frac{|d_1 - d_2|}{2}) \Gamma(\lambda + \frac{d_1 + d_2}{2} + 1)}{\Gamma(\lambda) \Gamma(\lambda + \frac{d_1 + d_2 - 2\nu}{2} + 1)} \\
&\quad \times \int_{B_0^* \backslash B_A^*} \int_{\mathbb{Q}_A^* \backslash B_A^*} \int_{B^* \mathbb{Q}_A^* \backslash B_A^*} |t|_A^{\lambda-2} \langle Z_f(\lambda + \frac{1}{2}) f(b), F(\Psi_S((\begin{smallmatrix} 1 & \\ & 1 \end{smallmatrix}) \begin{smallmatrix} t_1 \\ 1 \end{smallmatrix})) \widetilde{M}_{\mu, A}) \rangle_V \\
&\quad d^x t d^x \tau d^x b \\
&= (\text{const}) c_0^{\frac{1}{2}\lambda} \pi^{-\lambda} \zeta(2\lambda) \Gamma(\lambda + \frac{|d_1 - d_2|}{2}) \Gamma(\lambda + \frac{d_1 + d_2}{2} + 1) / \Gamma(\lambda + \frac{d_1 + d_2 - 2\nu}{2} + 1) \\
&\quad \times \int_{\mathbb{Q}_A^*} \int_{B^* \mathbb{Q}_A^* \backslash B_A^*} |t|_A^{\lambda-2} \int_{B_A^*} |N(\beta)|_A^{\lambda+1} \langle \varphi(\beta) f(b\beta^{-1}), F_S((\begin{smallmatrix} t_1 \\ 1 \end{smallmatrix})) \widetilde{M}_{\mu, A}) \rangle_V \\
&\quad d^x \beta d^x t d^x b.
\end{aligned}$$

と 3 つ、

$$\int_{B_\infty^*} \varphi_\infty(\beta) |N(\beta)|_\infty^{\lambda+1} f(b\beta^{-1}) d^x \beta = \pi^2 \Gamma(\lambda + 1 + \frac{d}{2}) / (2\pi)^{\lambda+1 + \frac{d}{2}} f(b),$$

F の正則性より、

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^x} F_S((\begin{smallmatrix} t_1 \\ 1 \end{smallmatrix})) \widetilde{M}_{\mu, A}) |t_\infty|^{\lambda-2} d^x t_\infty &= (4\pi \sqrt{\det S})^{-(\lambda + l_1 + l_2 + \frac{d_1 + d_2}{2} - 2)} \\
&\quad \times \Gamma(\lambda + l_1 + l_2 + \frac{d_1 + d_2}{2} - 2) e[-2i \det S] F_S((\begin{smallmatrix} t_1 \\ 1 \end{smallmatrix})) \widetilde{M}_{\mu, A}).
\end{aligned}$$

従、2、

$$\begin{aligned}
Z^*(F, S, f; \lambda) &= (\text{const}) c_0^{\frac{1}{2}\lambda} \pi^{-\lambda} \zeta(2\lambda) \Gamma(\lambda + \frac{|d_1 - d_2|}{2}) \Gamma(\lambda + \frac{d_1 + d_2}{2} + 1) \\
&\quad \times \Gamma(\lambda + l_1 + l_2 + \frac{d_1 + d_2}{2} - 2) (2\pi)^{-\lambda} (4\pi \sqrt{\det S})^{-\lambda} \\
&\quad \times \int_{B_{A,f}^* \backslash \mathbb{Q}_{A,f}^*} |t|_{A,f}^{\lambda-2} |N(\beta)|_A^{\lambda+1} \varphi_{A,f}(\beta) \int_{B^* \mathbb{Q}_A^* \backslash B_A^*} \\
&\quad \langle f(b\beta^{-1}), F_S((\begin{smallmatrix} t_1 \\ 1 \end{smallmatrix})) \widetilde{M}_{\mu, A}) \rangle_V d^x b d^x \beta d^x t.
\end{aligned}$$

最後の $B^* \mathbb{Q}_A^* \backslash B_A^*$ 上の積分は、 $W_f((\begin{smallmatrix} t_1 \\ 1 \end{smallmatrix})) \widetilde{M}_{\mu, A})$ となるから、

Proposition 2 を用いて

$$Z^*(F, S, f; \lambda) = (\text{const}) \times \zeta(F; \lambda) \quad \text{を知る。}$$

以上で、§1 の定理は完全に証明された。

§7. Jacobi form の L 関数について

標題とは直接関係ないが、次節で Maass space に対し応用するので、簡単な Jacobi form の L 関数を調べておく。ここで言う Jacobi form は、Siegel modular form の様々な partial Fourier 展開にあらわれるのと同じ変換公式をみたす保型形式を指し、real unitary 表現論の立場から Satake [16] で、また (non-reductive) 代数群上の保型形式の立場から Shintani [20] により考察されている (近年、多くの人々によって取り扱われている)。この意味での Jacobi form の一般的設定は、Murase [11] で述べられると思うが、簡単な場合に、群・保型形式・Hecke 環の定義を [20] から引用しておく。

$$G_1 = SL_2, \quad H_{1,m} = \{(u, v, z) \mid u, v \in \mathbb{Q}^m, z = {}^t z \in M_m(\mathbb{Q})\},$$

$$\underline{G} = G_{1,m} = H_{1,m} \rtimes G_1$$

$$H_{1,m} \text{ の演算: } (u, v, z)(u', v', z') = (u+u', v+v', z+z'+u {}^t v' + v {}^t u')$$

$$G_1 \text{ の作用: } g^{-1}(u, v, z)g = (u', v', z')$$

$$= {}^t g \cdot (u', v') = (u, v)g, \quad z' = z - v {}^t u + v {}^t u'$$

$$\underline{G}_{\mathbb{Q}}(u, v, z) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 1_{m+1} & \begin{smallmatrix} z & v \\ {}^t v & 0 \end{smallmatrix} \\ \hline & 1_{m+1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1_m & u \\ \hline & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1_m & a \\ \hline & c \end{array} \begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix} \right)$$

$$\in S_p(m+1, \mathbb{Q}). \quad Z_m = \{z \mid {}^t z = z \in M_m(\mathbb{Q})\} \quad \text{は、} H_{1,m} \text{ および } G_{1,m}$$

$$\text{の中心である。} \quad \underline{U}_p = \underline{G}_p \cap S_p(m+1, \mathbb{Z}_p), \quad \underline{U}_{A,f} = \prod_{p < \infty} \underline{U}_p \quad \text{とおく。}$$

$$\underline{G}_{\infty} \text{ は、} \mathcal{D}_{1,m} = \{(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Im} z > 0\} \quad \text{に、}$$

$$(u, v, z)g \langle z, w \rangle = (g \langle z \rangle, \frac{1}{cz+d}w + u g \langle z \rangle + v)$$

と作用している。正定値半整数対称行列 $S \in Z_m$ と自然数 l に
 対し、 $J_{S,l}((u,v,z)g,(z,w)) = (cz+d)^l e[-hSg + \frac{1}{cz+d}(e^t w - 2^t u)w$
 $-g\langle z \rangle^t u S u]$ と $\mathbb{G}_m \times \mathcal{D}_{1,m}$ 上の正則保型因子を定義する。

$$\mathcal{G}_{S,l}(\underline{U}_{A,f}) = \{ f: \underline{G} \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{i) } \sim \text{iii) } \}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } f(\gamma g g u_f) = \chi(h S g) f(g) \quad \forall \gamma \in \underline{G}_{\mathbb{Q}}, \forall g \in Z_{m,A}, \forall u_f \in \underline{U}_{A,f} \\ \text{ii) } f(g_{\infty}) J_{S,l}(g_{\infty}, Z_0) \text{ は } Z = g_{\infty} \langle Z_0 \rangle \text{ のみに depend し, } \mathcal{D}_{1,m} \\ \text{上の正則関数} \\ \text{iii) cuspidal} \end{array} \right.$$

この空間の元を $G_{1,m}$ 上の、weight l , index S の尖点形式
 (Jacobi cusp form) と呼ぶ。テータ関数を介して、 m の偶奇に
 従い整数・半整数 weight の (vector 値) cusp form とみなすことも
 できる。最後に (local) Hecke algebra $\mathcal{H}_{S,p}$ を、

$$\mathcal{H}_{S,p} = \{ \phi: \underline{U}_p \backslash \underline{G}_p / \underline{U}_p \rightarrow \mathbb{C} \mid \phi(gg) = \chi(h S g) \phi(g), Z_{m,p} \backslash \text{supp } \phi = \text{compact} \}$$

で定義する (積は $Z_{m,p} \backslash \underline{G}_p$ 上の convolution)。

$$V = \mathbb{Q}^m \supset L = \mathbb{Z}^m \text{ とおく。 } V_p = V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \text{ の lattice } L' \text{ は、}$$

${}^t x S x \in \mathbb{Z}_p$ for $\forall x \in L'$ をみたす時、(S に関し) $\mathbb{Z}_p$ integral
 であるという。以下、 S は、すべての p について $L_p = L \otimes \mathbb{Z}_p$

が maximal $\mathbb{Z}_p$ -integral であるものと仮定する。 $\mathcal{W}_p(S)$ を、

S の $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt index, $n_{0,p}(S) = m - 2\mathcal{W}_p(S)$ とおく。また、

$$L' = \{ x \in V_p \mid {}^t S x \in L_p, {}^t x S x \in p^{-1} \mathbb{Z}_p \}$$

は V_p の lattice であり、 L'/L_p は $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ 上の vector 空間であるが、この次元を $\partial_p(S)$ とおく。

$$\text{Lemma 7} \quad \mathcal{H}_{S,P} \cong \begin{cases} \mathbb{C}[X] & \dots\dots \partial_P(S)=0, \\ \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C} & \dots\dots \partial_P(S)=1, \\ \mathbb{C}[X] \oplus \mathbb{C}^2 \oplus M_2(\mathbb{C})^{\frac{P-1}{2}} & \dots\dots \partial_P(S)=2, P:\text{odd}, \\ \mathbb{C}[X] \oplus M_2(\mathbb{C})^{\frac{P}{2}} & \dots\dots \partial_P(S)=2, P=2. \end{cases}$$

$\partial_P(S)=0$ の場合は, [20] で (より一般的設定 $G_{m,m}$ で) 証明されている。他の場合についても、同様の議論をもとに証明できる。

この環は、我々の目的のためには、やや大きすぎるので少し制限しよう。 $\varphi_{0,P}, \varphi_{1,P} \in \mathcal{H}_{S,P}$ を、

$$\begin{cases} \varphi_{0,P}(0,y,0) = P^{-\partial_P(S)} & \text{if } y \in L' \quad \text{かつ } \text{supp } \varphi_{0,P} = Z_{m,P} \bigcup_P \{(0,y,0) | y \in L'\} \bigcup_P, \\ \varphi_{1,P}(P, P^{-1}) = 1 & \text{かつ } \text{supp } \varphi_{1,P} = Z_{m,P} \bigcup_P (P, P^{-1}) \bigcup_P, \end{cases}$$

と定義し、この2元で生成される部分環を $\mathcal{H}'_{S,P}$ とおく。 $\varphi_{0,P}$ と $\varphi_{1,P}$ は可換で、 $\varphi_{0,P} = 1$ (if $\partial_P(S)=0$), $\varphi_{0,P}^2 = 1$ (if $\partial_P(S)=1$), $\varphi_{0,P}^2 = (P-1)/P \varphi_{0,P} + 1/P$ (if $\partial_P(S)=2$) をみたす。 $\mathcal{H}'_{S,P}$ の1次表現 λ_P に対し、

$$P_{S,P}(\lambda_P; T) = \left\{ 1 - (\lambda_P(\varphi_{1,P}) P^{-\left(1+\frac{m}{2}\right)} - P^{-\frac{n_0(S)}{2} + \partial_P(S)} + P^{-1+\frac{n_{0,P}(S)}{2}}) T + \lambda_P(\varphi_{0,P})^{-1} T^2 \right\} \\ \times \begin{cases} 1 - \chi_{S,P}(P) T & m = \text{even} \\ 1 & m = \text{odd} \end{cases} \quad \text{とおく。}$$

== 7 $\chi_S = \prod_v \chi_{S,v}$ は、 $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{\frac{m}{2}} \det S})$ に対応する Dirichlet 指標。 S にのみ依存する多項式 $B_{S,P}(T)$ を次の様に定義。

$$B_{S,P}(T) = \begin{cases} 1 & (n_{0,P}(S), \partial_P(S)) = (0,0), (1,0), (2,0), (2,1) \\ 1+T & = (1,1) \\ 1-T & = (3,1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+T)(1-T) & = (3,2) \\ (1+P^{\frac{1}{2}}T)(1+P^{-\frac{1}{2}}T) & = (2,2) \\ (1-P^{\frac{1}{2}}T)(1-P^{-\frac{1}{2}}T) & = (4,2) \end{cases}$$

local L 関数を、

$$L_{S,P}(\lambda_P; \lambda) = B_{S,P}(P^{\frac{1}{2}} - \lambda) \times P_{S,P}(\lambda_P; P^{-\lambda})^{-1} \quad \text{で定義する。}$$

この定義は $\alpha_P(S) = 0$ のとき [20] で与えられているものに一致。

$\mathcal{G}_{S,\ell}(\mathbb{Q}_{A,f})$ の π f が、 $\mathcal{H}'_{A,f} = \otimes \mathcal{H}'_{S,P}$ の同時固有関数:

$$f * \phi = \lambda_f(\phi) f \quad \text{for } \forall \phi \in \mathcal{H}'_{A,f} \quad \text{のとき,}$$

$$L(f; \lambda) \equiv \prod_{P < \infty} L_{S,P}(\lambda_f; \lambda)$$

$$\xi(f; \lambda) \equiv L(f; \lambda) \times \begin{cases} 2^{-\lambda} \pi^{-\frac{3}{2}\lambda} (\det 2S)^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma(\lambda + \ell - \frac{m+2}{2}) \\ \quad \times \begin{cases} \Gamma(\frac{\lambda+1}{2}) & m \equiv 0 \pmod{4} \\ \Gamma(\frac{\lambda}{2}) & m \equiv 2 \pmod{4} \end{cases} & m: \text{偶} \\ (2\pi)^{-\lambda} (2^{-1} \det 2S)^{\frac{\lambda}{2}} \Gamma(\lambda + \ell - \frac{m+2}{2}) & m: \text{奇} \end{cases}$$

とおくとき、次の結果が成立する。

Proposition 3 $\ell > \frac{m+3}{2}$ とする。 $\xi(f; \lambda)$ は高々 $\lambda = 0, 1$

に simple pole をもつ他は正則な関数として、全 λ 平面に解析接続され、関数等式 $\xi(f; \lambda) = \varepsilon_m \xi(f; 1-\lambda)$ をみたす。

ここで ε_m は $m \equiv 1 \text{ or } 3 \pmod{8}$ のとき -1 , 他 m のときは 1 。

更に $m \not\equiv 6 \pmod{8}$ ならば、entire。

証明は、[20] で与えられている積分表示 (を $\alpha_P(S) \geq 1$ なる P を込めた形) から出発する。 $G_{1,m+1}$ の Eisenstein series の性質に帰着されるが、これは全 z の Fourier 係数に対し解析接続・関数等式を求めることで処理される。解析的部分は、

Shimura [18] の議論に従うが、関数等式を求めるための *local part* の計算はかなりめんどう。

例 1 $m=0$. このとき $\mathcal{O}_\ell(\underline{U}_{A,f})$ は、 $SL_2(\mathbb{Z})$ に関する weight ℓ の cusp form に他ならない。 $\xi(f; \lambda)$ は、 f を GL_2 の保型形式とみれば、[18] で扱われている $L(GL_2)^0 = GL_2(\mathbb{C})$ の 2 次対称テンソル表現に対応する L 関数である。
(SL_2 上の保型形式とみるなら $L(SL_2)^0 = SO(3; \mathbb{C})$ の natural representation と対応する)。

例 2 $m=1, S=1$ とする。これは Andrianov [2] で扱われている本来の Maass space と対応する空間である。 $F(f)$ に対応する 2 次 Siegel cusp form を、 $\xi(F(f); \lambda)$ でその L 関数をあらわせば、

$$\xi(F(f); \lambda) = (\text{const}) \times (\lambda - \frac{1}{2}) \xi(\lambda - \frac{1}{2}) \xi(\lambda + \frac{1}{2}) \xi(f; \lambda)$$

が成立する。また、 $\xi(f; \frac{3}{2}) \neq 0$ もわかる (cf. Oda [13])。

§8. ある部分空間

$S(\rho_{\ell,d}; U_{A,f})$ の部分空間 $S(\rho_{\ell,d}; U_{A,f})'$ を、

$$S(\rho_{\ell,d}; U_{A,f})' = \left\{ F \in S(\rho_{\ell,d}; U_{A,f}) \mid F_S(\hat{h}g) = F_S(g) \begin{array}{l} \forall h \in H(S)_A \\ \forall S \in \mathcal{V}_{\mathbb{Q}} \end{array} \right\}$$

と定義する。この空間は、明らかに、 $\mathcal{H}_{A,f}$ -stable であり、 $d_1 \neq d_2$ ならば潰れる (これは、 $\rho'_S | B_{\mathbb{Q}}^{\infty}$ が単位表現を含まない

ことによる)。Theorem の証明より次の結果を得る。

Corollary F が、 $S(\rho_{\ell,d}; U_{A,f})'$ の Petersson 内積に関する直交補空間に入る時、 $\zeta(F; \lambda)$ は $\lambda = -1, 2$ で regular。

$S(\rho_{\ell,d}; U_{A,f})'$ の元については、Euler 因子が次の形に退化してゐる。

$$L(F; \lambda) = \zeta(\lambda) L(\lambda, (\frac{dk}{p})) L^*(\lambda),$$

$$\text{すなわち } L^*(\lambda) = \prod_{p < \infty} L_p^*(\lambda)$$

$$L_p^*(\lambda) = \begin{cases} \{1 - \lambda_F(C_1) p^{-2-\lambda} + (\lambda_F(C_2) + p^3 + p^2 - p + 1) p^{-3-2\lambda} - \lambda_F(C_1) p^{-2-3\lambda} + p^{-4\lambda}\}^{-1} & \text{if } (\frac{K}{p}) = -1, \\ \{1 - (\lambda_F(C_1) - 2p^2) p^{-2-\lambda} + (\lambda_F(C_2) - 2p \lambda_F(C_1) + 3p^3 + p^2 + p + 1) p^{-3-2\lambda} - (\lambda_F(C_1) - 2p^2) p^{-2-3\lambda} + p^{-4\lambda}\}^{-1} & \text{if } (\frac{K}{p}) = 1, \\ \{1 - (\lambda_F(C_1) - (p^2 - 1)) p^{-2-\lambda} + (\lambda_F(C_2) - (p-1) \lambda_F(C_1) + p^3 + p^2 - p + 1) p^{-3-2\lambda} - (\lambda_F(C_1) - (p^2 - 1)) p^{-2-3\lambda} + p^{-4\lambda}\}^{-1} & \text{if } (\frac{K}{p}) = 0. \end{cases}$$

最後に、scalar valued case $\ell = \ell_1 + \ell_2$, $d_1 = d_2 = 0$ を考えよう。[23] でみたように、基本的には 1 変数 cusp form からの lifting があつた (cf. Oda [12], Kojima [8])。この空間 (Maass space) $\mathcal{M}_\ell$ は、上に述べた $S(\rho_{\ell,d}; U_{A,f})'$ に含まれる。[23] で述べた Jacobi form の空間は、前節で導入した $G_{1,2}$ 上の weight ℓ , index S の cusp form の空間に他ならない。ただし、 $\mathcal{O}_K$ の $\mathbb{Z}$ -basis を $1, \theta$ とし、 $S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}h\theta \\ \frac{1}{2}h\theta & N(\theta) \end{pmatrix}$ とおいた。Jacobi form と Maass space との対応を $f \leftrightarrow F(f)$ と書く。[23] より L 関数の関係は、

$$\xi(F(f); \lambda) = (\text{const}) \times \lambda(\lambda-1) \xi(\lambda-1) \xi(\lambda) \xi(\lambda+1) \xi(f; \lambda)$$

となる。Proposition 3 より $\xi(f; \lambda)$ は entire であり、 $\xi(f; 2) \neq 0$ を知る。従って、 $\xi(F(f); \lambda)$ は、 $\lambda = -1, 2$ で本当に simple pole を持つ。

References

- [1] A.N.Andrianov : Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2, Russian Math. Survey 29(1974), 45-116.
- [2] A.N.Andrianov : Modular descent and Saito-Kurokawa conjecture Inv. Math. 53(1979), 267-280.
- [3] J.Arthur : Eisenstein series and the trace formula, Proc. Symps. Pure Math. vol.33(1979), part 1, 253-274.
- [4] Harish-Chandra : Automorphic forms on semi-simple Lie groups, Lecture Note in Math. 62, Springer, 1968.
- [5] E.Hecke : Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, II, Math. Ann., 114 (1937), 1-28, 316-351.
- [6] H.Jacquet, R.P.Langlands : Automorphic forms on $GL(2)$, Lecture Note in Math. 114, Springer, 1970.
- [7] V.L.Kalinin : Eisenstein series on the symplectic group, Math. USSR Sb. 32(1977), 449-476.
- [8] H.Kojima : An arithmetic of hermitian modular forms of degree 2, Inv. Math. 69(1982), 217-227.

- [9] R.P.Langlands : Problems in the theory of automorphic forms, Lectures in Modern Analysis and Applications, Lecture Note in Math. 170, Springer, 1970, 18-86.
- [10] R.P.Langlands : On the functional equations satisfied by Eisenstein series, Lecture Note in Math. 544, Springer, 1976.
- [11] A.Murase : Jacobi form に附随する関数について, 本研究集会.
- [12] T.Oda : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature $(2, n-2)$, Math. Ann. 231 (1977), 97-144.
- [13] T.Oda : On the poles of Andrianov L-functions, Math. Ann. 256 (1981), 323-340.
- [14] I.I.Piatetski-Shapiro, S.Rallis : L-functions for the classical groups, Modular Forms.
- [15] I.Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathbb{P}$ -adic fields, Publ. Math. IHES 18 (1963).
- [16] I.Satake : ある群拡大とそのユニタリ表現について, 数学 (1969).
- [17] G.Shimura : Arithmetic of unitary groups, Ann. of Math. 79 (1964), 369-409.
- [18] G.Shimura : On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc. 31 (1975), 79-98.
- [19] G.Shimura : The arithmetic of automorphic forms with respect to a unitary group, Ann. of Math. 117 (1978), 569-605.
- [20] T.Shintani : ノート .
- [21] T.Sugano : On holomorphic cusp forms on quaternion unitary groups of degree 2, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 31 (1985), 521-568.

- [22] T.Sugano : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on $SO(2,q)$, to appear in Advanced Studies in Pure Math., vol.7, 331-360.
- [23] T.Sugano : $SU(2,2)$ の Maass space について , 教理解析研究所 講究録 546 .