

Cyclic Orthogonal and Balanced Arrays

筑波大・社工 藤原 良 (Ryoh Fuji-Hara)

大阪女大・学芸 栗木 進二 (Shinji Kuriki)

1. 序

要素が $S = \{0, 1, \dots, s-1\}$ のいずれかである $n \times m$ 行列 T が次の条件を満たすとき、 T を強さ 2 の balanced array といい、 $BA(n, m, s, 2)$ と表す。

(i) T の任意の 2 列からなる部分行列 T_0 において、あらゆる $i, j \in S$ に対して、 (i, j) が T_0 の行としてちょうど $\mu_{i,j}$ 回現れる。

(ii) あらゆる $i, j \in S$ に対して、 $\mu_{i,j} = \mu_{j,i}$ 。

S の要素をシンボルという。すべての $i, j \in S$ に対して、 $\mu_{i,j} = \mu$ であるとき、 T を orthogonal array といい、 $OA(n, m, s, 2)$ と表す。ここで、 $n = \mu s^2$ である。

BA , OA の存在性、構成法、分類について、多くの研究があり、たとえば、Addelman and Kempthorne [1], Bose and Bush [2], Bush [3], Seiden [8], Seiden and Zernach [9], Chakravarti [4], Rafter and Seiden [7], Srivastava [10], Srivastava and Chopra [11], Yamamoto, Namikawa and Fujii [12]などを参照されたい。

T の任意の行 $(t_1, t_2, \dots, t_m)$ について、 $(t_m, t_1, \dots, t_{m-1})$ もまた T の行であるとき、 T は cyclic であるという。本稿での目的は cyclic BA , cyclic OA を構成することである。

例 1.1 次の 52×13 行列は cyclic $BA(52, 13, 3, 2)$ で、 $\mu_{0,0} = 14$, $\mu_{0,1} = \mu_{0,2} = 7$, $\mu_{1,1} = \mu_{2,2} = 2$, $\mu_{1,2} = 3$ である。

0121022001000	0010211000202	0000100220121	0202000112010
0012102200100	2001021100020	1000010022012	0020200011201
0001210220010	0200102110002	2100001002201	1002020001120
0000121022001	2020010211000	1210000100220	0100202000112
1000012102200	0202001021100	0121000010022	2010020200011
0100001210220	0020200102110	2012100001002	1201002020001
0010000121022	0002020010211	2201210000100	1120100202000
2001000012102	1000202001021	0220121000010	0112010020200
2200100001210	1100020200102	0022012100001	0011201002020
0220010000121	2110002020010	1002201210000	0001120100202
1022001000012	0211000202001	0100220121000	2000112010020
2102200100001	1021100020200	0010022012100	0200011201002
1210220010000	0102110002020	0001002201210	2020001120100

2. cyclic (r, λ) -design with MBN と nested 差集合

V を要素が v 個の集合とし、 $\mathcal{B}$ を V の部分集合の集まりとする。 V の要素を点、 $\mathcal{B}$ の要素をブロックといい、 $(V, \mathcal{B})$ をデザインという。また、 Z_v を v を法とする加群とし、 $V = Z_v$ であるデザイン $(V, \mathcal{B})$ において、 $\mathcal{B}$ の任意のブロック $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ に対して、 $\{a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_k + 1\} \pmod{v}$ もまた $\mathcal{B}$ のブロックであるとき、 $(V, \mathcal{B})$ は cyclic であるという。

デザイン $(V, \mathcal{B})$ が次の条件を満たすとき、 $(V, \mathcal{B})$ を (r, λ) -design という。

(i) あらゆる点はちょうど r 個のブロックに現れる。

(ii) 異なる 2 つの点のあらゆる組はちょうど λ 個のブロックに現れる。

(r, λ) -design $(V, \mathcal{B})$ の存在性と $BA(b, v, 2, 2)$ の存在性とは同値であることがよく知られており、そのことから、次の結果が得られる。

定理 2.1 cyclic (r, λ) -design $(V, \mathcal{B})$ の存在性と $\mu_{1,1} = \lambda, \mu_{0,1} = r - \lambda, \mu_{0,0} = b - 2r + \lambda$ である cyclic $BA(b, v, 2, 2)$ の存在性とは同値である。ここで、 $v = |V|, b = |\mathcal{B}|$ である。

定理 2.2 cyclic (r, λ) -design $(V, \mathcal{B})$ において、 $2\lambda \leq r, b \leq 3r - 2\lambda$ ならば、 $\mu = r - \lambda$ である cyclic $OA(b, v, 2, 2)$ が存在する。ここで、 $v = |V|, b = |\mathcal{B}|$ である。

$s (\geq 3)$ シンボルの balanced array を構成するために、Kuriki and Fuji-Hara [6], Fuji-Hara and Kuriki [5] は (r, λ) -design with MBN を考え、そのようなデザインが $BA(n, m, s, 2)$ と同値であることを示した。

$(V, \mathcal{B})$ を (r, λ) -design とし、 $\mathcal{B}$ のブロック B が g 個のサブブロック $B_1, B_2, \dots, B_g$ (それらのうちのいくつかは空でもよい) に分割されているものとする。 i 番目のサブブロック B_i の集まりを $\mathcal{B}_i$ とし、 $\Pi = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_g\}$ とする。 (r, λ) -design with mutually balanced nested subdesigns (略して、 (r, λ) -design with MBN) とは次の条件を満たす $(V, \mathcal{B}, \Pi)$ のことである。

(i) $(V, \mathcal{B}_i)$ は (r_i, λ_i) -design である ($i = 1, 2, \dots, g$)。

- (ii) V の異なる 2 つの点 x, y に対して、 x を i 番目のサブブロック、 y を j 番目のサブブロックに含む $\mathcal{B}$ のブロック B の個数は $\lambda_{i,j}$ である。

ここで、 $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$, $\lambda_i = \lambda_{i,i}$ であり、

$$r = \sum_{i=1}^g r_i, \quad \lambda = \sum_{i=1}^g \lambda_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq g} \lambda_{i,j}$$

が成り立つ。

定理 2.3 cyclic (r, λ) -design $(V, \mathcal{B}, \Pi)$ with MBN の存在性と

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} \lambda_{i,j}, & i \neq j, \quad i, j \neq 0 \quad \text{のとき、} \\ \lambda_i, & i = j \neq 0 \quad \text{のとき、} \\ r_i - \sum_{j'=1}^{s-1} \lambda_{i,j'}, & i \neq 0, j = 0 \quad \text{のとき、} \\ b - 2r + \lambda, & i = j = 0 \quad \text{のとき、} \end{cases}$$

である cyclic $BA(b, v, s, 2)$ の存在性とは同値である。ここで、 $v = |V|$, $b = |\mathcal{B}|$, $s = |\Pi| + 1$ である。

証明 cyclic (r, λ) -design $(V, \mathcal{B}, \Pi)$ with MBN に対して、

$$t_{x,u} = \begin{cases} i, & V \text{ の点 } x \text{ が } \mathcal{B} \text{ の } u \text{ 番目のブロックの} \\ & i \text{ 番目のサブブロックに現れるとき、} \\ 0, & \text{そうでないとき、} \end{cases}$$

である $v \times b$ 行列 $T = [t_{x,u}]$ を考える。そのとき、 T が cyclic $BA(b, v, s, 2)$ であることは容易に示されるであろう。また、逆も同様である。 □

cyclic (r, λ) -design with MBN を差集合の言葉で表現しよう。 Z_v の部分集合 D が

$$D \oplus D = \lambda(Z_v - \{0\})$$

を満たすとき、 D を出現数 λ の差集合という。ここで、 $D \ominus D = \{d - d' \pmod{v} \mid (d, d') \in D \times D, d \neq d'\}$ である。また、 Z_v の部分集合 $D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(e)}$ が

$$\bigcup_{h=1}^e (D^{(h)} \ominus D^{(h)}) = \lambda(Z_v - \{0\})$$

を満たすとき、 $\{D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(e)}\}$ を出現数 λ の差集合族という。

Z_v の互いに素な部分集合 $D_1, D_2, \dots, D_g$ が次の条件を満たすとき、 $(D_1, D_2, \dots, D_g)$ を nested 差集合という。

(i) D_i は出現数 λ_i の差集合である ($i = 1, 2, \dots, g$)。

(ii) D_i, D_j ($1 \leq i < j \leq g$) に対して、

$$D_i \ominus D_j = \lambda_{i,j}(Z_v - \{0\})$$

が成り立つ。

ここで、 $D_i \ominus D_j = \{d - d' \pmod{v} \mid (d, d') \in D_i \times D_j\}$ である。次に、nested 差集合族を考えよう。 Z_v の部分集合 $D_i^{(h)}$ ($1 \leq h \leq e, 1 \leq i \leq g$) について、

$$D = \left\{ \begin{array}{l} (D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, \dots, D_g^{(1)}), \\ (D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, \dots, D_g^{(2)}), \\ \vdots \\ (D_1^{(e)}, D_2^{(e)}, \dots, D_g^{(e)}) \end{array} \right\}$$

とし、 $D_1^{(h)}, D_2^{(h)}, \dots, D_g^{(h)}$ は互いに素であるとする。次の条件を満たすとき、 D を nested 差集合族という。

(i) $\{D_i^{(1)}, D_i^{(2)}, \dots, D_i^{(e)}\}$ は出現数 λ_i の差集合族である ($i = 1, 2, \dots, g$)。

(ii) D_i, D_j ($1 \leq i < j \leq g$) に対して、

$$\bigcup_{h=1}^e (D_i^{(h)} \ominus D_j^{(h)}) = \lambda_{i,j}(Z_v - \{0\})$$

が成り立つ。

定理 2.4 もし nested 差集合族が存在するならば、cyclic (r, λ) -design $(V, \mathcal{B}, \Pi)$ with MBN が存在する。ここで、 $r_i = \sum_{h=1}^e |D_i^{(h)}|$ ($i = 1, 2, \dots, g$) である。

3. 存在性と構成法

ここでは、nested 差集合をとおして cyclic BA , cyclic OA の存在性と構成法を考える。 v を素数とし、 $v-1 = pf$ とする。 Z_v の原始元を α に対して、 $H_u^p = \{\alpha^d | d \equiv u \pmod{p}\}$ とし、 $C_p = \{c_0, c_1, \dots, c_{p-1}\}$, $c_u \in H_u^p$ とする。 C_p の互いに素な部分集合 $L_1, L_2, \dots, L_g$ に対して、

$$D = \{ (c(L_1 \circ H_0^p), c(L_2 \circ H_0^p), \dots, c(L_g \circ H_0^p)) \mid c \in C_p \}$$

は nested 差集合族である。ここで、 $W \circ W' = \{ww' \mid w \in W, w' \in W'\}$ である。 $\ell_i = |L_i|$ ($i = 1, 2, \dots, g$) とするとき、次の定理が得られる。

定理 3.1 $v = pf + 1$ が素数で、 $\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_g \leq p$ のとき、

$$r_i = p f \ell_i, \quad \lambda_i = \ell_i(f \ell_i - 1), \quad \lambda_{i,j} = f \ell_i \ell_j \quad (1 \leq i < j \leq g)$$

である nested 差集合族が存在する。

例 3.1 $p = 4, f = 3, v = 13, \ell_1 = \ell_2 = 1, g = 2$ のとき、 Z_{13} の原始元 2 に対して、

$$Z_{13} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad 1, \quad 3, \quad 9, \\ \quad 2, \quad 6, \quad 5, \\ \quad 4, \quad 12, \quad 10, \\ \quad 8, \quad 11, \quad 7 \end{array} \right\}$$

で、 $C_4 = \{1, 2, 4, 8\}$ として、

$$H_0^4 = \{1, 3, 9\}, \quad H_1^4 = \{2, 6, 5\}, \quad H_2^4 = \{4, 12, 10\}, \quad H_3^4 = \{8, 11, 7\}$$

である。 $L_1 = \{1\}, L_2 = \{2\}$ とする。

nested 差集合族 D :

1	3	9	2	6	5
2	6	5	4	12	10
4	12	10	8	11	7
8	11	7	1	3	9

対称差 :

0	2	8	1	5	4	0	8	6	4	7	3
11	0	6	12	3	2	5	0	11	9	12	8
5	7	0	6	10	9	7	2	0	11	1	10
12	1	7	0	4	3	9	4	2	0	3	12
8	10	3	9	0	12	6	1	12	10	0	9
9	11	4	10	1	0	10	5	3	1	4	0
0	4	3	2	10	8	0	3	12	6	8	1
9	0	12	11	6	4	10	0	9	3	5	11
10	1	0	12	7	5	1	4	0	7	9	2
11	2	1	0	8	6	7	10	6	0	2	8
3	7	6	5	0	11	5	8	4	11	0	6
5	9	8	7	2	0	12	2	11	5	7	0

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_{1,2} = 3.$$

定理 3.1 を定理 2.3 と 2.4 に適用することによって、cyclic BA , cyclic OA が構成される。

定理 3.2 $v = pf + 1$ が素数で、 $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{s-1} \leq p$ のとき、cyclic $BA(pv, v, s, 2)$

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} fl_i l_j, & i \neq j, \quad i, j \neq 0 \quad \text{のとき、} \\ l_i(fl_i - 1), & i = j \neq 0 \quad \text{のとき、} \\ l_i\{f(p - \ell) + 1\}, & i \neq 0, j = 0 \quad \text{のとき、} \\ (p - \ell)\{f(p - \ell) + 1\}, & i = j = 0 \quad \text{のとき、} \end{cases}$$

が存在する。ここで、 $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{s-1}$ である。

例 3.1 に対応する balanced array が例 1.1 で与えられている。

$n = v$ である 1 サイクルの cyclic BA である T に $(a, a, \dots, a)$, $a \in S$ である行をいくつか加えることによって cyclic OA になるとき、 T を準対称 cyclic OA という。

定理 3.3 $s \geq 3$ のとき、 s シンボルの準対称 cyclic OA は存在しない。

証明 1 サイクルの cyclic BA を T とする。 T に対応する cyclic (r, λ) -design $(V, \mathcal{B}, \Pi)$ with MBN において、それぞれのサブブロックのサイズは一定であり、それを k_i ($i = 1, 2, \dots, s-1$) とする。この $(V, \mathcal{B}, \Pi)$ はある nested 差集合から構成され、

$$r_i = k_i, \quad \lambda_i(v-1) = k_i(k_i - 1), \quad \lambda_{i,j}(v-1) = k_i k_j, \quad (i, j = 1, 2, \dots, s-1, i \neq j)$$

が成り立つ。また、定理 2.3 から、 T において、

$$\mu_{i,0} = r_i - \sum_{j'=1}^{s-1} \lambda_{i,j'}, \quad \mu_{i,j} = \lambda_{i,j}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, s-1, i \neq j)$$

が成り立つ。 T が準対称 cyclic OA であるとき、 $\mu_{i,j} = \lambda_{i,j} = \frac{k_i k_j}{v-1}$ は i と j に依存しないので、 k_i も i に依存しない。したがって、 λ_i も i に依存しない。ここで、 $k_i = k^*$, $\lambda_i = \lambda^*$ とする。 $\mu_{i,0} = \mu_{i,j}$ であるので、

$$k_i - \sum_{j \neq i} \frac{k_i k_j}{v-1} - \frac{k_i(k_i - 1)}{v-1} = \frac{k_i k_j}{v-1}$$

であるが、 k^* を用いて表すと、 $v = sk^*$ が得られる。したがって、

$$\lambda^*(sk^* - 1) = k^*(k^* - 1)$$

つまり、

$$\lambda^* \equiv 0 \pmod{k^*}$$

が成り立つ。 $\lambda^* = \beta k^*$ とすると、

$$\beta(sk^* - 1) = k^* - 1$$

であるが、このような β を取ることはできない。 □

References

- [1] Addelman S. and Kempthorne O., Some main-effect plans and orthogonal arrays of strength two, Ann. Math. Statist. 32 (1961) 1167-1176.
- [2] Bose R.C. and Bush K.A., Orthogonal arrays of strength two and three, Ann. Math. Statist. 23 (1952) 508-524.
- [3] Bush K.A., Orthogonal arrays of index unity, Ann. Math. Statist. 23 (1952) 426-434.
- [4] Chakravarti I.M., On some methods of construction of partially balanced arrays, Ann. Math. Statist. 32 (1961) 1181-1185.
- [5] Fuji-Hara R. and Kuriki S., Mutually balanced nested designs, Discrete Math. 97 (1991) 167-176.

- [6] Kuriki S. and Fuji-Hara R., Balanced arrays of strength two and nested (r, λ) -designs, submitted for publication.
- [7] Rafter J.A. and Seiden E., Contributions to the theory and construction of balanced arrays, *Ann. Statist.* 2 (1974) 1256-1273.
- [8] Seiden E., On the problem of construction of orthogonal arrays, *Ann. Math. Statist.* 25 (1954) 151-156.
- [9] Seiden E. and Zemach R., On orthogonal arrays, *Ann. Math. Statist.* 37 (1966) 1355-1370.
- [10] Srivastava J.N., Some general existence conditions for balanced arrays of strength t and 2 symbols, *J. Combin. Theory (A)* 13 (1972) 198-206.
- [11] Srivastava J.N. and Chopra D.V., Balanced arrays and orthogonal arrays, "A Survey of Combinatorial Theory" (J.N. Srivastava et al., Eds.) (1973) 411-428.
- [12] Yamamoto S., Namikawa T. and Fujii Y., Classification of two-symbol orthogonal arrays of strength t , $t + 3$ constraints and index 4, *TRU Math.* 24 (1988) 167-184.