

関数空間における最良近似

早大 教育 和田淳蔵

最良近似の問題は古くから研究され、応用面も非常に広い。
ここで考えるのは Banach 空間、とくに関数空間における最良近似である。§1 では Banach 空間における最良近似の基礎的な性質を述べる。§2 では実数値連続関数の空間、§3 では複素値連続関数（解析関数）の空間における最良近似について論ずる。§4 では射影作用素と最良近似との関係を述べ、§5 では他の関数空間における最良近似について考える。

§1. 定義、基礎的な性質

E を Banach 空間とし、 M をその閉部分空間とする。

$E \ni x$ に対して、ある $y \in M$ が存在して

$$\|x - y\| = d(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\| \quad (*)$$

となるとき、 y は x の M における最良近似 (best approximation of x in M) という。一般には (*) のような y は存在するとは限らないし、また存在しても一意とは限らない。

E のすべての元 x に対して、 x の M における最良近似が存在するとき、 M は条件 (P) をみたすということにする。また E のすべての元 x に対して、 x の M における最良近似が一意に存在するなら、 M は Haar の条件をみたすという。そのとき M を Haar 部分空間であるという場合もある。

たとえば E を Banach 空間としたとき、 E の共役空間 E^* の w^* -閉部分空間は (P) をみたす。なぜなら、 M は E^* の w^* -閉部分空間とし、 $x \in E^* \setminus M$ とする。 $C_n = x + [d(x, M) + \frac{1}{n}] U^*$ (U^* は E^* の閉単位球) とおけば、 $\{C_n \cap M\}$ は空でない w^* -コンパクト集合の列であり、 $C_{n+1} \cap M \subset C_n \cap M$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)。いま $\bigcap_{n=1}^{\infty} (C_n \cap M) \ni y$ とすれば $\|x - y\| = d(x, M)$ 。

つぎにノルム空間 $\overset{E}{V}$ とその部分空間 M を考える。 M の上で定義された有界線型汎関数 f がノルムを保って E の上の有界線型汎関数 F に拡張できる (Hahn-Banach の定理)。いま任意の f に対して F がただ一つ存在する場合を考える。そのとき M は条件 (U) をみたすということにする。つぎは Haar の条件と条件 (U) との関係である ([12])。

定理 1.1 Banach 空間 E の閉部分空間 M が条件 (U) をもつ必要かつ十分条件は $M^\perp = \{f \in E^* : f(M) = 0\}$ が E^* の中で Haar の条件をみたすことである。

§ 2 $C_R(X)$ の場合.

X をコンパクト Hausdorff 空間とし、 $C_R(X)$ を X の上の実数値連続関数全体 (ノルムは一様ノルム) の Banach 空間とする。 $C_R(X)$ における最良近似は古くから研究されている。Haar [5] はトリビアルでない Haar 部分空間が存在しない X の存在を示した。そのあと Mairhuber [11] は X が n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ のコンパクト部分集合であるとき、 $C_R(X)$ が次元 n (> 1) の Haar 部分空間をもてば、 X は単位円のあるコンパクト部分集合に同相であることを証明した。さらに Curtis [3] はそれを一般化して、 X がコンパクト Hausdorff 空間の場合を考えた。

R. R. Phelps [12] はつぎを証明した。

定理 2.1 X をコンパクト連結 Hausdorff 空間とする。

M を $C_R(X)$ の閉部分空間で $C_R(X)/M$ の次元が有限 (≥ 1) とする。そのとき M が $C_R(X)$ の Haar 部分空間であれば、ある $f \in C_R(X)^*$, $f \neq 0$ で $M = f^{-1}(0)$ となる (Phelps は逆も成り立つとしていたが、反例が作れる。 f を表わす測度の台が X ではない)。

注意 X が連結でない場合は定理 2.1 は成り立たない。この場合の $\dim C_R(X)/M < +\infty$ となる Haar 部分空間 M や (P) をみたす M は大変複雑である。

M が $C_R(X)$ の中の n 次元部分空間としたときはつぎが成り立つ ([127])。

定理 2.2 X をコンパクト Hausdorff 空間とし、 M を $C_R(X)$ の中の n 次元部分空間とする。そのとき M は $C_R(X)$ の中で Haar の条件をみたすための必要かつ十分条件は M の任意の関数 $f (\neq 0)$ に対して $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$ の個数は $\leq n-1$ となることである。 X が局所コンパクト Hausdorff 空間のとき、 M を、 ∞ で 0 となる X の上の実数値連続関数全体の空間 $C_0(X)$ の n 次元部分空間としてもよい。

§3 $C(X)$ の場合

X をコンパクト Hausdorff 空間、 $C(X)$ を X の上の複素値連続関数の全体の Banach 空間 (ノルムは一様ノルム) とする。 A を $C(X)$ の部分空間とする。

定理 3.1 $g \in C(X)$ の A における最良近似を f_0 とする。いま $L \in C(X)^*$, $\|L\| = 1$, $L(A) = 0$, $L(g) = \|g\|_A = \inf_{f \in A} \|g - f\|$ としたとき、 $g - f_0 = \|g\|_A \bar{\phi}$ (a.e. $d\mu$) と

なる。ここで $\phi d\mu$ ($\mu \geq 0$) は L に対応する X の上の測度に関する polar decomposition である。

いま X を $\mathbb{C}$ の中の単位円 Γ とし、 A をディスク環とすると定理 3.1 はつぎのようになる ([14])。

定理 3.2 $g \in C(\Gamma)$ が A において最良近似をもつための必要かつ十分条件は $g = f_0 + \lambda h$ の形となることである。ここで $f_0 \in A$, $\lambda \geq 0$, $h \in C(X)$, $|h| \equiv 1$ かつ h は $\varphi \in H^1$, $\int \varphi dm = 0$ となるある φ で $h = |\varphi|/\varphi$ (a.e. m), m は Γ 上の Lebesgue 測度である。また $g \in C(\Gamma)$ が A において最良近似をもてば、それは一意にきまる。

定理 3.3 $C(\Gamma) \ni g$ が $g = \sum_{j=0}^n b_j \bar{z}^{j+1}$ の形であれば、 g は A における (一意の) 最良近似として有理関数 f_0 をもつ ([7])。

注意 a) たとえば $g = 3\bar{z} + 2\bar{z}^2$ なら $f_0 = 3/(z+2)$ となる。

b) Γ の上の連続関数で A における最良近似をもたないものが存在する ([8])。

X をコンパクト Hausdorff 空間とし、 E を $C(X)$ の閉部分空間で、 $E \ni 1$ 、 E は X の点を分離すると仮定する。

定理 3.4 $\bigvee_{\mu \in \mathcal{M}(E)} \mu \perp E$ となる任意の 0 でない測度 μ の台は E の Shilov 境界 ∂_E と一致すると仮定する。もし $f \in C(X)$,

f を E に対して、ある ∂E の点が $[E, f]$ の Choquet 境界に含まれないとし、かつ $\partial[E, f] = \partial E$ とすれば、 f の E における最良近似は存在しない。

これにより、 $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合 K に対して $A(K)$ の関数の $R(K)$ における最良近似が論じられる。

注意 Blatter and Seeber [2] は ディスク環 A に対して、 A は A^{**} の中で条件 (P) を満たさないことを示した。しかしこれは $C(\Gamma)$ の元で A における最良近似が存在しないものがあることから証明できる。

§4 関数環への射影作用素

W. Rudin [3] は つぎのことを示した： Γ を単位円、 A を ディスク環とする。そのとき $C(\Gamma)$ から A の上への有界射影作用素は存在しない。このことから Glicksberg [4] は A が一般の関数環の場合に拡張した。つぎはそこで用いられた定理である。

定理 4.1 X をコンパクト Hausdorff 空間、 $A \in C(X)$ の閉部分多元環とし、 A の Shilov 境界 ∂_A は X に一致すると仮定する。 $B \subset C(X)$ は閉 A -モジュールで $Z(B) = \bigcap_{f \in B} f^{-1}(0)$ は X で疎であるとする。 $C(X) \supset F \supset B$ となる閉部分空間 F に対して

$$T : F \rightarrow C(X)$$

を有界線型作用素で、 $Tb = b$ ($b \in B$) とする。そのとき

$$\|T - I\| = \|T\| - 1. \quad \text{ここで } I \text{ は恒等作用素である。}$$

これからつぎが容易に導かれる ([4])。

定理 4.2 A を $C(X)$ の閉部分多元環、 $A \neq C(X)$, $\partial_A = X$, $Z(A)$ は X で疎とする。いま T を $C(X)$ から A の上への有界射影作用素としたとき、 $C(X)$ の任意の関数 f に対して Tf が f の A における最良近似であるための必要かつ十分条件は $\|T\| = 2$ となることである。

例. X をコンパクト Hausdorff 空間、 F を X の閉部分集合とし、 $A = \{f \in C(X) : f(F) = 0\}$ とおく。 $U : C(F) \rightarrow C(X)$ をノルム 1 の線型拡張作用素 (Linear extension operator) とする。すなわち U は線型で、 $C(F)$ の f に対して $(Uf)|_F = f$ で $\|U\| = 1$ とする。そのとき $f \in C(X)$ に対して

$$Tf = f - U(f|_F)$$

とおけば、 T は $C(X) \rightarrow A$ の射影作用素で、 Tf は f の A における最良近似となっている。

注意 なお $X = \partial_A$ で $Z(A) = \emptyset$ の場合は $T : C(X) \rightarrow A$ となる有界射影作用素 T に対してはいつでも $\|T\| > 2$ となっていることが知られている ([4])。

§ 5. 他の関数空間の場合

(1) L^∞ の場合

X をパラコンパクトで Lindelöf の性質をもつ位相空間、 μ を X の上の Borel 測度であつて、空でない開集合 U に対しては $\mu(U) > 0$ とする。そのとき $L^\infty(X, \mu)$ の任意の元 f は $C_R^\infty(X)$ において最良近似をもつ ([10])。

(2) L^1 の場合

X を集合とし、 X の上に Borel 集合族 Σ と非負測度 μ が定義されているとする。

a) 測度空間 (X, Σ, μ) が原子元をもたないなら $L^1 = L^1(X, \Sigma, \mu)$ の閉部分空間 M で $\dim L^1/M < +\infty$ となるなら M は Haar 部分空間にはなり得ない。

b) (X, Σ, μ) が原子元をもたないなら、 L^1 は有限次元の Haar 部分空間をもたない。

(3) C_0, ℓ^1 の場合

C_0 では $\dim C_0/M < \infty$ となる M は Haar 部分空間にはなり得ない。 C_0 の有限次元部分空間 M が Haar 部分空間となる条件は定理 2.2 と同じ。また ℓ_0, ℓ^1 について、その一次元部分空間も Haar 部分空間になるとは限らない (任意の一次元部分空間が Haar 部分空間となる条件は強凸性 (strict convexity) と同等)。

(4) Banach 空間 E が反射的 (reflexive) となる必要かつ十分条件は、 E のすべての閉部分空間が (P) をもつことである。

参考文献

- [1] J. Blatter : Grothendieck Spaces in Approximations Theory, Memoirs. A. M. S. 120, 1972.
- [2] J. Blatter and G. L. Seever : The disc algebra is not an existence subspace of its bidual, J. Math. Anal. and Appl. 44 (1973) 88-91.
- [3] P. C. Curtis : N -parameter families and best approximation, Pacific J. Math. 9 (1959) 1013-1027.
- [4] I. Glicksberg : Some uncomplemented function algebras, Trans A. M. S. 111 (1964) 121-137.
- [5] A. Haar : Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen, Math. Ann. 78 (1918) 294-311.
- [6] A. F. Hallstrom : Some spaces where best uniform approximation always fails, Approximation Theory, Proc. Internat. Sympos. Univ. Texas, Austin Tex 1973, Academic Press, 1973, 369-371.

- [7] W. Hintzman : Best uniform approximations
via annihilating measures, Bull. A.M.S., 76
(1970) 1062 - 1066.
- [8] ——— : On the existence of best approximations,
Approximation Theory, Proc. Internat. Sympos. Univ.
Texas, Austin, Tex 1973, 379-381.
- [9] K. Hoffman : Banach Spaces of Analytic Functions,
Prentice - Hall 1962.
- [10] B. R. Kripke and R. B. Holmes : Approximation
of bounded functions by continuous functions, Bull.
A.M.S., 71 (1965) 896 - 897.
- [11] J. C. Maishuber : On Haar's theorem concerning
Chebyshev approximation problems having unique
solutions, Proc. A.M.S. 7 (1956) 609-615.
- [12] R. R. Phelps : Uniqueness of Hahn - Banach
extensions and unique best approximation, Trans
A.M.S., 95 (1960) 238 - 255.
- [13] W. Rudin : Projections on invariant subspaces,
Proc. A.M.S., 13 (1962) 429 - 432.
- [14] 和田淳藏 : Banach空間における最良近似,
早大「学術研究」(近刊).