

二次曲面と積分可能系

阪大 理

田中俊一

a) Jacobi による楕円面上の測地流の積分 ([2]), b) Klein による二次の線網の研究 ([4]), c) Darboux によるサイクロイドの研究 ([1]) は多くの類似英をもっているが, それはいずれもが共焦二次曲面の系により導入された座標 (楕円座標) により記述されることに由来している. ここでは a) と b) の類似を述べよう.

1. 測地流の積分可能性

n 次元ユークリッド空間における楕円面

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i} = 1 \quad (a_i > 0)$$

が与えられたとする. ^{空間の}変 $x = (x_i)$ に対し

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1$$

の根として定まる $\lambda = (\lambda_i)$ を楕円座標とす。式

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} - 1 = - \frac{P(\lambda)}{A(\lambda)},$$

$$A(\lambda) = (\lambda - a_1) \cdots (\lambda - a_n), \quad P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

が成立する。 $a_i - \lambda$ をかけて $\lambda = a_i$ とおくと $x = (x_i)$ は

$$x_i^2 = \frac{P(a_i)}{A'(a_i)} = \frac{(a_i - \lambda_1) \cdots (a_i - \lambda_n)}{\prod_{\ell \neq i} (a_i - a_\ell)}$$

とあらわされる。対数微分して得られる

$$2 \frac{dx_i}{x_i} = - \sum_{j=1}^n \frac{d\lambda_j}{a_i - \lambda_j}$$

を代入して、線素は

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{4} \sum_i x_i^2 \left(\sum_j \frac{d\lambda_j}{a_i - \lambda_j} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_j \left(\sum_i \frac{x_i^2}{a_i - \lambda_j} \right) d\lambda_j^2 + \frac{1}{4} \sum_{j \neq k} \left(\sum_i \frac{x_i^2}{(a_i - \lambda_j)(a_i - \lambda_k)} \right) d\lambda_j d\lambda_k \\ &= \sum_{i=1}^n \Lambda_i d\lambda_i^2, \\ \Lambda_i &= -\frac{1}{4} \frac{P'(\lambda_i)}{A(\lambda_i)} = -\frac{1}{4} \frac{\prod_{\ell \neq i} (\lambda_i - \lambda_\ell)}{(\lambda_i - a_1) \cdots (\lambda_i - a_n)} \end{aligned}$$

とあらわされる。したがって楕円面 (I) 上の線素は $\lambda_n = 0$

とあって

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_i d\lambda_i^2$$

で与えられる。その上の測地流の運動エネルギーは

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_i \dot{\lambda}_i^2,$$

座標 λ_i に共役な変数 p_i は

$$p_i = \partial E / \partial \dot{\lambda}_i = \Lambda_i \dot{\lambda}_i$$

であるから、測地流のハミルトニアンは

$$H = E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_i^{-1} p_i^2$$

となる。対応するハミルトン-ヤコビの偏微分方程式は

$$(3) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\Lambda_i} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)^2 = \text{定数} \quad (\eta_1 \text{ とおく})$$

である。

(3) の任意定数 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ を含む解 (完全解)

$$S = S(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; \eta_1, \dots, \eta_{n-1})$$

が得られたとすると、そのとき

$$p_i = \partial S / \partial \lambda_i, \quad \xi_i = \partial S / \partial \eta_i$$

により定まる正準変換 $(\lambda, p) \rightarrow (\xi, \eta)$ を行なうとハミルトニアンは

$$H = \eta_1$$

になり、運動方程式は

$$\dot{\xi}_i = \delta_{i1}, \quad \dot{\eta}_i = 0$$

になる。

方程式 (3), すなわち

$$(3') \quad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-2A(\lambda_i)}{P'(\lambda_i)} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)^2 = \eta_1$$

の完全解は以下のように変数分離法で求められる。

$\lambda_n = 0$ であったから

$$P(\lambda) = \lambda P_1(\lambda), \quad P_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{n-1})$$

であるが

$$Q(\lambda) = \eta_1 \lambda^{n-2} + \eta_2 \lambda^{n-3} + \cdots + \eta_{n-1}$$

とおくと Lagrange の補間公式より

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{Q(\lambda_i)}{P_1'(\lambda_i)} = \eta_1$$

したがって (3') は

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_1'(\lambda_i)} \left\{ -\frac{2A(\lambda_i)}{\lambda_i} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)^2 - Q(\lambda_i) \right\} = 0$$

と書くことができ、とくに

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)^2 = -\frac{\lambda_i Q(\lambda_i)}{2A(\lambda_i)}$$

とすれば各項は 0 となる。したがって

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \int^{\lambda_i} \sqrt{\frac{\lambda Q(\lambda)}{-2A(\lambda)}} d\lambda$$

が求める完全解である。

2. 二次線形

楕円座標は空間の各点をあらわして いたが次に複素空間で

$$(4) \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

をみたす点をあらわす方法を考えよう. () と同様に

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = \frac{x_1^2(a_2 - \lambda) \cdots (a_n - \lambda) + \cdots}{A(\lambda)}$$

とあらわしたとき (4) より分子の λ^{n-1} の係数は 0 となる.

また λ^{n-2} の係数は $-r^2$, $r^2 = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$ であるから

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = -r^2 \frac{P(\lambda)}{A(\lambda)},$$

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{n-2}).$$

$a_i - \lambda$ をかけて $\lambda = a_i$ とおくと

$$x_i^2 = r^2 \frac{P(a_i)}{A'(a_i)} = r^2 \frac{(a_i - \lambda_1) \cdots (a_i - \lambda_{n-2})}{\prod_{l \neq i} (a_i - a_l)}.$$

したがって同次座標 $x = (x_i)$ と楕円座標 $\lambda = (\lambda_i)$ は互いに他を定める.

また x を同次座標と考えずに曲面 (4) と

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 = 1$$

の交わりを考える. そこで

$$x_i^2 = \frac{P(a_i)}{A'(a_i)}.$$

したがって

$$2 \frac{dx_i}{x_i} = - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{d\lambda_j}{a_i - \lambda_j}$$

を

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2$$

に代入して

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-2} \Lambda_i d\lambda_i^2,$$

$$\Lambda_i = \frac{1}{4} \frac{P'(\lambda_i)}{A(\lambda_i)}$$

がえられる。対応するハミルトン-ヤコビの方程式は

$$(5) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\Lambda_i} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)^2 = \text{定数} (\eta_1 \text{ とおく}),$$

これは

$$(5') \quad \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{P'(\lambda_i)} \left\{ -2A(\lambda_i) \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i} \right)^2 - Q(\lambda_i) \right\} = 0,$$

$$Q(\lambda) = \eta_1 \lambda^{n-3} + \dots$$

と変形され、§1と同様に解かれる。

次に $\mathbb{P}^3$ の直線幾何の概略を述べよう ([3, 第6章])。

$\mathbb{P}^3$ の直線 l の二点 $x = (x_1, \dots, x_4)$, $y = (y_1, \dots, y_4)$ に対し

て

$$p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$$

とおく。 $p_{ij} = -p_{ji}$ であるから p は 6 個定まるが、それのあらわす $\mathbb{P}^5$ の点は l に対応し、^{それ} $\wedge$ Plücker 座標という。

P は二次の関係式

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

をみたしている. この二次曲面を G とする. 以下座標変換により G は

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 = 0$$

で与えられてゐるものとする. P^5 の他の曲面 $F = \{\varphi = 0\}$ が与えられ $X = G \cap F$ が三次元になるとき, X に対応する (P^3 の) 直線の集まりを線網 (line complex) という.

φ が二次式るとき X を二次の線網という. 二次元の直線の集まりを線叢 (line congruence) という.

$p \in P^3$ に対し $\sigma(p)$ で p を通る直線全体をあらわす.

対応する P^5 の集合を同じ記号であらわすが, それは二次元平面になる. 線網が与えられたとき $p \in P^3$ が特異であるとは, $\sigma(p)$ が F に接する場合として定義する. 特異点全体を S と記す. $x \in X$ または対応する直線 l_x が特異であるとは次の同値条件が成立することとして定義する:

$$\exists p \in l_x, \quad \sigma(p) \text{ は } x \text{ で } F \text{ に接する.}$$

$$\Leftrightarrow T_x(F) \text{ (} x \text{ における } F \text{ の接平面) は } G \text{ に接する.}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = 0.$$

例えば φ が二次式

$$\varphi = a_1 x_1^2 + \cdots + a_6 x_6^2$$

のとき, 最後の条件から, $x \in X$ が特異 $\Leftrightarrow$

$$a_1^2 x_1^2 + \cdots + a_6^2 x_6^2 = 0$$

となる.

特異な $x \in X$ の全体を Σ と記す. $x \in \Sigma$ から $\mathcal{O}_x$ の条件の p は唯一つで ℓ_x と $((\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}))$ に対応する直線の交点として求まることがわかる. かくて $\Sigma \ni x \rightarrow p \in S$ なる写像が得られるが, 上の写像でほとんど一対一である. とくに二次の線網の場合には 16 個の p があるので一対一で, 例外的な p の逆像は P^1 である. この場合 S は 16 個の二重点をもち 4 次曲面で Kummer 曲面とよばれている. Σ は S の特異点を解消したものになっている.

Klein は [4] において次の問題を研究した.

1. すべての点の特異になる線網を見出すこと.
2. 与えられた線網の部分線束で, ある曲面の主接線方向 (の一系) からなるものを, 見出すこと.

これらの問題の背景には当時彼が Lie と共に Kummer 曲面上の主接線曲線を研究していたという事実がある. さて 1 であるが, 与えられた線網は P^3 のある曲面の接線全体から成るものとして特徴づけられる. 一方 $\mathcal{O}_x$ の条件より, $\mathcal{O}_x$ 上

$$\sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = 0$$

が常に成立する φ を見出してもよい. $n=6$ の場合の楕円

座標 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ であらわした式が (5) (ただし $\lambda_1=0, n=6$) に他ならない. この場合 Q は λ の二次式であるので, a, b を定数として

$$\varphi = \sum_{i=1}^4 \int \lambda_i \sqrt{\frac{(\lambda-a)(\lambda-b)}{A(\lambda)}} d\lambda$$

が求める φ である. φ の定める線 ^系 はある曲面 $\mathcal{S}$ の接線から成るが, Klein は $\mathcal{S}$ の主接線方向の一系は二次線網

$$(6) \quad \sum_{i=1}^6 \frac{x_i^2}{a_i - a} = 0$$

に部分線叢として (他系は (6) の $a \in b$ とした線網に) 含まれることを ^(証明) 問題 2 との関連をも示した.

さらにこの立場からも Kummer 曲面のテータ関数による parametrization などを与えることができる. 詳しくは [4] および一連の line geometry の論文 (全集 Vol. 1) を参照されたい.

文 献

- [1] G. Darboux, Leçon sur la théorie générale des surfaces, Vol. II, Chelsea
- [2] G.G.J. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, Chelsea = 全集 Vol. VIII

- [3] P. Griffiths and J. Harris, Principles of algebraic geometry, Wiley - Interscience, 1978
- [4] F. Klein, Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen, 全集 Vol. I, 127 - 152.