

3 段 3 次, 4 段 4 次 ルンゲ・クッタ 公式の解系について

鹿大 理学部 中島 正治 (Masaharu Nakashima)

鹿大 理学部 黒木 政喜 (Masaki Kuroki)

$$\begin{aligned} k_i &= h f(x_n + c_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) \\ y_{n+1} &= y_n + \sum_{i=1}^m b_i k_i \\ &= y_n + \sum_{i=1}^m b_i h f(x_n + c_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j) \end{aligned}$$

において order 3 の打ち切り誤差は,

$$\begin{aligned} &T(y(x_i), y(x_{i+1}), \dots, y(x_{i+N}), k_i, \dots, k_{i+N}) \\ &= y(x_{i+N}) - \{ \omega_0 y(x_0) + \dots + \omega_N y(x_{i+N-1}) + \phi(x_i, \dots, x_{i+N}, y_i, \dots, y_{i+N}, k_i, \dots, k_{i+N}) \} \end{aligned}$$

と表される。ここで Lotkin のフリーパラメータ決定法は

$$\begin{aligned} &|f(x, y)| < M \\ &\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j} < \frac{L^{i+j}}{M^{i+j-1}} \quad (i+j \leq m) \quad \text{但し } M, L: \text{constant} \end{aligned}$$

と仮定したのち行なわれる。私達は order 3 においては,

order 3 までの決定方程式内の条件をみたすフリーパラメータが order 4 の決定方程式内のいくつかの条件式を満足するように、4 order 4 においては、order 5 の決定方程式内のいくつかを満足していくように解系を調べました。

Order 3

$$A: \begin{cases} \text{order 1 : } b_1 + b_2 + b_3 = 1 \\ \text{order 2 : } b_2 C_2 + b_3 C_3 = \frac{1}{2} \\ \text{order 3 : } b_2 C_2^2 + b_3 C_3^2 = \frac{1}{3} \\ \phantom{\text{order 3 : }} b_3 C_2 C_3 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\text{order 4 : } b_2 C_2^3 + b_3 C_3^3 = \frac{1}{4} \quad \text{--- ①}$$

$$b_3 C_2^2 C_3 = \frac{1}{12} \quad \text{--- ②}$$

$$b_3 C_2 C_3^2 = \frac{1}{8} \quad \text{--- ③}$$

7) - 10) の決定に Lotkin の誤差評価を利用する

$$D_1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{36} \{ 2(C_2 + C_3) - 3C_2 C_3 \}$$

$$D_2 = \frac{1}{24} - \frac{C_2}{12}$$

$$D_3 = \frac{1}{8} - \frac{C_3}{6}$$

$$D_4 = \frac{1}{24}$$

$$|E| < [8|D_1| + |D_2| + |2D_2 + D_3| + |D_2 + D_3| + 2|D_3| + 2|D_4|] ML^3, \text{ 但 } ([,] = C$$

Case 1. (A+0+0):

0			
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	-1	2	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

で決定される。

Case 2 (A+0+3):

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \frac{1}{2} \\ c_2^2 & c_3^2 & \frac{1}{3} \\ c_2^3 & c_3^3 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{c_2 c_3 (c_3 - c_2)}{12} \{ 3 + 6 c_2 c_3 - 4(c_2 + c_3) \} = 0$$

$$\therefore 3 + 6 c_2 c_3 - 4(c_2 + c_3) = 0 \quad \text{--- (I)}$$

$$\begin{cases} b_3 c_2 c_{32} = \frac{1}{6} \\ b_3 c_2 c_3 c_{32} = \frac{1}{8} \end{cases} \quad \text{よ} \quad c_3 = \frac{3}{4} \quad \text{--- (II)}$$

(I), (II) から $c_2 = 0$ ような解は存在しない。

Case 3 (A+2+3):

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \hline & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{8}{9} \end{array}$$

で決定される。

	A+0+2	A+0+3	A+2+3
C	$\frac{17}{36}$	x	$\frac{1}{9}$

(|E| < cML³)Order 4

$$A: \begin{cases} \text{order 1} : b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1 \\ \text{order 2} : b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{order 3 : } b_2 C_2^2 + b_3 C_3^2 + b_4 C_4^2 = \frac{1}{3} \\ \quad b_3 C_2 C_3 + b_4 (C_2 a_{42} + C_3 a_{43}) = \frac{1}{6} \\ \text{order 4 : } b_2 C_2^3 + b_3 C_3^3 + b_4 C_4^3 = \frac{1}{4} \\ \quad b_3 C_2 C_3 a_{42} + b_4 (C_2 a_{42} + C_3 a_{43}) C_4 = \frac{1}{8} \\ \quad b_3 C_2^2 a_{32} + b_4 (C_2^2 a_{42} + C_3^2 a_{43}) = \frac{1}{12} \\ \quad b_4 C_2 a_{32} a_{43} = \frac{1}{24} \end{array} \right.$$

$$\text{order 5 : } b_2 C_2^4 + b_3 C_3^4 + b_4 C_4^4 = \frac{1}{5} \quad \text{--- ①}$$

$$b_3 C_2^3 a_{42} + b_4 (C_2^3 a_{42} + C_3^3 a_{43}) = \frac{1}{20} \quad \text{--- ②}$$

$$b_3 C_2^2 C_3 a_{42} + b_4 (C_2^2 a_{42} + C_3^2 a_{43}) C_4 = \frac{1}{15} \quad \text{--- ③}$$

$$b_4 C_2^2 a_{32} a_{43} = \frac{1}{60} \quad \text{--- ④}$$

$$b_3 C_2 C_3^2 a_{42} + b_4 (C_2 a_{42} + C_3 a_{43}) C_4^2 = \frac{1}{10} \quad \text{--- ⑤}$$

$$b_4 C_2 (C_3 + C_4) a_{32} a_{43} = \frac{7}{120} \quad \text{--- ⑥}$$

$$b_3 C_2^2 a_{42}^2 + b_4 (C_2 a_{42} + C_3 a_{43})^2 = \frac{1}{20} \quad \text{--- ⑦}$$

order 3 と同様 に フリ - バウ ヌ - 7 の 決 定 に Lotkin の 誤 差 評 価
を 利 用 す る。

$$|E| < [16|D_1| + 4|D_2| + |D_2 + 3D_3| + |2D_2 + 3D_3| + |D_2 + D_3| + |D_3| + 9|D_4| + |D_5| \\ + |2D_5 + D_7| + |D_5 + D_6 + D_7| + |D_6| + |2D_6 + D_7| + |D_7| + 2|D_8|] M L^4$$

$$\text{但 し } D_1 = \frac{1}{24} \times \text{① の (右辺 - 左辺)} \quad D_5 = \frac{1}{2} \times \text{④ の (右辺 - 左辺)}$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \times \text{⑤ の (右辺 - 左辺)} \quad D_6 = \frac{1}{2} \times \text{⑦ の (右辺 - 左辺)}$$

$$D_3 = \frac{1}{6} \times \text{② の (右辺 - 左辺)} \quad D_7 = \text{⑥ の (右辺 - 左辺)}$$

$$D_4 = \frac{1}{2} \times \text{③ の (右辺 - 左辺)} \quad D_8 = \frac{1}{120}$$

order 4 の解系は、Butcher の本などにも紹介されているように 5 通りに分かっている。よってそれぞれの場合について order 3 の時と同様に調べてみました。

Case 1 : $(C_2 \neq C_3 \neq C_4, C_4=1, C_2 \neq \frac{1}{2}, 3-4(C_2+C_3)+6C_2C_3 \neq 0)$ C_2, C_3 : free parameter

0				
C_2	a_{21}			
C_3	a_{31}	a_{32}		
C_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	
	b_1	b_2	b_3	b_4

例 1

$$b_1 = \frac{1-2(C_2+C_3)+6C_2C_3}{12C_2C_3}, \quad b_2 = \frac{2C_3-1}{12C_2(C_3-C_2)(1-C_2)}, \quad b_3 = \frac{1-2C_2}{12C_3(C_3-C_2)(1-C_3)}$$

$$b_4 = \frac{3-4(C_2+C_3)+6C_2C_3}{12(1-C_2)(1-C_3)}, \quad a_{31} = \frac{C_3(3C_2-C_3-4C_2^2)}{2C_2(1-2C_2)}, \quad a_{32} = \frac{C_3(C_3-C_2)}{2C_2(1-2C_2)}$$

$$a_{41} = \frac{4C_3^2(3C_2^2-3C_2+1)-C_3(12C_2^2-15C_2+5)+2(2C_2^2-3C_2+1)}{2C_2C_3\{3-4(C_2+C_3)+6C_2C_3\}}$$

$$a_{42} = \frac{(-4C_2^2+5C_3+C_2-2)(1-C_2)}{2C_2(C_3-C_2)\{3-4(C_2+C_3)+6C_2C_3\}}, \quad a_{43} = \frac{(1-2C_2)(1-C_3)(1-C_2)}{C_3(C_3-C_2)\{3-4(C_2+C_3)+6C_2C_3\}}$$

(1) A+①+②

行列式を構成して解を持つための条件，行列式 = 0 を考えてみる。

A+①より

$$\begin{vmatrix} C_2 & C_3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ C_2^2 & C_3^2 & 1 & -\frac{1}{3} \\ C_2^3 & C_3^3 & 1 & -\frac{1}{4} \\ C_2^4 & C_3^4 & 1 & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{C_2 C_3}{60} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 30 \\ 1-C_2 & 1-C_3 & 0 & 10 \\ 1-C_2^2 & 1-C_3^2 & 0 & 15 \\ 1-C_2^3 & 1-C_3^3 & 0 & 18 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{C_2 C_3}{60} (1-C_2)(1-C_3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1+C_2 & C_2-C_3 & \frac{3}{2} \\ 1+C_2+C_2^2 & (C_2-C_3)(1+C_2+C_3) & \frac{9}{5} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{C_2 C_3}{60} (1-C_2)(1-C_3)(C_2-C_3) \begin{vmatrix} 1 & C_2 - \frac{1}{2} \\ 1+C_2+C_3 & C_2^2 + C_2 - \frac{4}{5} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{C_2 C_3}{60} (1-C_2)(1-C_3)(C_2-C_3) \left\{ \frac{5C_2-3}{10} - \frac{2C_2-1}{2} C_3 \right\} = 0$$

条件より $C_3 = \frac{5C_2-3}{5(2C_2-1)}$

1+②より

$$\begin{vmatrix} C_2 a_{32} & C_2 a_{42} + C_3 a_{43} & -\frac{1}{6} \\ C_2^2 a_{32} & C_2^2 a_{42} + C_3^2 a_{43} & -\frac{1}{12} \\ C_2^3 a_{32} & C_2^3 a_{42} + C_3^3 a_{43} & -\frac{1}{20} \end{vmatrix} = C_2 a_{32} \begin{vmatrix} 1 & C_2 a_{42} + C_3 a_{43} & -\frac{1}{6} \\ 0 & C_3 a_{43} (C_2-C_3) & \frac{1}{12} - \frac{1}{6} C_2 \\ 0 & C_3 a_{43} (C_2^2-C_3^2) & \frac{1}{20} - \frac{1}{6} C_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= C_2 C_3 (C_2-C_3) a_{32} a_{43} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{12} - \frac{1}{6} C_2 \\ C_2+C_3 & \frac{1}{20} - \frac{1}{6} C_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= C_2 C_3 (C_2-C_3) a_{32} a_{43} \left\{ \left(\frac{1}{6} C_2 - \frac{1}{12} \right) C_3 - \left(\frac{1}{12} C_2 - \frac{1}{20} \right) \right\} = 0$$

条件より $C_3 = \frac{5C_2-3}{5(2C_2-1)}$

よって①と②は同値式となり $C_3 = \frac{5C_2-3}{5(2C_2-1)}$ で決定される。

(2) A+①+③

$$A+① \text{ より } C_3 = \frac{5C_2 - 3}{5(2C_2 - 1)}$$

A+③ より

$$\begin{vmatrix} C_2 C_3 a_{32} & C_2 a_{42} + C_3 a_{43} & -\frac{1}{8} \\ 0 & C_2 a_{32} a_{43} & -\frac{1}{24} \\ C_2^2 C_3 a_{32} & C_2^2 a_{42} + C_3^2 a_{43} & -\frac{1}{15} \end{vmatrix} = -\frac{C_2 C_3 a_{32}}{120} \begin{vmatrix} 1 & C_2 a_{42} + C_3 a_{43} & 15 \\ 0 & C_2 a_{32} a_{43} & 5 \\ 0 & C_3 a_{43} (C_2 - C_3) & 15C_2 - 8 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{C_2 C_3 a_{32} a_{43}}{120} \begin{vmatrix} C_2 a_{32} & 5 \\ C_3 (C_2 - C_3) & 15C_2 - 8 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{C_2 C_3^2 a_{32} a_{43} (5C_2 - 2)(-10C_2^2 + 10C_2 - 3)}{1200(2C_2 - 1)} = 0$$

$$\text{条件より } C_2 = \frac{2}{5}, C_3 = 1$$

$C_3 = 1$ は Case 1 の条件に反するので解は存在しない。

以下同様の方法で進めていく。

(3) A+①+④

$$A+④ \text{ より } C_2 = \frac{2}{5} \quad \therefore C_3 = 1 \quad \text{解は存在しない。}$$

よって③と④が同値式であることが分かる。

(4) A+①+⑤

$$A+⑤ \text{ より } C_3 = \frac{3}{5}, \quad \therefore C_2 = 0 \quad \text{解は存在しない。}$$

(5) A+①+⑥

$$A + \textcircled{6} \text{ より } C_3 = \frac{2}{5} \therefore C_2 = 1$$

解は存在しない。

$$(6) A + \textcircled{6} + \textcircled{7}$$

$$A + \textcircled{6} \text{ より}$$

$$10(2-3C_2)C_3^3 + (4C_2^2 + 12C_2 - 41)C_3^2 + (-20C_2^2 - 57C_2 + 36)C_3 + (6C_2^2 + 15C_2 - 9) = 0$$

よってこれを満足する C_2, C_3 が存在すれば解が存在する。

$$(7) A + \textcircled{3} + \textcircled{4}$$

$$A + \textcircled{3} \text{ より } C_2 = \frac{2}{5}$$

$$A + \textcircled{4} \text{ より } C_2 = \frac{2}{5}$$

よって $C_2 = \frac{2}{5}$ で解が存在する。

$$(8) A + \textcircled{3} + \textcircled{5}$$

$$A + \textcircled{3} \text{ より } C_2 = \frac{2}{5}$$

$$A + \textcircled{5} \text{ より } C_3 = \frac{3}{5}$$

0				
$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$			
$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{3}{4}$		
1	$\frac{19}{44}$	$-\frac{15}{44}$	$\frac{10}{11}$	
	$\frac{11}{12}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{11}{12}$

で解が存在する。

(9) $A + ② + ④$

$A + ② \text{ より } C_2 = \frac{2}{5}$

$A + ④ \text{ より } C_3 = \frac{2}{5}$

よって解は存在しない。

(10) $A + ③ + ⑦$

$A + ③ \text{ より } C_2 = \frac{2}{5}$

$A + ⑦ \text{ より } 200C_3^3 - 399C_3^2 + 250C_3 - 5 = 0$

を満足する C_3 が存在すれば 解は存在する。

(11) $A + ⑤ + ⑧$

$A + ⑤ \text{ より } C_3 = \frac{3}{5}$

$A + ⑧ \text{ より } C_3 = \frac{2}{5}$

よって解は存在しない。

(12) $A + ⑤ + ⑦$

$A + ⑤ \text{ より } C_3 = \frac{3}{5}$

$A + ⑦ \text{ より } C_2 = \frac{1}{4}$

0				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{3}{5}$	$-\frac{6}{25}$	$\frac{21}{25}$		
1	$\frac{6}{5}$	$-\frac{57}{25}$	$\frac{10}{7}$	
	$\frac{1}{9}$	$-\frac{16}{83}$	$\frac{125}{252}$	$\frac{5}{36}$

1. 解が存在する。

13) $A + ⑥ + ⑦$

$A + ⑥$ より $c_3 = \frac{2}{5}$

$A + ⑦$ より $c_2 = \frac{-15 \pm \sqrt{281}}{4}$ で解が存在する。

以上 Case 1 を下の表にまとめる。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
①							
②							
③	x	x					
④	x	x					
⑤	x	x	7.46×10^{-2}	x			
⑥	x	x	x	x	x		
⑦				x	1.70×10^{-2}		

Case 2 : $(c_2 = c_3 = \frac{1}{2}, b_3 \neq 0)$ b_3 : free parameter

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{3b_3-1}{6b_3} & \frac{1}{6b_3} & \\
 1 & 0 & 1-3b_3 & 3b_3 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}-b_3 & b_3 \quad \frac{1}{6}
 \end{array}$$

(1) A+① 解系の値を代入すると b_3 に関して不定となる。

(2) A+②

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2}(a_{42}+a_{43}) \\ \frac{1}{4}a_{32} & \frac{1}{4}(a_{42}+a_{43}) \\ \frac{1}{8}a_{32} & \frac{1}{8}(a_{42}+a_{43}) \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}}_C = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}}_C$$

$$\text{rank } B = 1, \quad \text{rank } (B, C) = 2.$$

$\text{rank } B \neq \text{rank } (B, C)$ より解は存在しない。

(3) A+③, A+④, A+⑤, A+⑥ も同様にして解は存在しない。

(4) A+⑦

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2}(a_{42}+a_{43}) \\ 0 & \frac{1}{2}a_{32}a_{43} \\ \frac{1}{8}a_{32}^2 & \frac{1}{4}(a_{42}+a_{43})^2 \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}}_C = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{24} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}}_C$$

$$\text{rank } B = 2,$$

$$\text{rank}(B, C) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{120}(1-5a_{32}) \end{pmatrix}$$

i) $a_{32} \neq \frac{1}{5}$ で $\text{rank}(B, C) = 3$, $\text{rank } B \neq \text{rank}(B, C)$ より解は存在しない

∴

ii) $a_{32} = \frac{1}{5}$ で $\text{rank}(B, C) = 2$, $\text{rank } B = \text{rank}(B, C)$ より解は存在する

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \hline & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \quad \frac{1}{6} \end{array}$$

で決定される。

Case 3 : ($c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = 0$, $b_3 \neq 0$) b_3 : free parameter

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
 0 & -\frac{1}{12b_3} & \frac{1}{12b_3} & \\
 1 & -\frac{1}{2} - 6b_3 & \frac{3}{2} & 6b_3 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} - b_3 & \frac{2}{3} & b_3 \quad \frac{1}{6}
 \end{array}$$

1) $A + \textcircled{1}$ b_3 に関して不定

2) $A + \textcircled{2}, \dots, A + \textcircled{6}$ は Case 2 と同様に 1 つ解は存在しない。

3) $A + \textcircled{7}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2}a_{32} \\ 0 & \frac{1}{2}a_{32} \\ \frac{1}{4}a_{32}^2 & \frac{1}{4}a_{32}^2 \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}}_C = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}}_C$$

$$\text{rank } B = 2$$

$$\text{rank}(B, C) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{24} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{160} - \frac{1}{88}a_{32} \end{pmatrix}$$

(i) $a_{32} \neq -\frac{21}{10}$ とき $\text{rank}(B, C) = 3$, $\text{rank } B \neq \text{rank}(B, C)$ で解は存在しない。

ii) $a_{32} = -\frac{21}{10}$ とき $\text{rank}(B, C) = 2$, $\text{rank } B = \text{rank}(B, C)$ とき解は存在し

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
 0 & \frac{21}{10} & -\frac{21}{10} & \\
 1 & -\frac{11}{42} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{21} \\
 \hline
 & \frac{13}{63} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{126} \quad \frac{1}{6}
 \end{array}$$

で決定される。

Case 4 : ($c_2 = 1, c_3 = \frac{1}{2}, b_4 \neq 0$) b_4 : free parameter

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 1 & 1 & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \\
 1 & 1 - \frac{1}{8b_4} & -\frac{1}{12b_4} & \frac{1}{3b_4} \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} - b_4 & \frac{2}{3} \quad b_4
 \end{array}$$

(1) A+① b_4 に関して不定

(2) A+②, ---, A+⑥ は Case 2 と同様にして解は存在しない。

(3) A+⑦,

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} a_{32} & a_{42} + \frac{1}{2}a_{43} \\ \frac{1}{2}a_{32} & a_{42} + \frac{1}{2}a_{43} \\ a_{32}^2 & (a_{42} + \frac{1}{2}a_{43})^2 \end{pmatrix}} \underset{C}{\begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

$$\text{rank } B = 2.$$

$$\text{rank}(B, C) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{57b_4} (57b_4 - 10) \end{pmatrix}$$

(i) $b_4 \neq \frac{10}{57}$ で $\text{rank}(B, C) = 3$, $\text{rank } B \neq \text{rank}(B, C)$ で解は存在しない。

(ii) $b_4 = \frac{10}{57}$ で $\text{rank}(B, C) = 2$, $\text{rank } B = \text{rank}(B, C)$ で解は存在して

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \\ 1 & -\frac{17}{46} & -\frac{19}{40} & \frac{19}{16} \\ \hline & \frac{1}{6} & -\frac{1}{114} & \frac{2}{3} & \frac{10}{57} \end{array}$$

で決定される。

Case 5 : ($c_2 \neq 0$, $c_3 = \frac{1}{2}$, $b_2 = 0$) c_2 : free parameter

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 C_2 & C_2 & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{4C_2-1}{8C_2} & \frac{1}{8C_2} & \\
 1 & \frac{1-2C_2}{2C_2} & -\frac{1}{2C_2} & 2 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}
 \end{array}$$

(1) $A+\textcircled{1}$ C_2 に関 1 ては不変

(2) $A+\textcircled{2}, A+\textcircled{5}, \dots, A+\textcircled{7}$ は Case 2 と同様に 1 て解は存在しない。

(3) $A+\textcircled{3}, A+\textcircled{4}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} C_2 a_{32} & C_2 a_{42} + \frac{1}{2} a_{43} \\ \frac{1}{2} C_2 a_{32} & C_2 a_{42} + \frac{1}{2} a_{43} \\ \frac{1}{2} C_2^2 a_{32} & C_2^2 a_{42} + \frac{1}{8} a_{43} \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}}_C = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{1}{15} \end{pmatrix}}_C$$

$$\text{rank } B = 2$$

$$\text{rank}(B, C) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{120}(5C_2-2) \end{pmatrix}$$

(i) $C_2 \neq \frac{2}{5}$ とき $\text{rank}(B, C) = 3$ $\text{rank } B \neq \text{rank}(B, C)$ で解は存在しない。

iii) $C_2 = \frac{2}{5}$ とき $\text{rank}(B, C) = 2$, $\text{rank } B = \text{rank}(B, C)$ で解は存在し

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & & & & \\
 \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & & \\
 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & 2 & \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
 \end{array}$$

	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
A+①				
A+②	x	x	x	x
A+③	x	x	x	$t = 5.56 \times 10^{-2}$
A+④	x	x	x	$t = 5.56 \times 10^{-2}$
A+⑤	x	x	x	x
A+⑥	x	x	x	x
A+⑦	$t = 9.65 \times 10^{-2}$	$t = 23.2 \times 10^{-2}$	$t = 25.4 \times 10^{-2}$	x

但し $(|E| < \dagger ML^2)$

数値実験

例 1

$$\begin{cases} y' = -y, & y(0) = 1, & y(x) = e^{-x} \\ z' = -50z, & z(0) = 1, & z(x) = e^{-50x} \end{cases}$$

绝对误差 (Y), $h = \frac{1}{2^5}$

x		R.H	Case 1 ①	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
0.3125	y	3.01 E-10	2.41 E-14	7.91 E-10	4.52 E-10	7.91 E-10	9.04 E-10
	z	1.95 E-6	1.95 E-6	1.95 E-10	1.95 E-10	1.95 E-10	1.95 E-10
2.5	y	1.94 E-9	1.55 E-13	5.08 E-9	2.91 E-9	5.09 E-9	5.81 E-9
	z	0	0	3.77 E-39	0	0	0

例 2

$$y' = \frac{y}{x} \left(1 - \frac{y}{20}\right), \quad y(0) = 1, \quad y(x) = \frac{20}{1 + 19e^{-x}}$$

绝对误差 (Y), $h = \frac{1}{2^5}$

x		R.H	Case 1 ①	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
0.3125	y	7.86 E-10	2.10 E-12	2.07 E-9	1.18 E-9	2.07 E-9	2.36 E-9
2.5	y	1.01 E-8	2.54 E-11	2.65 E-8	1.52 E-8	2.68 E-8	3.02 E-8