

Proper Forcing Axiom 入門

静岡大学教養 玉野 研一 (Ken-ichi Tamano)

§1. Introduction

ある問題を解こうとする。もし、それが ZFC
(= Zermelo Fraenkel 集合論に選択公理を加えたもの
= 私達が通常用いている数学的技法) の範囲で解けるよう
もない気配がしてきたら、1つの解決方法は、自分に能力が
ないかもしれないと、あきらめることである。(しかし、まだ、
救いの道は残されている。その1番初歩的なものとして、Z
FC の範囲で正しいかどうかは決定できないが、成立しても
おかしくなってしまう公理群を適用してみる方法がある。
連続体仮説 (CH) と、Martin の公理 (MA) が代表的で
ある。ここでは、MA によって、正確には $MA(\omega_1)$ と呼ばれる
ものをとする。(なお、 $\neg MA$ のもとでは CH は成立してい
ないことに注意しておく。

さて、いさ反りに、CH を適用してみたい。

失敗したとしても、まだあきらめる必要はない。もっと強力な公理。例えば $\Diamond$ とか $V = L$ があからでである。ところが MA に対しては、今までそれより強い公理が与えられてこなかった。最近、Shelah と Baumgartner によ、開発された proper forcing axiom (PFA) は、その穴をいめるものである。彼らの努力により、PFA は、general topology の問題に対して、かなり強力な武器となることがわかってきた。

本稿の目的は、proper forcing axiom と、その general topology への応用の概説である。内容は、Baumgartner [3] と、Mill [6] の話題を中心とする。

本稿を読む。実際に PFA を使、てみようと思われた方は、まず、Kunen [4] で、forcing の基本を学ぶ。それから、Baumgartner [3] を読むとよい。Forcing へと進んで学ぶといいと思われた方は、Baumgartner [2] や、Shelah [7] をお勧めする。Topology への応用については、Handbook of Set-Theoretic Topology [5] に数多くの survey がある。集合論の勉強には、抽象的なものを、直観的、具体的に何かもうとする。かなりの努力と根気が必要であるが、その苦しみを乗り越えたら、そこに広大な世界が開けているのをまのあたりにすることになるだろう。

§ 2. Partially ordered set

Partially ordered set に関する用語をまとめよう。

：

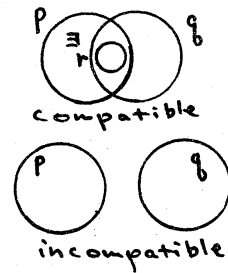
$P = (P, \leq)$ は partially ordered set (p.o.)

である。 $p, q \in P$ に対して $p \leq q$ である。 p は q の extension である。 図では $\textcircled{p}^q$ と表す。 また $p < q$ である。

$p, q \in P$ は集合である。 包含関係 $p \leq q$ の図は $p \subset q$ である。

p, q に共通の extension r がある。

すなわち p, q は compatible である。 否、
すなわち p, q は incompatible である。

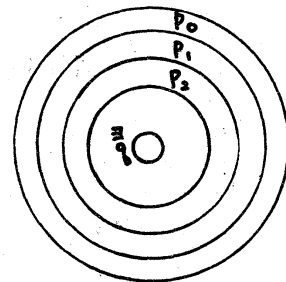


$A \subseteq P$ は pairwise incompatible
のとき、 A は antichain と呼ぶ。



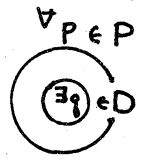
任意の antichain $A \subseteq P$ は $\aleph_0$ の可算
集合である。 P は countable chain
condition (c.c.c.) である。

$p_0 \geq p_1 \geq p_2 \geq \dots$ である任意の可
算列 $\{p_n\} \subseteq P$ に対して $q \in P$ に対して、任意の
 n に対して $p_n \geq q$ となるものが存在する。
すなわち P は countably closed である。



$D \subseteq P$ は、任意の $p \in P$ に対して、

$q \leq p$ となる $q \in D$ が存在するとき. dense であるという.



$G \subseteq P$ は. 次の二つの条件をみたすとき. filter であるという.

(1) 任意の $p, q \in G$ に対して. $r \leq p, q$ となる $r \in G$ が存在する。

(2) 任意の $p, q \in P$ に対して. $p \leq q$ かつ $p \in G$ ならば $q \in G$ 。

§ 3. Proper partially ordered set

PFA は. proper partially ordered set を用いて定義される。Proper p.o. は. 集合論の言葉を用いれば. generic extension におけるある stationarity 性の保存として. 非常に自然で. (1) もある. よりよい定義が与えられる。(2) については集合論の道具を用いない定義を採用する。

P を p.o. とする。二人の player による次の game を与える。0 回戦では. 最初の player I が $p_0 \in P$ を選ぶ。P の要素を選ぶのは. このときだけである。さらに player I は. maximal antichain $A_0 \subseteq P$ を選ぶ。次に player II が A_0 の

可算部分集合 B_0 を選ぶ。1回戦では, player I のまゝ, maximal antichain $A_1 \subseteq P$ を選ぶ。次に, player II の, A_0 の可算部分集合 B'_0 と, A_1 の可算部分集合 B'_1 を選ぶ。2回戦では, player I のまゝ, maximal antichain $A_2 \subseteq P$ を選ぶ。次に, player II の, A_0 の可算部分集合 B''_0 , A_1 の可算部分集合 B''_1 , A_2 の可算部分集合 B''_2 を選ぶ。----- 以下, 同様にこの操作を続ける。

さて, $\omega = \tau$ もしくは, $\exists q \leq p_0$ が存在して, 任意の i に対して $B_i \equiv \bigcup \{ B^n_i : n \geq i \}$ が predense below q となる。player II の勝ちとする。さて, 一般に, $p \in P$ と $A \subseteq P$ に対して, A が predense below p とは, p の任意の extension q の, $\exists r \in A$ と compatible で $\exists$ するということ。

この game で, player II の winning strategy があるとき, P は proper とあるという。

例. P は, 次のいずれかの条件を満たせば, proper とある。

(a) P は countable chain condition を満たす。

(b) P は countably closed とある。

§ 4. Martin's axiom & proper forcing axiom

MA に対して, PFA は, countable chain condition
 をみたす p.o. と, proper p.o. とを区別する。これに
 より, ω_1 上の MA とは, 正確には MA(ω_1) と呼ばれるもの
 である。

Martin's axiom (MA). P o. countable
 chain condition をみたす p.o. に対して, P の dense subset の
 列 $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ に対して, すべて D_α と交わる
 filter $G \subseteq P$ が存在する。

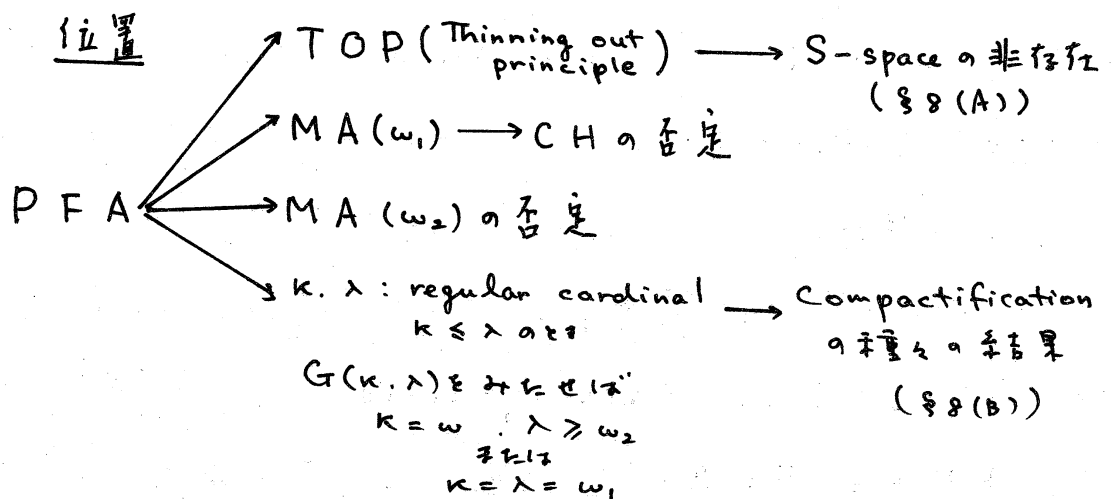
Proper forcing axiom (PFA). P o. proper p.o. に対して, P の dense subset の列
 $\{D_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ に対して, すべて D_α と交わる filter
 $G \subseteq P$ が存在する。

§ 3 より, countable chain condition をみたす
 p.o. は, proper である。PFA は MA より強い公理である
 ことがわかる。

§ 5. PFA の無矛盾性と位置

定理. $ZFC + \text{「supercompact cardinal の存在」}$
 が無矛盾ならば, $ZFC + \text{「}\aleph_0 = \aleph_2\text{」} + PFA$ は無矛盾である。
 3.

Supercompact cardinal は, 非常に大きな cardinal であり, その存在の無矛盾性は, measurable cardinal と同様, ZFC の範疇では決定できない。したがって必ずしも PFA が無矛盾だとはいえないのである。 PFA を用いて証明された命題は, 今までのとおり, すべて, 複雑な iterated forcing による方法を用いた。 ZFC と無矛盾であることがわかってゐる。当然, PFA は無矛盾だと思つて, 1 1 の 2 はないだろう。



§ 6. Generic extension と PFA

V を ZFC 集合論の可算モデルとする。理論体系は、もし、それが無矛盾であれば、必ず可算モデルをもつことに注意してある。これは、我々が使用している言語全体の可算性と関連している。

さて、 $P \in V$ を p.o. とするとき、filter $G \subseteq P$ で P の任意の dense subset $D \in V$ と交わるものが存在することを知っている。このような G を P -generic over V と呼ぶ。このとき V の generic extension $V[G]$ を

$V \cup \{G\} \subseteq V[G]$ で、集合論的操作について閉じている ZFC の最小のモデルと定義する。Partially ordered set P の選び方により、 $V[G]$ は、さまざまな性質をみたすモデルとなる、 P の選び方の効果を調べるための主要な武器は、forcing と呼ばれる手法である。そのため、generic extension を用いて、ある条件をみたすモデルを作り、その条件の無矛盾性を示すことも、forcing による手法と呼ばれることが多々ある。

いま、 $P \in V$ を p.o.、 $G \in P$ -generic over V 、 $Q \in V[G]$ を p.o.、 $H \in Q$ -generic over $V[G]$ とするとき、ある p.o. $P * Q \in V$ を定義して、 $P * Q$ を用いて generic

extension により, $V[G][H]$ の効果が得られるようにできる。直観的に言えば, $P * Q$ は, P と Q の両方の効果を同時に生み出す。PFA の応用には, 次の定理が不可欠である。

定理. P が V の proper p.o. で, Q が $V[G]$ の proper p.o. ならば, $P * Q$ は V の proper p.o. である。

§ 7. PFA の使用法

Topology への応用法は, 少し複雑なので, ここでは, 実数直線 R の部分集合の順序同型問題を例にとり, 解説することにしてしよう。よく知られているように, R の dense な可算部分集合は, すべて, 有理数全体の集合 Q と順序同型である。そこで, 可算濃度の濃度 $\aleph_1$ への拡張を試みる。部分集合 $A \subseteq R$ は, 任意の区間との交わりの濃度が $\aleph_1$ であるとき, $\aleph_1$ -dense であるという。

問題. R の $\aleph_1$ -dense な部分集合は, すべて, 順序同型であるか?

連続体仮説 CH のことでは、答は No である。例
えば、 R と $R - \{0\}$ は、ともに $\aleph_1$ -dense な部分集合だが、
順序同型ではない。 CH を仮定すれば、順序同型でない、
 $\aleph_1$ -dense な R の部分集合をたくさん作れることが証明できる
([1])。

これに反して、Baumgartner は、次の定理を証明し
た。

定理. PFA を仮定すれば、 R の $\aleph_1$ -dense な部
分集合は、すべて順序同型である。

(証明のフウトライン) $V \models ZFC + PFA$ の可
算モデルとし、我々は V に住んでいると考える。

まず、 V で、partially ordered set $P = \{f :$
 $f \text{ は } \omega_1 = [0, \omega_1) \text{ の部分集合を定義域とし、 } 2^\omega = \{0, 1\}^\omega$
 $\text{を値域とする 1対1写像 (=単射)} \}$ を考える。ここで、順序
は、 f が g の拡張であるとき $f \leq g$ と定義する。このとき、
 P は、countably closed であり、 $G \in P$ -generic over V と
すれば、 $V[G]$ は連続体仮説 CH をみたす。実際、
 $\varphi = \bigcup G : \omega_1 \rightarrow 2^\omega$ を考えると、 $\varphi \in V[G]$ であり、 φ は ω_1
から 2^ω への bijection を与える。

次に、 $V[G]$ で countable chain condition をみたす partially ordered set Q を、もし H が Q -generic over $V[G]$ ならば、いって $V[G][H]$ の中に、 A, B 間の順序同型が存在するようにとる。ここには、 $V[G]$ が CH をみたすことを用いる。

最後の仕上げには、手品のような次の補題を用いる。遠い世界を旅して、もし、宝物がみつかったら、実は、あなたのお家に、それと同じくらい大切なものがある、と云う主張である。

補題. V は、PFA をみたすモデルとする。 $A, B \in V$ を濃度 $\leq \aleph_1$ の全順序集合とする。もし、 $P * Q$ が proper で、 $V[G][H]$ の中に順序同型 $f: A \rightarrow B$ が存在すれば、ある順序同型 $g: A \rightarrow B$ が V の中に存在する。

定理の証明にもどろう。 P, Q は、§3 例より、ともに proper p.o. なるので、§6 定理を用いると、 $P * Q$ も proper である。(したがって、上の補題が使えて、我々の世界 V の中に、 A, B 間の順序同型が存在する。

§ 8. Topology への応用

(A). S-space. L-space 問題

空間 X は. 任意の部分集合が separable (Lindelöf) のとき. hereditarily separable (hereditarily Lindelöf) という。距離空間など. 我々が与える様な空間で. この 2 つの概念は一致しているので. ひととひと全く同値な性質なのではないかということだ. 古くから問題になっていた。

正則空間 X は. hereditarily separable だが hereditarily Lindelöf でないとき S-space. hereditarily Lindelöf だが hereditarily separable でないとき L-space という。上記の問題は. 正則空間に限れば. 次のように言い換えられる。

問題 1. S-space は存在するか?

問題 2. L-space は存在するか?

1935 年に. Kurepa は. L-space が存在することだ ZFC と無矛盾値であることを示した。かなり後. 1972 年に. Rudin は. S-space の存在の無矛盾性を証明した。彼ら

は、共に、Suslin lineを用いて求める空間を構成している。
最近、S-space, L-spaceに関する研究がさかんにあつてあ
り、多くの研究者によつて、さまざまな良い性質を備えた S-
space, L-space の存在の無矛盾性が証明されている。

一方、存在しないことの無矛盾性に関しては、1981
年に、ようやく、Todorćević によつて、S-space の非存在
の無矛盾性が示された。その証明法は、iterated forcing
による複雑な手法だが、これ、その後、Baumgartner は、
PFA を仮定すれば、S-space の非存在が証明できることを
示した。そして、さらに、Baumgartner は、もっと弱い条件
でも証明できることを示した。すなわち、次の定理が成立す
る。

定理. $MA + TOP$ を仮定すれば、S-space は
存在しない。

ここで、 TOP (Thinning Out Principle) と
は、次の条件である。

(TOP): $A, B \subseteq [0, \omega_1)$ を非可算集合、

$\langle S_\alpha : \alpha \in B \rangle$ を任意の $\alpha \in B$ に対し $S_\alpha \subseteq [0, \alpha)$ とみ
た集合族とする。さらに、任意の非可算集合 $X \subseteq A$ に対し

て、ある $\beta < \omega_1$ が存在して、 $\{X \cap S_\alpha : \alpha > \beta\}$ が finite intersection property をみたすとは定すれば、ある非可算集合 $X \subseteq A$ と、 $Y \subseteq B$ が存在して、任意の $\alpha \in Y$ に対して、 $X \cap [0, \alpha) \subseteq S_\alpha$ となる。

PFA から TOP が導かれることがわかってゐる。
次の問題は、相違なく、古典的な問題として残ってゐる。

問題. L -space の非存在は、ZFC と無矛盾か？

特に、PFA の仮定より L -space の非存在が言えるかどうかは美にかかるところである。

(B). 自然数空間 ω の Stone-Čech コンパクト化 $\beta\omega$

Mill [6] によれば、 $\beta\omega$ は、3つの顔をもつ怪物である。連続体仮説 CH を仮定したときの顔は、親しみやすく、ほほえみいっぱいの顔で、いろいろなことですが、ヨリとわかる。CH を否定したときの顔は、実に混乱していて、今まで信じていたことが急に信じられなくなる。何が正しく、

何が誤りなのか断言できなくなる。最後の願は、何も仮定しない ZFC の筋だが、ZFC で何か新しい良い結果を得ようとするとき、組合せ的議論を巧みに用いて、奴隷のように必死に働かなければならない。

CH を仮定した $\beta\omega$ の議論では、次の Parovičenko の定理が基本的である。空間 X は、任意の cozero 集合が C^* -embedded なとき、F-space という。位相空間 X に対して、 $X^* = \beta X - X$ と定義する。

定理 [CH]. 空間 X に対して、次は同値である。

- (1) X は ω^* と同相である。
- (2) X は weight が $\aleph$ 以下のコンパクト、0次元 F-space で、 X の任意の空でない G_δ 集合が内点をもつ。

Douwen と Mill は、上記の定理が成立することと、連続体仮説 CH が同値であることを示した。さらに、彼らは、明らかに同相だと予想される $(\omega \times (\omega+1))^*$ と、 ω^* が、forcing を用いて作られた Shelah のモデルで、同相でないことを示した。この2つの空間は、CH のもとでは、Parovičenko の定理より同相であることがわかる。CH を仮定すれば、次の定理が成立する。

定理 (Parovičenko) [CH]. Weight が $\mathfrak{c}$ 以下のどんなコンパクト空間も ω^* の連続像である。

これに反して, Baumgartner は, proper forcing axiom を用いて, 次の定理を証明した。

定理 [PFA]. Weight が $\mathfrak{c}$ のコンパクト空間で, ω^* の連続像とはならないものが存在する。

その後, Mill は, もっと弱い条件でも, そのようなものの存在が言えることを示した。

定理 (Mill). $MA(<\mathfrak{c})$ と, CH の否定と, $G(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$ の否定を仮定すれば, weight $\mathfrak{c}$ のコンパクト空間で, ω^* の連続像とはならないものが存在する。

ここで, $MA(<\mathfrak{c})$ というのは, §4 の MA の定義において, ω_1 を任意の $\kappa < \mathfrak{c}$ に置きかえて条件が成立するという命題である。これを MA と記す場合も多い。また, $\kappa, \lambda \in \text{regular cardinal}$ で, $\kappa \leq \lambda$ としとき, $G(\kappa, \lambda)$ とは, 次の命題を表す。

$G(\kappa, \lambda) : \omega^*$ の clopen set の列 $\langle U_\xi : \xi < \kappa \rangle$
 と $\langle V_\xi : \xi < \lambda \rangle$ が存在して、次の4つの条件を満たす。

- (1) $U_\xi \subset U_\eta \quad (\xi < \eta < \kappa)$
- (2) $V_\xi \subset V_\eta \quad (\xi < \eta < \lambda)$
- (3) $(\bigcup_{\xi < \kappa} U_\xi) \cap (\bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi) = \emptyset$
- (4) $\overline{(\bigcup_{\xi < \kappa} U_\xi)} \cap \overline{(\bigcup_{\xi < \lambda} V_\xi)} \neq \emptyset$

次の定理が、Baumgartnerにより示されている。

定理 [PFA] $G(\kappa, \lambda)$ が成立する regular
 cardinal κ, λ について $\kappa \leq \lambda$ となるものは、 $\kappa = \omega, \lambda \geq \omega_2$
 となる場合と、 $\kappa = \lambda = \omega_1$ となる場合しかない。

この定理より、PFA を仮定すれば、 $\omega_1 < \mathfrak{c}$ に注意
 すると、 $G(\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$ が成立しないことがわかる。(これによって、
 PFA を仮定すれば、Mill の定理の条件が導かれる。

$G(\kappa, \lambda)$ は $\beta\omega$ の研究に重要な役割を果たして
 いる。詳しくは、Mill [6] を参照していただきたい。

REFERENCES

- [1] J. E. Baumgartner, Order types of real numbers and other uncountable linear orderings, Ordered Sets, Proc. Banff Conference, 1981, D. Reidel, Boston, 239-277.
- [2] _____, Iterated forcing, Surveys in Set Theory, London Math. Soc. Lecture Note Series 87, 1983, 1-59.
- [3] _____, Applications of the proper forcing axiom, Handbook of Set Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [4] K. Kunen, Set Theory, An Introduction to Independence Proofs, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [5] K. Kunen and J. E. Vaughan ed., Handbook of Set Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [6] J. van Mill, An introduction to $\beta\omega$, Handbook of Set Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [7] S. Shelah, Proper Forcing, Lecture Notes in Math. 940, Springer-Verlag, Berlin, 1982.