

elliptic surface 上の vector bundle

名大理 竹本史夫

S を代数的閉体 k 上 non-singular projective surface,
 H を S 上 ample line bundle とする。

Definition S 上の vector bundle E が H-stable とは,
 E のすべての non-trivial, non-torsion quotient sheaf F について
 $d(E, H)/r(E) < d(F, H)/r(F)$ が成り立つこととする。

ここで $r(F)$ は F の rank, $d(F, H)$ は $(c_1(F), H)$ である。
 ($c_1(F)$ は F の first Chern class とする)

実は 上の Definition は 次の様に言ってもよい。 E が
 H-stable とは, 任意の birational morph. $f: X \rightarrow S$ (X は
 non-singular projective surface) 及び $f^*(E)$ の任意の quotient
 bundle F に対して, $d(E, H)/r(E) < d(F, f^*(H))/r(F)$ が成り
 立つ事とする。

H-stable について, 次の事が言える。

- 1) line bundle は H-stable
- 2) H -stable $\iff H^{\otimes n}$ -stable $n > 0$
- 3) E が H-stable $\iff E \otimes L$ が H-stable L : line bundle

4) E が H -stable $\iff E$ の dual bundle E^* が H -stable

5) H -stable $\Rightarrow$ simple i.e. global endomorphism は constant のみ。

注) 1) ~ 5) は, 任意次元の variety についても成り立つ。
(なお, 去年 (1970) の数理論での "代数多様体, 複素多様体の理論" 研究集会では, ここで述べた H -stable を H -weakly stable と言った。)

次に述べる lemma は, H -stable vector bundle を具体的に決定するのに有用である。

Lemma E を S 上 H -stable, その Euler-Poincaré characteristic $\chi(E)$ が 正で, かつ $d(E^* \otimes K_S, H)$ が 負ならば, $H^0(E) \neq 0$ (ここで K_S は S の canonical line bundle)

又, この lemma を用いて, S 上 rank 2 の H -stable vector bundle で numerically Chern classes $c_1(E), c_2(E)$ を fix したものの全体は bounded family をなす。つまり, algebraic family に含まれることを示すことができる。

以下 vector bundle はすべて rank 2 とする。

Prop. (1), (2) のいずれかが成り立つ時, (rank 2 の) vector bundle E が ある H について H -stable ならば, すべての ample line bundle H' についても H' -stable

$$(1) \quad c_2(E) - 4c_1(E) > 0$$

$$(2) \quad c^2(E) - 4c_2(E) = 0$$

(2a) S が geometrically ruled or abelian
or

(2b) $k = \mathbb{C}$, S が $\neq 1$ 種 exceptional curve を含まない.

証) $c^2(E) - 4c_2(E) = -c_2(\text{End}(E))$ だから, $N(E) = c^2(E) - 4c_2(E)$ とおけば, $N(E) = N(E^*) = N(E \otimes L)$ L : line bundle

1) S が abelian surface のとき, Riemann-Roch の定理を用いて, E が simple ならば, $c^2(E) - 4c_2(E) \leq 0$ (但し $\text{ch } k \neq 2$)

$c^2(E) - 4c_2(E) = 0$ のとき, E : H-stable $\Leftrightarrow E$: simple 更に $k = \mathbb{C}$ のとき (See Oda: Vector bundles on abelian surfaces, Inv. Math. vol. 13 (1971)) E : simple $\Leftrightarrow E = \varphi_*(L)$ ここで, φ は isogeny $X \rightarrow S$, L は X 上 line bundle for $\varphi^* \alpha \neq 0$ に対して $T_\alpha^*(L) \not\subset L$, T_α は α による translation

C : curve, V : C 上 rank 2 の vector bundle. $\therefore$ のとき $\mathbb{P}(V)$ を geometrically ruled surface とする。 $p: \mathbb{P}(V) \rightarrow C$ canonical projection.

2) S が geometrically ruled surface のとき, Prop. を用いて E が H-stable $\Rightarrow c^2(E) - 4c_2(E) \leq 0$, $c^2(E) - 4c_2(E) = 0$ のとき, E が H-stable $\Leftrightarrow E = p^*(\tilde{E}) \otimes L$ ここで $\tilde{E}$ は C 上 stable vector bundle, L は S 上 line bundle.

$c_1^2(E) - 4c_2(E) < 0$ で H -stable vector bundle が完全に分類できる例を示そう。 $V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$ $a \geq 0$, $H_{1,m} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \otimes \mathcal{P}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$ $m > 0$. A を rank 2 の $\mathbb{P}(V)$ 上 $H_{1,m}$ -stable vector bundle で $c_1(E) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \otimes \mathcal{P}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a+m+1))$, $c_2(E) = 0$ なるもの全体とする。このとき, A から t -次元 projective space $\mathbb{P}^t(k)$ への bijection φ ($t = a+2m-1$) へ, $\mathbb{P}^t \times_k \mathbb{P}(V)$ 上の vector bundle $\mathcal{E}$ があって, $\forall E \in A$ は $\mathcal{E}|_{\varphi(E) \times \mathbb{P}(V)}$ と同型 かつ $\dim_k H^1(\text{End}(E)) = t$.

2') S が projective plane $\mathbb{P}^2$ のとき, Riemann-Roch の定理より E が simple $\Rightarrow c_1^2(E) - 4c_2(E) < 0$. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)$ $m = \min \{ k \mid H^0(E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k)) \neq 0 \}$ とおく。このとき, E simple $\Leftrightarrow E: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ -stable $\Leftrightarrow 2m+n > 0$. (Schwarzenberger) $\mathbb{P}^2$ の一点を blow up すれば "geometrically ruled surface" になる事を用いて, " $c_1^2(E) - 4c_2(E) = -3$ なる simple bundle は, line bundle で tensor して作らなすことを除けば, tangent bundle のみである" ことが言える. etc.... 注) 2頁で述べた事を用いれば, fixed chern classes $c_1(E), c_2(E)$ を持つ $\mathbb{P}^2$ 上 rank 2 の simple bundle 全体は bounded family を成す。

3) S が elliptic surface のとき, まだ部分的にしか

あからない。例えば, S が basic elliptic bundle
 のとき, ($S \xrightarrow{\pi} \Delta$ Δ : non-singular proj. curve) $\tilde{E}$ が
 Δ 上 stable $\Rightarrow \pi^*(\tilde{E})$ は H -stable. 或いは, S が basic
 hyperelliptic surface のとき, E が S 上 H -stable ならば,
 $c_1^2(E) - 4c_2(E) \leq 0$, etc.

例) S が basic hyperelliptic surface, $c_1^2(E) - 4c_2(E) = 0$
 のとき, E が simple $\Leftrightarrow E$: H -stable or $\exists L$: line bundle
 $0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow E \otimes L \rightarrow K_S^{-1} \rightarrow 0$ non-trivial ext. ($E \otimes L$ は
 not H -stable)

参考文献としては, Stable vector bundles on algebraic
 surfaces to appear in Nagoya Math. Journal. を見て下さい。