

$U^*(; Z_q)$ 理論の Admissible 積 について

阪市大. 工. 鎌 田 正 良

§ 1. Admissible 積

generalized cohomology theory $\tilde{h}$ が積

$$\mu: \tilde{h}^i(X) \otimes \tilde{h}^j(Y) \longrightarrow \tilde{h}^{i+j}(X \wedge Y)$$

をもつとする. $M_q = S^1 \vee_q e^2$ で $(Z_q, 2)$ 型の co-Moore 空間を表わすとき,

$$\tilde{h}^j(X; Z_q) = \tilde{h}^{j+2}(X \wedge M_q)$$

と置くことによって, $\tilde{h}(\cdot; Z_q)$ は generalized cohomology theory になるが, Araki-Toda [1] によって, $\tilde{h}(\cdot; Z_q)$ 理論における admissible 積が研究され, 次の結果が得られた.

定理 A ([1], I) $\tilde{h}$ の積が associative とする. $q \not\equiv 2 \pmod{4}$ の時は, 常に admissible 積が $\tilde{h}(\cdot; Z_q)$ に存在する. $q \equiv 2 \pmod{4}$ の時は, $\tilde{h}$ の積が associative で commutative, ($\mu(x \otimes y) = (-1)^{\deg x \cdot \deg y} \mu(y \otimes x)$), であって, Hopf map

$\eta: S^3 \rightarrow S^2$ より誘導される作用 $\eta^{**}: \tilde{h}^i(\cdot \wedge S^2) \rightarrow \tilde{h}^i(\cdot \wedge S^3)$ が常に零ならば, *admissible* 積が $\tilde{h}(\cdot; Z_q)$ に存在する.

$\tilde{h}(\cdot; Z_q)$ 理論における *admissible* 積 $\mu_q: \tilde{h}^i(X; Z_q) \otimes \tilde{h}^j(Y; Z_q) \rightarrow \tilde{h}^{i+j}(X \wedge Y; Z_q)$ が $\mu_q(x \otimes y) = (-1)^{\deg x \deg y} \mu_q(y \otimes x)$ を満たす時, μ_q は可換であると定義する.

定理 B ([1], II) $\tilde{h}$ の積が *associative, commutative* とする. $q \equiv 0 \pmod{4}$ で $(\eta^2 \pi)^{**} = 0$ ならば, $\tilde{h}(\cdot; Z_q)$ に可換な *admissible* 積が存在する. 但し, $\pi: M_q \rightarrow S^2$ は *projection* である. q が奇数ならば, 常に可換な *admissible* 積は存在する.

$\bar{\eta} \in [S^2 M_2, S^2] \cong \{S^2 M_2, S^2\}$ を $\bar{\eta} \circ i: S^3 \subset S^2 M_2 \rightarrow S^2$ が *Hopf map* で表わされるような元とする. $\bar{\eta}$ によって次の写像を得る.

$$\bar{\eta}^*: \tilde{h}^0(S^0) \approx \tilde{h}^2(S^2) \rightarrow \tilde{h}^2(S^2 M_2) \approx \tilde{h}^0(M_2)$$

定理 C ([1], II) $\tilde{h}$ の積が *associative commutative* とし, $\eta^{**} = 0$ とする. $q \equiv 2 \pmod{4}$ の時, $\tilde{h}(\cdot; Z_q)$ に可換な *admissible* 積が存在する為の必要十分条件は $\bar{\eta}^*(1) = 0$ である.

$\hat{U}^*(\cdot)$ -理論 [3] について上の定理を調べることにする. 我

々は以後，基点をもつ有限CW-複体の圏で考える．任意の有限CW-複体 X に対し，次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}^k(X \wedge S^2) & \xrightarrow{\eta^{**}} & \tilde{U}^k(X \wedge S^3) \\ \mu \uparrow \cong & & \uparrow \mu \\ \tilde{U}^{k-2}(X) \otimes_{\tilde{U}^*} \tilde{U}^2(S^2) & \xrightarrow{1 \otimes \eta^*} & \tilde{U}^{k-2}(X) \otimes_{\tilde{U}^*} \tilde{U}^2(S^3) \end{array}$$

$\tilde{U}^2(S^3) = 0$ であるから $\eta^{**} = 0$ ．また $(\eta^2 \pi)^{**} = 0$ である．従って定理 A, B より直接次の結果を得る．

定理 1.1 $\tilde{U}^*(; \mathbb{Z}_q)$ 理論においては常に *admissible* 積が存在する．さらに， $q \not\equiv 2 \pmod{4}$ の時は可換な *admissible* 積が存在する．

以下で， $q \equiv 2 \pmod{4}$ の場合を調べる．定理 C で扱われる元 $\bar{\eta}$ を表わす写像 $f: S^4 M_2 \longrightarrow S^4$ を考える．明らかに f は次の可換な図式の意味で $\bar{\eta}^*$ を誘導する．

$$(1.1) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{U}^0(S^0) & \xrightarrow{\bar{\eta}^*} & \tilde{U}^0(M_2) \\ \parallel & & \parallel \\ \tilde{U}^4(S^4) & \xrightarrow{f^*} & \tilde{U}^4(S^4 M_2) \stackrel{S_*}{\approx} \tilde{U}^5(S^5 M_2) \end{array}$$

一方 f の写像錐を $L = S^4 UC(S^4 M_2)$ とすると，*cofibration*

$$S^4 \longrightarrow L \longrightarrow S^5 M_2$$

に対する exact 列より次の exact 列

$$\tilde{U}^4(S^4) \xrightarrow{S_* f^*} \tilde{U}^5(S^5 M_2) \longrightarrow \tilde{U}^5(L)$$

が存在する. L について cohomology 群の構造は

$$(1.2) \quad \tilde{H}^k(L) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=4 \\ \mathbb{Z}_2 & k=7 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で, $Sq^3 \circ \rho_2 : \tilde{H}^4(L) \rightarrow \tilde{H}^4(L; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \tilde{H}^7(L; \mathbb{Z}_2)$ は non-trivial である.

ρ_2 は reduction homomorphism. ([1], 6.3).

定理 1.2 有限 CW 複体 X に対して, $\tilde{U}^*(X)$ のスペクトル系列を $\{E_r^{p,q}\}$, $E_2^{p,q} \cong \tilde{H}^p(X, U^q)$, とする. この時, 同型

$$\tilde{\mu} : E_3^{p,q} \cong \tilde{H}^p(X; U^q)$$

が存在し, 次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} E_3^{p,0} & \xrightarrow{d_3^{p,0}} & E_3^{p+3,-2} \\ \cong \downarrow \tilde{\mu} & & \cong \downarrow \tilde{\mu} \\ \tilde{H}^p(X) & & \tilde{H}^{p+3}(X) \otimes U^{-2} \\ \downarrow \rho_2 & & \uparrow \beta_2 \otimes id \\ \tilde{H}^p(X; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^2 \otimes [CP(1)]} & \tilde{H}^{p+2}(X; \mathbb{Z}_2) \otimes U^{-2} \end{array}$$

但し, β_2 は Bockstein homomorphism.

証明は § 3 で与えられる.

補題 1.3. $\tilde{U}^5(L) \cong 0$

証明 $\tilde{U}^5(L)$ の filtration $\{J^{p,q}\}$, $J^{p,q}/J^{p+1,q-1} \cong E_\infty^{p,q}$, を考える.

$$\tilde{U}^5(L) \cong J^{0,5} \cong \dots \cong J^{7,-2},$$

$J^{7,-2}/J^{8,-3} \cong E_\infty^{7,-2}$ で $J^{8,-3} \cong 0$ である. $U^{\text{odd}} \cong 0$ と (1.2) より,

$$E_\infty^{7,-2} \cong \dots \cong E_4^{7,-2}$$

一方, 定理 1.2 と $S_q^3 \circ p_2 | \tilde{H}^4(L)$ が non-trivial であることから, $d_3^{4,0}: E_3^{4,0} \cong \mathbb{Z} \longrightarrow E_3^{7,-2} \cong \mathbb{Z}_2$ は non-trivial である.

$d_3^{7,-2}$ は零写像であるから, $E_4^{7,-2} \cong 0$.

図式 (1.1) で, $\tilde{U}^0(S^0) \cong \mathbb{Z}$, $\tilde{U}^0(M_2) \cong \mathbb{Z}_2$ に注意すると, 補題 1.3 より $\tilde{U}^*(1) \neq 0$ 従って定理 C より直ちに次の結果を得る.

定理 1.4 $q \equiv 2 \pmod{4}$ の時, $\tilde{U}^*(; \mathbb{Z}_q)$ には可換な admissible 積は存在しない.

§ 2. $\tilde{U}^{p+1}(X^{p+3}, X^{p+2})$ の元.

有限 CW 複体 X に対して, $\tilde{U}^*(X)$ のスペクトル系列 $\{E_r^{p,q}\}$ は, $E_r^{p,q} = Z_r^{p,q} / B_r^{p,q}$,

$$Z_r^{p,q} = \mathcal{I}_m \{ \tilde{U}^{p+q}(X^{p+r-1}/X^{p-1}) \xrightarrow{j^*} \tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1}) \}$$

$$B_r^{p,q} = \mathcal{I}_m \{ \tilde{U}^{p+q-1}(X^{p-1}/X^{p-r}) \xrightarrow{\delta} \tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1}) \}$$

で, 与えられる. differential $d_r^{p,q}$ は定義より [2],

$$d_r^{p,q} \{ j^*(x) \} = \{ \delta(x) \},$$

但し, $j^*: \tilde{U}^{p+q}(X^{p+q-1}/X^{p-1}) \rightarrow \tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1})$, $\delta: \tilde{U}^{p+q}(X^{p+q-1}/X^{p-1})$
 $\rightarrow \tilde{U}^{p+q+1}(X^{p+q}/X^{p+q-1})$, であることが解る. 一方, 同型
 $\tilde{\mu}: E_3^{p,q} = \mathcal{I}_m \{ \tilde{U}^{p+q}(X^{p+2}/X^{p-1}) \xrightarrow{j^*} \tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1}) \} / \mathcal{I}_m \{ \tilde{U}^{p+q-1}(X^{p+1}/X^{p-2}) \} \rightarrow \tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1}) \}$
 $\longrightarrow \tilde{H}^p(X; U^q)$

は次のように与えられる. 先づ同型

$$\mu_0: \tilde{U}^{p+q}(S^p) \longrightarrow \tilde{H}^p(S^p) \otimes U^q$$

は, $x \in \tilde{U}^{p+q}(S^p)$ に対し, $\mu_0(x) = e^p \otimes S_*^{-p}(x)$ (S_*^{-p} は懸垂同型で e^p は $\tilde{H}^p(S^p)$ の生成元) で与えられる. これは次の同型

$$\mu_0: \tilde{U}^{p+q}(X^p/X^{p-1}) \longrightarrow \tilde{H}^p(X^p/X^{p-1}) \otimes U^q = C^p(X) \otimes U^q$$

を誘導する. 但し $C^p(X)$ は X の cochain group を表わす.

同型 $\tilde{\mu}$ は $\tilde{\mu}\{j^*(x)\} = [\mu_0(j^*(x))]$ で与えられる. $[\]$ は cohomology 群の元を表わす.

特に $d_3^{p,0}$ について考えると

$$(2.1) \quad d_3^{p,0} \{j^*(x)\} = \{\delta(x)\}$$

$$j^*: \tilde{U}^p(X^{p+2}/X^{p-1}) \longrightarrow \tilde{U}^p(X^p/X^{p-1})$$

$$\delta: \tilde{U}^p(X^{p+2}/X^{p-1}) \longrightarrow \tilde{U}^{p+1}(X^{p+3}/X^{p+2})$$

である. ここで, $\tilde{U}^{p+1}(X^{p+3}/X^{p+2})$ の元について調べる.

定理 2.1 $x \in \tilde{U}^{p+1}(X^{p+3}/X^{p+2})$ は $f: S^{2m-p-1}(X^{p+3}/X^{p+2}) \longrightarrow MU(m)$ で表わされていると仮定すると

$$\mu_0(x) = -\frac{1}{2} S_*^{p+1-2m} f^* \Phi_\xi(C_1(\xi^m)) \otimes [CP(1)]$$

但し, ξ^m は $BU(m)$ 上の複素普遍バンドル, Φ_ξ は Thom 同型, $c_1(\xi^m)$ は ξ^m の 1-st Chern class, $[CP(1)]$ は一次元複素射影空間の bordism class.

証明 μ_0 の定義より $\tilde{U}^{p+1}(S^{p+3})$ の元 $x=[f]$, $f: S^{2m-p-1, p+3} \rightarrow MU(m)$ について証明すれば十分である. $1 \in \tilde{U}^0(S^0)$ で単位元を表わし, $S_*^{-p-3}(x) = [V^2] \in U^{-2}$ と置くと,

$$x = S_*^{p+3}(1) \cdot [V^2]$$

となる. f を $MU(m) \supset BU(m)$ に対し t -regular な写像 f' で近似すると, $f'^{-1}(BU(m)) = V^2$. $V^2 \subset S^{2m+2}$ の normal bundle を η とすると bundle 写像

$$\bar{f}': \eta \longrightarrow \xi^m$$

が誘導される. η の Thom complex $T(\eta)$ への S^{2m+2} からの自然な写像を J とすると, J と $\bar{f}'$ が誘導する写像 $\hat{f}': T(\eta) \rightarrow MU(m)$ との合成 $\hat{f}' \circ J$ と f は homotopic である, [5].. 一方 U^{-2} の生成元は $[CP(1)]$ である. $[V^2] = a[CP(1)]$ とおくと,

$$a = \frac{1}{2} \langle c_1(V^2), [V^2] \rangle.$$

ここで, $\langle, \rangle$ は V^2 の 1-st Chern class の Chern number.

$$\mu_0(x) = \frac{1}{2} \langle c_1(V^2), [V^2] \rangle e^{p+3} \otimes [CP(1)]$$

$c_1(V^2)$ は V^2 の tangent bundle の 1-st Chern class であるから

$$c_1(V^2) = -c_1(\eta)$$

$$\text{一方, } \langle c_1(\eta), [V^2] \rangle = \langle J^* \hat{f}'^* \Phi_\xi(c_1(\xi^m)), e_{2m+2} \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \langle f^* \Phi_{\xi}(c_1(\xi^m)), e_{2m+2} \rangle \\
&= \langle S_*^{p+1-2m} f^* \Phi_{\xi}(c_1(\xi^m)), e_{p+3} \rangle
\end{aligned}$$

§ 3. 定理 1.2 の証明

(2.1) で与えられる式より, $[\mu_0(\delta(x))] \in \tilde{H}^{p+3}(X) \otimes U^{-2}$ が $[\mu_0(j^*(x))] \in \tilde{H}^p(X)$ でどのように表わされるか調べればよい.
 $x \in \tilde{U}^p(X^{p+2}/X^{p-1})$ は $g: S^{2m-p}(X^{p+2}/X^{p-1}) \rightarrow MU(m)$ で表わされる物とする. $\delta(x)$ は homotopy 同値写像 $S^{2m-p-1}(X^{p+3}/X^{p+2}) \rightarrow S^{2m-p-1}(X^{p+3}/X^{p-1} \cup C(X^{p+2}/X^{p-1}))$ と projection $S^{2m-p-1}(X^{p+3}/X^{p-1} \cup C(X^{p+2}/X^{p-1})) \rightarrow S^{2m-p}(X^{p+2}/X^{p-1})$ の合成写像 r と g との合成

$$g \circ r: S^{2m-p-1}(X^{p+3}/X^{p+2}) \rightarrow S^{2m-p}(X^{p+2}/X^{p-1}) \rightarrow MU(m)$$

で表わされる. 定理 2.1 より

$$\mu_0(\delta(x)) = -\frac{1}{2} S_*^{p+1-2m} r^* g^* \Phi_{\xi}(c_1(\xi^m)) \otimes [CP(1)]$$

$r^* S_* = -\partial$ (∂ は coboundary homomorphism) なる関係 [7], があることに注意して,

$$\mu_0(\delta(x)) = \frac{1}{2} \partial S_*^{p-2m} g^* \Phi_{\xi}(c_1(\xi^m)) \otimes [CP(1)].$$

簡単のために,

$$y = S_*^{p-2m} g^* \Phi_{\xi}(c_1(\xi^m)) \in \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p-1})$$

とおく. $\tilde{j}^*: \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p+1}) \rightarrow \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p-1})$ は onto であるから, $\tilde{j}^*(z) = y$ となる元 $z \in \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p+1})$ が存在する. z の reduction mod 2 homomorphism β_2 の像 $\beta_2(z)$ は cocycle であ

るから,

$$(3.1) \quad [\mu_0(\delta(x))] = \beta_2[\rho_2(z)] \otimes [CP(1)]$$

ここで, β_2 は Bockstein homomorphism で $[\]$ は cohomology の元を表わす. $\mathbb{Z}_2$ -係数群で次の可換な図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{H}^{p+2}(X) & \xrightarrow{i_1^*} & \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}) & \xleftarrow{k_1^*} & \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p-1}) & \xleftarrow{j^*} & \tilde{H}^{p+2}(X^{p+2}/X^{p+1}) \\
 \uparrow S_q^2 & & \uparrow S_q^2 & & \uparrow S_q^2 & & \\
 \tilde{H}^p(X) & \xrightarrow{i_2^*} & \tilde{H}^p(X^{p+2}) & \xleftarrow{k_2^*} & \tilde{H}^p(X^{p+2}/X^{p-1}) & & \\
 & \searrow i_3^* & \downarrow i_4^* & & \downarrow j^* & & \\
 & & \tilde{H}^p(X^p) & \xleftarrow{k_3^*} & \tilde{H}^p(X^p/X^{p-1}) & &
 \end{array}$$

$i_1^*[\rho_2(z)] = k_1^* j^* \rho_2(z)$ である. 一方, $\rho_2(C_1(\xi^m)) = \Phi_{\xi}^{-1} S_q^2 \Phi_{\xi}(1)$ [6] に注意すると,

$$\begin{aligned}
 j^* \rho_2(z) &= \rho_2(y) \\
 &= S_q^2 S_*^{p-2m} q^* \Phi_{\xi}(1) \\
 &= S_q^2 \mu_0(x)
 \end{aligned}$$

$i_2^*[\mu_0(j^*(x))] = k_2^*(\mu_0(x))$ 及び, i_s^* ($s=1, 2, 3, 4$) が injective であることから

$$S_q^2[\mu_0(j^*(x))] = [\rho_2(z)]$$

を得る. 従って, μ の定義と (3.1) より, 定理 1.2 が証明される. 以上細かい証明については [4] を参照されたい.

参 考 文 献

- [1] S. Araki and H. Toda: Multiplicative structures in mod q cohomology theories I Osaka J. Math. 2 (1965) 71-115, II Osaka J. Math. 3 (1966)
- [2] H. Cartan and others: Cartan Seminar Notes, 1950-51, Paris.
- [3] P. E. Conner and E. E. Floyd: Torsion in SU -bordism Mem. A. M. S. 60 (1966)
- [4] M. Kamata: On the differential $d_3^{p,0}$ of U -cobordism spectral sequence (to appear)
- [5] J. Milnor: Differential Topology, Lecture note Princeton University (1958)
- [6] J. Milnor: Lectures on characteristic class Princeton University (1958)
- [7] G. W. Whitehead: Generalized homology theories Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962) 227-283.