

Shintani Functions and Rankin-Selberg Convolution

II. Global Theory

京都産業大・理 村瀬篤 (Atsushi Murase)
広島大・理 菅野孝史 (Takashi Sugano)

このノートでは, Rankin-Selberg convolution を 新谷関数を用いて表示することによって, 古典群上の保型形式に付随する標準的 L 関数を行列サイズについて帰納的にとらえる. 完全に閉じた形で求められている定値直交群の場合を中心に述べ, 最後にユニタリ群の場合に触れることにする (定値直交群の場合, 詳しくは [5] を参照されたい).

§ 1. Local Theory 補足

帰納的な議論の為に, Part I で扱った split case を少し一般化しておく. k を p -進体, $\mathfrak{o}$ を k の整数環とする. $\mathfrak{o}^m$ が m 次偶対称行列 $S \in M_m(\mathfrak{o})$ に関し, 極大 $\mathfrak{o}$ -integral lattice となると, S を単に p -maximal と呼ぶことにする. これは, $S[g^{-1}] = {}^t g^{-1} S g^{-1}$ が任意の $g \in M_m(\mathfrak{o}) \cap GL_m(k) - GL_m(\mathfrak{o})$ に対して偶対称行列でないということと同値.

G を S の直交群, $K = G \cap GL_m(\mathfrak{o})$ とし, K の指数有限正規部分群 K^* を,

$$K^* = \left\{ u \in K \mid (u-1)S^{-1} \in GL_m(\mathfrak{o}) \right\}$$

と定義する. 商群 $E = K/K^*$ は, 単位群, 位数 2 の巡回群, 位数 $2(q+1)$ の二面体群のいずれかに同型となる (ここで, q は剰余体 $|\mathfrak{o}/\mathfrak{p}|$ の位数). G の K^* に関する Hecke 環

$$\mathcal{H}(G, K^*) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \phi : G \longrightarrow \mathbb{C} \mid \phi(u_1 g u_2) = \phi(g) \quad \forall u_1, u_2 \in K^*, \text{ supp } \phi : \text{compact} \right\}$$

については, 通常 $\mathcal{H}(G, K)$ の場合 (cf. [8]) と同様にして構造が調べられる. 特に,

$$\mathcal{H}(G, K^*) \cong \mathbb{C}[E][X_1^{\pm 1}, \dots, X_\nu^{\pm 1}]^{W_\nu} \quad (\nu : \text{Witt index of } S, W_\nu : \text{Weyl group})$$

を知る. また, $\mathcal{H}(G, K^*)$ の中心 $\mathcal{H}^+$ から, $\mathbb{C}$ への algebra homomorphism λ (指標) は, $k^\times$ の ν 個の不分岐指標の組 (modulo W_ν) $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$ と, 有限群 $E = K/K^*$ の既約表現 (の同型類) ρ の対 (λ, ρ) で記述される. これを λ の Satake parameter と呼ぶ.

$\mathcal{H}^+$ の指標 λ に対して, その標準的 L 関数を次の様に定義する.

$$L_p(\lambda; s) = L_p^0(\lambda; s) A_{\rho, p}(s),$$

$$L_p^0(\lambda; s) = \prod_{j=1}^{\nu} \left\{ (1 - \lambda_j(p) q^{-s}) (1 - \lambda_j^{-1}(p) q^{-s}) \right\}^{-1},$$

$$A_{\rho, \mathfrak{p}}(s) = \begin{cases} 1 & (n_0, \partial) = (0, 0) \text{ or } (1, 0) \\ 1 + \lambda_0 q^{-(s-1/2)} & (n_0, \partial) = (1, 1) \\ (1 - q^{-2s})^{-1} & (n_0, \partial) = (2, 0) \\ (1 - \lambda_0 q^{-s})^{-1} & (n_0, \partial) = (2, 1) \\ (1 - \lambda_0 q^{-s})^{-1} (1 + \lambda_0 q^{-(s-1)}) & (n_0, \partial) = (2, 2) \\ (1 - \lambda_0 q^{-(s+1/2)})^{-1} & (n_0, \partial) = (3, 1) \\ (1 - \lambda_0 q^{-(s+1/2)})^{-1} (1 + \lambda_0 q^{-(s-1/2)}) & (n_0, \partial) = (3, 2) \\ (1 - \lambda_0 q^{-s})^{-1} (1 - \lambda_0 q^{-(s+1)})^{-1} & (n_0, \partial) = (4, 2) \text{ and } \lambda_0 \neq 0 \\ (1 - q^{-2s})^{-1} & (n_0, \partial) = (4, 2) \text{ and } \lambda_0 = 0. \end{cases}$$

ここで, $n_0 = m - 2\nu$, $\partial = \dim_{\mathfrak{o}/\mathfrak{p}} L'/\mathfrak{o}^m$, $L' = \{x \in S^{-1} \cdot \mathfrak{o}^m \mid {}^t x S x \in 2\mathfrak{p}^{-1}\}$ であり, p で $\mathfrak{o}$ の素元を表した. また, $\lambda_0 = \lambda_0(\rho)$ は, ρ が trivial 表現のとき 1 を, E の指数 2 の部分群上 trivial な表現の場合には -1 を, それ以外は 0 を表す.

$m+1$ 次の $\mathfrak{p}$ -maximal 偶対称行列でその左上 $m \times m$ ブロックが S となる $\underline{S} = \begin{bmatrix} S & -S\alpha \\ -{}^t\alpha S & -2a \end{bmatrix}$ を考え, その直交群を $\underline{G}$ で表す. また $\underline{K}$ 及び $\underline{K}^*$ を同様に定義する. $\underline{G}$ を $\underline{G}$ に $\iota_0(g) = \begin{bmatrix} g & (1-g)\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ により埋め込むと, $\iota_0(K^*) = \underline{K}^* \cap \iota_0(G)$ が成立する. なお, この関係は K と $\underline{K}$ については一般には成り立たないことに注意 (これが Hecke algebra が非可換となるにもかかわらず K^* をとった主な理由). Hecke 環の中心 $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}(G, K^*)^+$ の指標 λ と, $\underline{\mathcal{H}}^+ = \mathcal{H}(\underline{G}, \underline{K}^*)^+$ の指標 Λ に対し, local Shintani functions の空間が,

$$\text{Sh}(\lambda, \Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ W : K^* \backslash \underline{G} / \underline{K}^* \longrightarrow \mathbb{C} \mid \phi * W * \Phi = \lambda(\phi) \Lambda(\Phi) W, \quad \phi \in \mathcal{H}^+, \Phi \in \underline{\mathcal{H}}^+ \right\}$$

と定義される. ここで,

$$\phi * W * \Phi(g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_G \int_{\underline{G}} \phi(x) \Phi(y) W(xgy^{-1}) dx dy, \quad \text{vol}(K^*) = \text{vol}(\underline{K}^*) = 1.$$

Part I にあるように, $G, \underline{G}$ がともに split していて, $2^{-1} \det S \det \underline{S} \in \mathfrak{o}^\times$ ならば, この空間は 1 次元であり, その explicit formula も分かっている (cf. [1]). Witt index を一つ上げた

$$S_1 = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & S & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

の直交群を G_1 とし, その部分群 K_1, K_1^* を同様に定義する. $\iota : \underline{G} \longrightarrow G_1$ を, 像が $\eta = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ の固定化部分群となるように定める. また G_1 の岩沢分解を,

$$g = \begin{bmatrix} \alpha(g) & * & * \\ & \beta(g) & * \\ & & \alpha(g)^{-1} \end{bmatrix} u(g), \quad u(g) \in K_1^*$$

と書くことにする. 次の命題は L 関数の一つの積分表示を与えている.

Proposition 1 $W \in \text{Sh}(\lambda, A)$ に対し,

$$\int_{G \backslash G} W(\beta(h)^{-1}h) |\alpha(h)|_{\mathfrak{p}}^{s+(m-1)/2} dh = W(1) \frac{L_{\mathfrak{p}}(A; s)}{L_{\mathfrak{p}}(\lambda; s+1/2)} \times \begin{cases} 1 & m : \text{even} \\ 1 - q^{-2s} & m : \text{odd.} \end{cases}$$

§ 2. Rankin-Selberg convolution

以下, k を n 次の総実代数体, $\mathfrak{o}_k$ をその整数環とする. m 次の総正定値偶対称行列 S が, 全ての有限素点 $\mathfrak{p}$ に於いて前 § の意味で $\mathfrak{p}$ -maximal であるとき, 単に S は maximal であるという. S の直交群 G の素点 v での完備化を G_v で表し, 前 § 導入した開コンパクト部分群を K_v, K_v^* で表す (アルキメデスの素点 v に対しては, $K_v = K_v^* = G_v$ と解釈する). 全ての素点 v についての K_v^* の直積 K_A^* に保型形式の空間

$$\mathfrak{S}(K_A^*) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f : G_k \backslash G_A / K_A^* \rightarrow \mathbb{C} \right\}$$

を考える. この空間には, convolution により $\mathcal{H}_{\mathfrak{p}}^+ = \mathcal{H}(G_{\mathfrak{p}}, K_{\mathfrak{p}}^*)^+$ が可換正規に作用しており, 同時固有関数からなる基底を持つ. $f \in \mathfrak{S}(K_A^*)$ が, $\otimes'_{\mathfrak{p}} \mathcal{H}_{\mathfrak{p}}^+$ の同時固有関数 (Hecke eigen form)

$$f * \phi = \lambda_f(\phi) f \quad (\forall \phi \in \otimes'_{\mathfrak{p}} \mathcal{H}_{\mathfrak{p}}^+)$$

であるとき, 大域的な L 関数 $L(f; s)$ 及び gamma factor $L_{\infty}(f; s)$ を

$$\begin{aligned} L(f; s) &= \prod_{\mathfrak{p} < \infty} L_{\mathfrak{p}}(\lambda_f; s), \\ L_{\infty}(f; s) &= |d_k|^{[m/2]s} \left((2\pi)^{-[m/2]s} \prod_{j=1}^{[m/2]} \Gamma(s - j + m/2) \right)^n \\ &\quad \times \begin{cases} (N_{k/\mathbb{Q}}(\det S))^{s/2} & m : \text{偶数} \\ (N_{k/\mathbb{Q}}(2^{-1} \det S))^{s/2} & m : \text{奇数} \end{cases} \end{aligned}$$

で定義する (d_k は k の絶対判別式).

我々の目標は, $\xi(f; s) = L_{\infty}(f; s)L(f; s)$ の解析接続・関数等式についての次の定理にある.

Theorem 1 $f \in \mathfrak{S}(K_A^*)$ を Hecke eigen form とする. このとき,

- (1) $\xi(f; s)$ は全 s -平面に有理型関数として解析接続され, $s \rightarrow 1-s$ で不変.
- (2) $\xi(f; s)$ は $s = 2/m - j$ ($0 \leq j \leq m-1$) で高々 simple pole をもつ他では正則.
- (3) $\xi(f; s)$ が $s = m/2$ で本当に極をもつ必要十分条件は, f が定数関数であること.

Remark 1 (3) において $\xi(f; s)$ の最大 possible pole ($s = 1/m$) の特徴付けが与えられているが, その他の possible poles での挙動は不明. これらの点における正則性または pole の意味付けを与えることは興味深い問題と思われる.

$m+1$ 次の直交群を, 新谷関数を用いて m 次の直交群と (大域的に) 関連付ける為に, 一つ準備を行う. 証明は, 良く知られた二元二次形式による数の表示についての事実

(これは二次拡大体の L 関数の $s = 1$ での挙動からの帰結) と, 特殊線型群に対する強近似定理から従う.

Proposition 2 $T \in M_{m+1}(\mathfrak{o}_k)$ を $m+1$ 次の総正定値 maximal 偶対称行列とする. このとき, m 次 maximal 偶対称行列 S と, $\gamma \in SL_{m+1}(\mathfrak{o}_k)$ で,

$${}^t\gamma T \gamma = \underline{S} = \begin{bmatrix} S & -S\alpha \\ -{}^t\alpha S & -2a \end{bmatrix}$$

となるものが存在する.

以下, m 次の場合に Theorem 1 が成立しているとする. 上の命題より, $m+1$ 次の総正定値 maximal 偶対称行列 T の直交群上の Hecke eigen form F に対する主張を確かめるためには, $T = \underline{S}$ 及び $F(1) \neq 0$ として一般性を失わない. このとき, Hecke eigen form $f \in \mathfrak{S}(K_A^*)$ で Petersson 内積 $\langle F|_{G_A}, \bar{f} \rangle_G \neq 0$ となるものが存在する.

$m+2$ 次の直交群 G_1 上の (f に付随した) Eisenstein 級数を

$$E(g, f; s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\gamma \in P_{1,k} \backslash G_{1,k}} f(\beta(\gamma g)) |\alpha(\gamma g)|_A^{s+m/2} \quad (g \in G_{1,A})$$

により定義する. ここで, P_1 は G_1 の上三角型の放物部分群であり, アルキメデス素点 v での $G_{1,v}$ の極大コンパクト部分群 $K_{1,v}^*$ として $\eta = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ の固定化部分群をとった岩沢分解 $G_{1,A} = P_{1,A} K_{1,A}^*$ を

$$g = \begin{bmatrix} \alpha(g) & * & * \\ & \beta(g) & * \\ & & \alpha(g)^{-1} \end{bmatrix} u(g) \quad (g \in G_{1,A})$$

で表した. 記述を簡単にするため, normalizing factor

$$d(f; s) = |N_{k/\mathbf{Q}}(a + S[\alpha]/2)|^{s/2} \xi(f; s+1) \times \begin{cases} 1 & m : \text{even} \\ \xi_k(2s+1) & m : \text{odd} \end{cases}$$

($\xi_k(s)$ は, k の completed Dedekind zeta 関数)

を乗じた $E^*(g, f; s) = d(f; s) E(g, f; s)$ を用いる. E^* は全 s -平面に有理型関数として解析接続され, 関数等式

$$E^*(g, f; s) = \frac{\xi(f; s)}{\xi(f; 1-s)} E^*(g, f; -s)$$

を満たすことが分かる (帰納法の仮定より, 右辺の最初の因子は 1 となる).

Proposition 3 (Basic Identity) $F \in \mathfrak{S}(\underline{K}_A^*), f \in \mathfrak{S}(K_A^*)$ に対し,

$$\int_{\underline{G}_k \backslash \underline{G}_A} F(h) E^*(\iota(h), f; s-1/2) dh = d(f; s-1/2) \int_{G_A \backslash \underline{G}_A} W_{F,f}(\beta(h)^{-1}h) |\alpha(h)|_A^{s+(m-1)/2} dh$$

が成立する. ここで, $W_{F,f}$ は次の global 新谷関数

$$W_{F,f}(h) = \int_{G_k \backslash G_A} F(\iota_0(g)h) f(g) dg \quad (h \in G_A).$$

$F * \Phi = \lambda_F(\Phi)F$ ($\Phi \in \mathcal{H}_p^+$), $f * \phi = \lambda_f(\phi)f$ ($\phi \in \mathcal{H}_p^+$) を満たすならば, $W_{F,f}$ は G_p 上の関数として, 前 § で導入した局所新谷関数の空間 $\text{Sh}(\lambda_f, \lambda_F)$ に属する. 従って, F, f が Hecke eigen form ならば, Proposition 1 と Proposition 3 により,

$$\langle F, \overline{E^*(*, f; s - 1/2)} \rangle_{\underline{G}} = \xi(F; s) \cdot \langle F|_{G_A}, \bar{f} \rangle_G$$

が成立する. ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\underline{G}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_G$ は, それぞれ $\mathfrak{S}(\underline{K}_A^*), \mathfrak{S}(K_A^*)$ の Petersson 内積. 仮定より, $\langle F|_{G_A}, \bar{f} \rangle_G \neq 0$ ゆえ, $\xi(F; s)$ の解析接続・解析接続が Eisenstein 級数のそれから得られ, 証明が終わる.

Remark 2 $\underline{S} = \begin{bmatrix} S & -S\alpha \\ -{}^t\alpha S & -2a \end{bmatrix} \in M_{m+1}(\mathfrak{o}_k)$ とし, $F \in \mathfrak{S}(\underline{K}_A^*), f \in \mathfrak{S}(K_A^*)$ を Hecke eigen form とする. $\{g_i \mid 1 \leq i \leq h = h(S)\}$ を $G_k \backslash G_A / K_A^*$ の完全代表系とすると,

$$W_{F,f}(1) = \langle F|_{G_A}, \bar{f} \rangle = \sum_{i=1}^h \frac{1}{e_i} F(g_i) f(g_i), \quad e_i = \#(G_k \cap g_i K_A^* g_i^{-1})$$

である. 特に, $f = 1$ を G_A 上つねに 1 となる関数にとれば, $W_{f,1}$ は左 G_A 不変な新谷関数となる. 従って [3, §1.13] より, $W_{F,1}(1) \neq 0$ のとき,

$$L(F; s) = L'(s) \prod_{j=1}^{m-2} \zeta_k(s - (m-1)/2 + j) \times \begin{cases} L(\chi_K; s) & m+1 : \text{even} \\ 1 & m+1 : \text{odd} \end{cases}$$

と分解されることがわかる. ここで, ζ_k は k の Dedekind zeta 関数, $L(\chi_K; s)$ は k の 2 次拡大 $K = k(\sqrt{(-1)^{(m+1)/2} \det S})$ に対応する Dirichlet 指標の L 関数であり, $L'(s)$ は殆ど 2 次の Euler 積. 即ち, F の L 関数が (本質的に parameter が 1 個にまで) 大幅に退化する. 特に, $h(S) = 1$ ならば $F(1) \neq 0$ なる任意の F はこの形となる.

Example 1 (cf. 立川 [10]) $\mathbb{Q}$ 上の 5 次の正定値偶対称行列で, 行列式が 74 であるものを考える. これは, maximal で唯一つの genus からなる. この genus の $GL_5(\mathbb{Z})$ 同値類の一つの完全代表系は,

$$T_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$T_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}, T_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

で与えられる. $S = T_1$ の直交群を G で表す. 今の場合, $\#(G_{\mathbf{Q}} \backslash G_A / K_A^*) = \#(G_{\mathbf{Q}} \backslash G_A / K_A)$ ゆえ, $\dim_{\mathbf{C}} \mathfrak{S}(K_A^*) = 5$. Hecke eigen basis は,

$$\{F_0 = 1, F_{\alpha} \mid \alpha^4 - 18\alpha^3 + 107\alpha^2 - 220\alpha + 66 = 0\}$$

で与えられる. $F_0(1) \neq 0, F_{\alpha}(1) \neq 0$ であることが分かり, 上の Remark より, L 関数は全て退化している. $p = 2, 3$ のときの local factor は,

$$\begin{aligned} L_2(F; s)^{-1} &= (1 - 2^{-s-1/2})(1 - 2^{-s+1/2}) \times \begin{cases} (1 - 2^{-s-3/2})(1 - 2^{-s+3/2}) & F = F_0 \\ 1 + (6 - \alpha) 2^{-s-3/2} + 2^{-2s} & F = F_{\alpha} \end{cases} \\ L_3(F; s)^{-1} &= (1 - 3^{-s-1/2})(1 - 3^{-s+1/2}) \times \begin{cases} (1 - 3^{-s-3/2})(1 - 3^{-s+3/2}) & F = F_0 \\ 1 + \beta 3^{-s-3/2} + 3^{-2s} & F = F_{\alpha} \end{cases} \end{aligned}$$

となる. ここで, $\beta = \{\alpha^3 - 9\alpha^2 + 26\alpha - 26\}/8$ で, これは, $\beta^4 - 11\beta^3 + 6\beta^2 + 89\beta + 23 = 0$ の根.

§ 3. unitary 群の場合

k を虚 2 次体, S を非退化な m 次の skew hermitian matrix とし, G を S のユニタリ群とする. 全ての有限素点 p において, $(\mathfrak{o}_{k,p})^m$ が S に関して maximal integral lattice であると仮定する. § 1 と同様に, $G_p \supset K_p \supset K_p^*$ が定義され, local Hecke algebra $\mathcal{H}_p = \mathcal{H}(G_p, K_p^*)$ の構造が決定される. また, その中心 $\mathcal{H}_p^+$ の指標 λ_p に対して, local standard L 関数 $L_p(\lambda_p, s)$ が定義される (殆ど全ての p に対して, 分母が p^{-s} の $2m$ 次式).

$G_{\infty} = G_{\mathbf{R}}$ の極大コンパクト群を K_{∞} とすると, 良く知られているように $\mathcal{X} = G_{\infty}/K_{\infty}$ は hermitian symmetric domain となる. G_{∞} の $\mathcal{X}$ への作用に関する自然な正則保型因子を $J_G(g, X)$ ($g \in G_{\infty}, X \in \mathcal{X}$) で表し, $\chi_{K_{\infty}}(u) = \det J_G(u, X_0)$ ($u \in K_{\infty} = X_0$ の固定化部分群) とおく. $K_{A,f}^* = \prod_{p < \infty} K_p^*$ に関する weight $l \in N$ の正則尖点形式の空間を

$$\mathfrak{S}_l(K_{A,f}^*) = \left\{ f : G_{\mathbf{Q}} \backslash G_A / K_{A,f}^* \longrightarrow \mathbf{C} \mid \begin{array}{l} f(gu) = \chi_{K_{\infty}}(u)^{-l} f(g) \quad \forall u \in K_{\infty} \\ \text{bounded, } \mathcal{X} \text{ 上で正則} \end{array} \right\}$$

で定義する (l は $\#(\mathfrak{o}_k^{\times})$ の倍数とする).

以下, $K_A^{\times}$ の不分岐量指標 $\omega = \prod_v \omega_v$ で, $\omega_{\infty}(x) = (x/|x|)^l$ となるものを一つ固定する. Hecke eigen form $f \in \mathfrak{S}(K_{A,f}^*), f * \phi = \lambda_f(\phi)f$ ($\phi \in \otimes' \mathcal{H}_p^+$) に対し, 次の global L 関数

$$L(f \otimes \omega; s) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{p < \infty} L_p(\lambda_f \otimes \omega_p; s)$$

を考える. ここで, $L_p(\lambda_f \otimes \omega_p; s)$ は, λ_f の Satake parameter を ω_p で twist して得られる local L 関数である (cf. [9], [2]).

有限素点での新谷関数については, 直交群の場合と同様の結果が得られる. 特に split prime p では, $G_p \cong GL_m(\mathbf{Q}_p)$ であり, 存在と一意性が分かっている (cf. [4]). 無限素点

に関して簡単に述べよう.

$$\mathcal{H}_l^\infty(G_\infty, K_\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ f: G_\infty \longrightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} f(gu) = \chi(u)^{-l} f(g) \quad \forall u \in K_\infty \\ \text{bounded かつ } \mathcal{X} \text{ 上正則} \end{array} \right\}$$

とおくと, $\mathfrak{S}(K_{A,f}^*) \subset \mathcal{H}_l^\infty$ であり, 十分大なる l に対しては,

$$\begin{aligned} \omega_{G,l}(u_1 g u_2) &= \chi_{K_\infty}(u_1)^{-l} \chi_{K_\infty}(u_2)^{-l} \omega_{g,l}(g) \quad (\forall u_1, \forall u_2 \in K_\infty) \\ f(g) &= \int_{G_\infty} f(x) \omega_{G,l}(x^{-1} g) dx \quad (\forall f \in \mathcal{H}_l^\infty) \end{aligned}$$

となる G_∞ 上の $\mathbb{C}$ -値関数が唯一つ存在する. 我々の扱う正則尖点形式の場合には, この $\omega_{G,l}$ が Bergman 核関数として具体的に分かるため, 有限素点に平行な議論によって, 必要な結果を得ることになる.

さて, $\underline{S} = \begin{bmatrix} S & -S\alpha \\ -\alpha^* S & \bar{a} - a \end{bmatrix}$ を $m+1$ 次の非退化 skew hermitian matrix で S と同様な maximality condition を満たし, 左上 $m \times m$ 行列が S であるものを取り, ユニタリ群 $\underline{G} = U(\underline{S})$ を考える. $\underline{K}_\infty$ を, $\underline{G}_\infty$ の極大コンパクト部分群で, $G_\infty \cap \underline{K}_\infty = K_\infty$, $\chi_{\underline{K}_\infty}|_{K_\infty} = \chi_{K_\infty}$ なるものとする. 無限素点での local Shintani function の空間が,

$$\text{Sh}_\infty(l) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ W: \underline{G}_\infty \longrightarrow \mathbb{C} \mid \begin{array}{l} W(u_1 h u_2) = \overline{\chi_{K_\infty}(u_1)^{-l}} \chi_{\underline{K}_\infty}(u_2)^{-l} W(h) \quad \forall u_1, u_2 \\ W \in \mathcal{H}_l^\infty(\underline{G}_\infty, \underline{K}_\infty), W_{x_0} \in \mathcal{H}_l^\infty \end{array} \right\}$$

により定義される. ここで, $x_0 \in \underline{G}_\infty$ に対し, $W_{x_0}(y) = \overline{W(x_0^{-1} y)}$ ($y \in G_\infty$) とおいた.

$$S_1 = \begin{bmatrix} & -1 \\ & S \\ 1 & \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおき, S_1 のユニタリ群を G_1 に G を η の固定化部分群として埋め込む.

Proposition 4 l を十分大とするとき, $W \in \text{Sh}_\infty(l)$ に対し,

$$\begin{aligned} & \int_{G_\infty \backslash \underline{G}_\infty} W(\beta(h)^{-1} h) \omega_{s+m/2}(\alpha(h)/|\alpha(h)|)^l \chi_1(u(h))^l dh \\ &= W(1) \Gamma(s + (l-m)/2) \times \begin{cases} \Gamma(s + (l-n_0)/2)^{-1} & i \det \underline{S} / \det S > 0 \\ \Gamma(s + (l+n_0)/2)^{-1} & i \det \underline{S} / \det S < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで, $\alpha(h), \beta(h), u(h)$ は, §1 と同様に G_1 の岩沢分解に現れる量であり, $G_{1,\infty}$ の極大コンパクト群 $K_{1,\infty}$ の指標 $\chi_{K_{1,\infty}}$ を上と同様に定義した. また, $x \in k_A^\times$ に対し, $\omega_s(x) = \omega(x)|x|_{k_A}^s$ とおいた.

最後に Eisenstein 級数を導入して, Basic Identity を述べよう. $g \in G_{1,A}, f \in \mathfrak{S}_l(K_{A,f}^*)$ に対して,

$$E(g, \bar{f}; s) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\gamma \in P_{1,\mathbb{Q}} \backslash G_{1,\mathbb{Q}}} \overline{f(\beta(\gamma g))} \omega_{s+(m+1)/2}(\alpha(\gamma g)) \chi_{K_{1,\infty}}(u(\gamma g))$$

とおく. さらに, f が Hecke eigen form の場合に, normalizing factor を乗じたものを, $E^*(g, \bar{f}; s)$ で表す.

gamma factor を

$$L_\infty(f; s) = (2\pi)^{-ms} |\det S|^s |d_k|^{[m/2]s} \prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(s-j+(l-n_0+1)/2) \prod_{j=1}^{n_0+\nu} \Gamma(s-j+(l+n_0+1)/2)$$

として, completed L 関数を, $\xi(f; s) = L_\infty(f; s)L(f; s)$ で定める.

Theorem 2 $F \in \mathfrak{S}(\underline{K}_{A,f}^*)$, $f \in \mathfrak{S}(K_{A,f}^*)$ をともに Hecke eigen form とし, l を十分大としておく. このとき,

$$\langle F, \overline{E^*(*, \bar{f}; \omega_{s-1/2})} \rangle_{\underline{G}} = \xi(F \otimes \omega; s) \langle F|_{G_A}, f \rangle_G.$$

Example 2 $S = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ で, 虚二次体 k の類数が 1 だとする. $f \in \mathfrak{S}(K_{A,f}^*)$ を上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の関数とみた $f^{\text{dm}}(z)$ は, 通常の一変数保型形式に他ならない.

$$f^{\text{dm}}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i z} \quad (z \in \mathfrak{H})$$

と Fourier 展開し, Mellin 変換による Dirichlet 級数

$$\Lambda(f^{\text{dm}}; s) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$$

$$\Lambda(f^{\text{dm}} \otimes \chi_k; s) = (2\pi)^{-s} |d_k|^s \Gamma(s) \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \chi_k(n) n^{-s}$$

を考える (χ_k は $k/\mathbb{Q}$ に対応する Dirichlet 指標). f^{dm} が通常の意味で Hecke 作用素の同時固有関数であるならば, f は G_A 上の Hecke eigen form であり, 上で定義した $\xi(f \otimes \omega; s)$ は定数倍を除き, $\Lambda(f^{\text{dm}}; s + (l-1)/2) \Lambda(f^{\text{dm}} \otimes \chi_k; s + (l-1)/2)$ に一致する.

Example 3 $k = \mathbb{Q}(i)$, $\underline{S} = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \\ & -2i \end{bmatrix}$ とする. $F \in \mathfrak{S}_l(\underline{K}_{A,f}^*)$ は, 領域 $\{(z, w) \in$

$\mathfrak{H} \times \mathbb{C} \mid \text{Im } z > |w|^2\}$ の正則尖点形式 F^{dm} と同一視される. [7] において graded ring の構造が決定されており, $l=8$ の場合, $F^{\text{dm}}(z, 0) = 0$ となることが分かる. 即ち, Theorem 2 の右辺の内積が消える. 従って, L 関数の情報を取り出すには, 定値直交群に対して Proposition 2 で行ったように, form $\underline{S}$ を取り替える必要がある. なお, $l=12$ の場合には, 少なくとも一つの Hecke eigen form に対しては内積が消えないことも [7] から分かる.

References

- [1] S. Kato and A. Murase : in preparation.

- [2] S. Kudla : On certain Euler products for $SU(2,1)$, *Comp. Math.* 42 (1981), 321-344.
- [3] A. Murase and T. Sugano : Shintani function and its application to automorphic L -functions for classical groups : I. The orthogonal groups case, *Math. Ann.* 299 (1994), 17-56.
- [4] A. Murase and T. Sugano : Shintani functions and automorphic L -functions for $GL(m)$, to appear in *Tôhoku Math. J.*
- [5] A. Murase and T. Sugano : On standard L -functions attached to automorphic forms on definite orthogonal groups, preprint.
- [6] A. Murase and T. Sugano : L -functions of holomorphic cusp forms on $U(2,1)$, preprint.
- [7] Resnikoff and Tai : On the structure of a graded ring of automorphic forms on 2-dimensional complex ball; *Math. Ann.* 238 (1978), 97-117.
- [8] I. Satake : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over $\mathfrak{p}$ -adic fields, *I.H.E.S. Publ. Math.* 18 (1963), 5-69.
- [9] T. Shintani : On automorphic forms on unitary groups of order 3, preprint.
- [10] 立川秀樹 : 正定値直交群上の保型形式と L 関数, 広島大学修士論文, 1995.