

Explicit form of the evolution operator for the Tavis-Cummings model and quantum diagonalization method

早稲田大学理工学部 鈴木 達夫 (Tatsuo Suzuki) *
School of Science and Engineering, Waseda Univ.

概要

量子コンピュータのモデル (Tavis-Cummings model) に由来する, 非可換成分を持った行列の指数関数の具体的な計算を通じ, 非可換計算の問題点を考察する. この研究は, 藤井一幸・東田杏子・加藤良輔・和田由佳子氏 (横浜市大・理) との共同研究に基づくものである.

1 準備

$a, a^\dagger$ を生成・消滅演算子とする. $[a, a^\dagger] = 1$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad 1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

さらに $s = +, -, 3$ に対し,

$$\sigma_i^{(s)} = 1_2 \otimes \cdots \otimes 1_2 \otimes \sigma_s \otimes 1_2 \otimes \cdots \otimes 1_2 \quad (i - \text{position}) \in M(2^n, \mathbb{C}),$$

$$S_+ = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(+)}, \quad S_- = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(-)}, \quad S_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(3)}$$

とする.

非可換成分を持った行列を

$$A = A_n = S_+ \otimes a + S_- \otimes a^\dagger \tag{1.1}$$

* E-mail address: suzukita@gm.math.waseda.ac.jp

とおく. 例えば

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ a^\dagger & 0 & 0 & a \\ a^\dagger & 0 & 0 & a \\ 0 & a^\dagger & a^\dagger & 0 \end{pmatrix}.$$

(n 原子の) Tavis-Cummings model という量子コンピュータのモデルを解析するために

$$e^{-itgA} = e^{-itg(S_+ \otimes a + S_- \otimes a^\dagger)} \quad (g : \text{constant}) \quad (1.2)$$

の計算が必要になる.

注意 1.1. $su(2)$ の表現 $\rho(\sigma_+) = S_+$, $\rho(\sigma_-) = S_-$, $\rho(\sigma_3/2) = S_3$ は一般には可約となるが, よく知られた $su(2)$ のテンソル表現の既約分解を用いると, 結局, 各 $spin\ j$ での表現行列に対応した指数関数を計算すればよい.

例えば,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ a^\dagger & 0 & 0 & a \\ a^\dagger & 0 & 0 & a \\ 0 & a^\dagger & a^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

に対し,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

とすると,

$$T^\dagger A_2 T = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & \sqrt{2}a & 0 \\ & \sqrt{2}a^\dagger & 0 & \sqrt{2}a \\ & 0 & \sqrt{2}a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \\ & B_1 \end{pmatrix}$$

と書き直せる. これは, よく知られた $su(2)$ のテンソル表現の既約分解 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$ に対応する.

以後, $spin\ j$ に対し, $J = 2j + 1$ とおく. E_{ij} ($i, j = 1, \dots, J$) を (i, j) -行列単位とする. 次の

行列の指数関数を計算すればよい.

$$\begin{aligned}
 B &= B_j = \sum_{m=1}^{J-1} \sqrt{(J-m)m} a E_{m,m+1} + \sum_{m=1}^{J-1} \sqrt{(J-m)m} a^\dagger E_{m+1,m} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{(J-1)1}a & & & & \\ \sqrt{(J-1)1}a^\dagger & 0 & \sqrt{(J-2)2}a & & & \\ & \sqrt{(J-2)2}a^\dagger & 0 & \sqrt{(J-3)3}a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \sqrt{2(J-2)2}a^\dagger & 0 & \sqrt{1(J-1)1}a \\ & & & 0 & \sqrt{1(J-1)1}a^\dagger & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

注意 1.2. $(a^\dagger)^n a^n$ (*normal order*), $a^n (a^\dagger)^n$ (*antinormal order*) の, *number operator* $N \equiv a^\dagger a$ を用いた表示

number operator $N \equiv a^\dagger a$ に対し,

$$aN = aa^\dagger a = (N+1)a, \quad Na^\dagger = a^\dagger aa^\dagger = a^\dagger(N+1), \quad (1.4)$$

さらに N の関数 $f(N)$ に対し,

$$af(N) = f(N+1)a, \quad f(N)a^\dagger = a^\dagger f(N+1) \quad (1.5)$$

が成り立つことに注意する.

補題 1.3. 上記のことを用いると, 次が成り立つ.

$$(a^\dagger)^n a^n = N(N-1)\cdots(N-n+1) \equiv N^{\underline{n}} \quad (\text{下降階乗べき関数})$$

$$a^n (a^\dagger)^n = (N+1)(N+2)\cdots(N+n) \equiv (N+1)^{\overline{n}} \quad (\text{上昇階乗べき関数})$$

注意 1.4. 生成・消滅演算子の非可換性の, 差分を用いた解釈

normal order と *antinormal order* の母関数による関係は,

$$e^{\beta a} e^{\alpha a^\dagger} = e^{\partial_{a^\dagger} \partial_a} e^{\alpha a^\dagger} e^{\beta a} = e^{\alpha \beta} e^{\alpha a^\dagger} e^{\beta a}.$$

これを展開すると次の式を得る.

$$(N+1)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n k! \binom{n}{k}^2 N^{\underline{n-k}}. \quad (1.6)$$

この式は次のように解釈できる;

$$p_n(N) = (N+1)^{\bar{n}} = (N+n)^{\underline{n}} \quad \text{とおく.}$$

一般に, $p_n(N)$ を N を変数とする n 次多項式, Δ_+ を前進差分作用素 (差分間隔 = 1) とするとき, *Newton* 展開 (または「テイラー展開の差分化」)

$$p_n(N) = \sum_{k=0}^n \frac{N^{\underline{k}}}{k!} \Delta_+^k p_n(0) = \sum_{k=0}^n \frac{N^{n-k}}{(n-k)!} \Delta_+^{n-k} p_n(0)$$

が成り立つ. 公式 $\Delta_+ N^{\underline{n}} = n N^{\underline{n-1}}$ に注意して,

$$\begin{aligned} \Delta_+^{n-k} p_n(0) &= \Delta_+^{n-k} (N+n)^{\underline{n}}|_{N=0} \\ &= n(n-1)\cdots(k+1) \cdot n^{\underline{k}} \\ &= \frac{n!}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} \end{aligned}$$

より (1.6) を得る. よって, 生成・消滅演算子の非可換性から導かれる等式は, *Newton* 展開 (または「テイラー展開の差分化」) に他ならない.

2 量子対角化法

(1.3) の B に対し,

$$B = U D_B U^\dagger$$

U : ユニタリ行列, D_B : 対角行列

なる分解を用いて, B の指数関数を求める.

注意 2.1. B, U, D_B は非可換成分をもつ行列であるので, 通常のと角化をそのまま実行することはできない.

量子対角化法

Step1: 古典化

B 中の $a, a^\dagger$ を可換成分 $z, \bar{z}$ に置き換えた行列

$$C \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{(J-1)}1z & & & & \\ \sqrt{(J-1)}1\bar{z} & 0 & \sqrt{(J-2)}2z & & & \\ & \sqrt{(J-2)}2\bar{z} & 0 & \sqrt{(J-3)}3z & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \sqrt{2(J-2)}\bar{z} & 0 & \sqrt{1(J-1)}z \\ & & & 0 & \sqrt{1(J-1)}\bar{z} & 0 \end{pmatrix}$$

に対して通常の対角化を行う.

固有値

$$\{(J-1)|z|, (J-3)|z|, \dots, (J-2i+1)|z|, \dots, -(J-3)|z|, -(J-1)|z|\}$$

(正規化した) 固有ベクトル

$$|(J-2i+1)|z| \rangle = \left(x_{ki} \frac{\bar{z}^{k-1}}{|z|^{k-1}} \right) \quad i = 1, \dots, J$$

(x_{ki} も具体的に求まるが, ここでは略)

これを用いてユニタリ行列 W を

$$W = \left(x_{ki} \frac{\bar{z}^{k-1}}{|z|^{k-1}} \right)$$

とおくと C は対角化される:

$$C = W D_C W^\dagger$$

Step2: 量子化

今得られた W に対し, 非可換成分を持つユニタリ行列を

$$U_1 = \left(\frac{x_{ki}}{\sqrt{N(N-1)\dots(N-k+2)}} (a^\dagger)^{k-1} \right) = \left((a^\dagger)^{k-1} \frac{x_{ki}}{\sqrt{(N+1)(N+2)\dots(N+k-1)}} \right) \quad (2.1)$$

とおく. (分母に ordering 問題が生じる.) (2.1) の演算子の部分は

$$\frac{1}{\sqrt{(a^\dagger)^{k-1} a^{k-1}}} (a^\dagger)^{k-1} = (a^\dagger)^{k-1} \frac{1}{\sqrt{a^{k-1} (a^\dagger)^{k-1}}} \quad (2.2)$$

であることに注意.

このようにおくと, $U_1^\dagger U_1 = U_1 U_1^\dagger = 1$ が確かめられる.

Step3: 古典化

$$U_1^\dagger B U_1 = R$$

を計算すると, 可換成分のみをもつエルミート行列になる. この R に対し, 通常の対角化を行えば, B の対角化が完了する.

例として, $J=3$ ($j=1$) の場合,

$$B = B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}a & 0 \\ \sqrt{2}a^\dagger & 0 & \sqrt{2}a \\ 0 & \sqrt{2}a^\dagger & 0 \end{pmatrix}$$

に対しては,

$$W = \left(x_{ki} \frac{\bar{z}^{k-1}}{|z|^{k-1}} \right), \quad (x_{ki}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

であるので, “ W の量子化” U_1 を

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}} a^\dagger & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}} a^\dagger \\ \frac{1}{2\sqrt{N(N-1)}} (a^\dagger)^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N(N-1)}} (a^\dagger)^2 & \frac{1}{2\sqrt{N(N-1)}} (a^\dagger)^2 \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$U_1^\dagger B U_1 = R = \begin{pmatrix} \sqrt{N+1} + \sqrt{N+2} & -\frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}} & -(\sqrt{N+1} + \sqrt{N+2}) \end{pmatrix}$$

となる.

$a, a^\dagger$ の非可換性により, R には零でない非対角成分が登場してしまうので, この R に対してもう一度 (通常の) 対角化を行うと,

$$R = U_2 D U_2^\dagger,$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2(2N+3)} + \sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}}{2\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2(2N+3)}} & -\frac{\sqrt{2(2N+3)} - \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1}}{2\sqrt{2(2N+3)}} \\ \frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2(2N+3)}} & -\frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2(2N+3)}} \\ \frac{\sqrt{2(2N+3)} - \sqrt{N+2} - \sqrt{N+1}}{2\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{N+2}-\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{2(2N+3)} + \sqrt{N+2} + \sqrt{N+1}}{2\sqrt{2(2N+3)}} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2(2N+3)} & & \\ & 0 & \\ & & -\sqrt{2(2N+3)} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

となるので,

$$U = U_1 U_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{N+2}}{\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2(2N+3)}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}} a^\dagger & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}} a^\dagger \\ -\frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{2(2N-1)}} (a^\dagger)^2 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}\sqrt{2(2N-1)}} (a^\dagger)^2 & \frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{2(2N-1)}} (a^\dagger)^2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

とすると

$$B_1 = U D U^\dagger$$

となり, 非可換成分を持つ行列の対角化が完了する.

注意 2.2. 実際の計算で最も困難なのは, U_2 を具体的に求める段階である. 大きな j に対しては, ほとんど不可能である. ($J = 4$ ($j = 3/2$) までは求めてある.)

この対角化を用いれば, B の指数関数を求めることができる.

$$e^{-itgB_1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

where

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{N+2+(N+1)\cos\left(tg\sqrt{2(2N+3)}\right)}{2N+3}, & b_{12} &= -i\frac{\sin\left(tg\sqrt{2(2N+3)}\right)}{\sqrt{2N+3}}a, \\ b_{13} &= \frac{-1+\cos\left(tg\sqrt{2(2N+3)}\right)}{2N+3}a^2, & b_{21} &= -i\frac{\sin\left(tg\sqrt{2(2N+1)}\right)}{\sqrt{2N+1}}a^\dagger, \\ b_{22} &= \cos\left(tg\sqrt{2(2N+1)}\right), & b_{23} &= -i\frac{\sin\left(tg\sqrt{2(2N+1)}\right)}{\sqrt{2N+1}}a, \\ b_{31} &= \frac{-1+\cos\left(tg\sqrt{2(2N-1)}\right)}{2N-1}(a^\dagger)^2, & b_{32} &= -i\frac{\sin\left(tg\sqrt{2(2N-1)}\right)}{\sqrt{2N-1}}a^\dagger, \\ b_{33} &= \frac{N-1+N\cos\left(tg\sqrt{2(2N-1)}\right)}{2N-1}. \end{aligned}$$

重要な注意 2.3. 量子対角化法におけるユニタリ行列 U は二つのユニタリ行列の積に分解できる;

$$U = U_a U_c \quad (2.6)$$

ただし, U_a は対角行列, U_c は可換成分 (N の関数) のみをもつとする. 大切なのは U_a で, 具体的には,

$$\begin{aligned}
 U_a &\equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{N!}} a^\dagger & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{N!}} (a^\dagger)^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{N^{J-1}}} (a^\dagger)^{J-1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a^\dagger \frac{1}{\sqrt{(N+1)!}} & & \\ & & (a^\dagger)^2 \frac{1}{\sqrt{(N+1)!^2}} & \\ & & & \ddots \\ & & & & (a^\dagger)^{J-1} \frac{1}{\sqrt{(N+1)^{J-1}}} \end{pmatrix}, \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 N^{\underline{n}} &\equiv N(N-1)\cdots(N-n+1) = (a^\dagger)^n a^n \\
 &\quad (\text{下降階乗べき関数} = \text{normal order}) \\
 (N+1)^{\overline{n}} &\equiv (N+1)(N+2)\cdots(N+n) = a^n (a^\dagger)^n \\
 &\quad (\text{上昇階乗べき関数} = \text{anti-normal order})
 \end{aligned}$$

である. このとき,

$$B = U_a U_c D_B U_c^\dagger U_a^\dagger \iff U_a^\dagger B U_a = U_c D_B U_c^\dagger \quad (\text{可換-非可換分離}) \quad (2.8)$$

右辺は可換成分行列なので, 左辺もそうである. よって非可換計算を可換計算に持ち込むには $U_a^\dagger B U_a$ を求めればよく, これは $U^\dagger B U$ よりも計算が楽になる. つまり今回の量子対角化法は次のように改良することができる.

Step 1'-2' (1.3) で与えられる B に対し, U_a を (2.7) で与える.

Step 3' このとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
 U_a^\dagger B U_a &= \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & & \\ b_1 & 0 & b_2 & & \\ & b_2 & 0 & b_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b_{J-2} & 0 & b_{J-1} \\ & & & & b_{J-1} & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{(J-1)1}\sqrt{N+1} & & & \\ \sqrt{(J-1)1}\sqrt{N+1} & 0 & \sqrt{(J-2)2}\sqrt{N+2} & & \\ & \sqrt{(J-2)2}\sqrt{N+2} & 0 & \sqrt{(J-3)3}\sqrt{N+3} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで, $b_m \equiv \sqrt{(J-m)m}\sqrt{N+m}$ ($m = 1, 2, \dots, J-1$).

よって, この (2.9) に対し, 通常対角化を行えばよい.

上記の例である $J = 3$ ($j = 1$) の場合, (2.9) を対角化するユニタリ行列は

$$U_c = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2N+3}} & \frac{\sqrt{N+2}}{\sqrt{2N+3}} & \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2}\sqrt{2N+3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{N+2}}{\sqrt{2}\sqrt{2N+3}} & -\frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2N+3}} & \frac{\sqrt{N+2}}{\sqrt{2}\sqrt{2N+3}} \end{pmatrix}$$

となり, $U = U_a U_c$ は (2.4) に一致する.

注意 2.4. この U_c は先ほどの U_2 ほどは複雑ではないが, やはり大きな j に対しては, 具体的に求めるのはほとんど不可能である.

⇒ 非可換成分行列 B の関数を求めるために “量子スペクトル分解” を考える!

3 (量子) ユニタリ行列, 固有値の不定性の原因... $U(1)$ -不定性

先ほどの $J = 3$ ($j = 1$) の場合,

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{2}\sqrt{N+2}}{\sqrt{2(2N+3)}} & \frac{\sqrt{N+1}}{\sqrt{2(2N+3)}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}} a^\dagger & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{N}} a^\dagger \\ -\frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{2(2N-1)}} (a^\dagger)^2 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N}\sqrt{2(2N-1)}} (a^\dagger)^2 & \frac{1}{\sqrt{N-1}\sqrt{2(2N-1)}} (a^\dagger)^2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2(2N+3)} & & \\ & 0 & \\ & & -\sqrt{2(2N+3)} \end{pmatrix}$$

とすると

$$B = B_1 = UDU^\dagger$$

であった。

つまり、 B の固有値は $\sqrt{2(2N+3)}, 0, -\sqrt{2(2N+3)}$ と思える。

しかし、この分解は一意ではない。例えば、次の式が成り立つ。

$$B_1 = \tilde{U} \tilde{D} \tilde{U}^\dagger$$

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(2N+3)}}a & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{N+2}}{\sqrt{N+1}\sqrt{2(2N+3)}}a & -\frac{1}{\sqrt{2(2N+3)}}a \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2(2N-1)}}a^\dagger & \frac{\sqrt{2}\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}\sqrt{2(2N-1)}}a^\dagger & -\frac{1}{\sqrt{2(2N-1)}}a^\dagger \end{pmatrix},$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{2(2N+1)} & & \\ & 0 & \\ & & -\sqrt{2(2N+1)} \end{pmatrix}.$$

このとき、 B の固有値は $\sqrt{2(2N+1)}, 0, -\sqrt{2(2N+1)}$ と見えてしまう。

⇒ 固有値の不定性

このような現象の原因は「ユニタリ群 $U(J)$ への $U(1)$ 作用」である。

つまり古典レベルで、ユニタリ行列 W に $\pm \frac{z^k}{|z|^k}, \pm \frac{\bar{z}^k}{|z|^k}$ をかけても同じ固有値を実現するが、量子化したときは異なる意味を持つ。それが不定性の原因となる。

先ほどの $\tilde{U}$ と元の U の関係は $\tilde{U} = U \cdot (-\frac{1}{\sqrt{N}}a)$ であり、 U に右からかけた因子により、固有値が変化する。

⇒ 量子対角化法では、 $U(1)$ 因子を固定して考えるべきである。

4 量子スペクトル分解

一般に、可換成分行列 $Y = U_a^\dagger B U_a$ のスペクトル分解を

$$Y = \sum_{k=1}^J \lambda_k(N) P_k = \sum_{k=1}^J \begin{pmatrix} \lambda_k(N) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k(N) \end{pmatrix} P_k$$

とする. このとき, (2.7) で与えられる U_a は対角行列であることに注意すると,

$$\begin{aligned}
 B &= U_a Y U_a^\dagger \\
 &= \sum_k U_a \begin{pmatrix} \lambda_k(N) & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k(N) \end{pmatrix} P_k U_a^\dagger \\
 &= \sum_k \begin{pmatrix} \lambda_k(N) & & \\ & \lambda_k(N-1) & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_k(N-J+1) \end{pmatrix} U_a P_k U_a^\dagger \\
 &\equiv \sum_{k=1}^J \Lambda_k Q_k, \quad (\text{量子スペクトル分解}) \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

ここで

$$\Lambda_k \equiv \begin{pmatrix} \lambda_k(N) & & \\ & \lambda_k(N-1) & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_k(N-J+1) \end{pmatrix}, \quad Q_k \equiv U_a P_k U_a^\dagger. \tag{4.2}$$

このように, 量子スペクトル分解において, “固有値”は「固有行列」となり, また, Q_k ($k = 1, \dots, J$) は直交射影行列の条件を満たすこともわかる. よって, 求めたい B の指数関数は次のように書ける.

定理 4.1.

$$\begin{aligned}
 \exp(-itgB) &= \sum_{k=1}^J \exp(-itg\Lambda_k) Q_k \\
 &= \sum_{k=1}^J \begin{pmatrix} \exp(-itg\lambda_k(N)) & & \\ & \exp(-itg\lambda_k(N-1)) & \\ & & \ddots \\ & & & \exp(-itg\lambda_k(N-J+1)) \end{pmatrix} Q_k. \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

例として, $J=3$ ($j=1$) で計算する.

$$U_a^\dagger B_1 U_a = Y = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \sqrt{2}\sqrt{N+1}, \quad b_2 = \sqrt{2}\sqrt{N+2},$$

ここで Y の固有値を

$$\lambda_1 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{2(2N+3)} \equiv \lambda, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -\sqrt{b_1^2 + b_2^2} = -\sqrt{2}\sqrt{2N+3} = -\lambda$$

とおく. さらに P_1, P_2, P_3 を

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{(Y - \lambda_2 I)(Y - \lambda_3 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} = \frac{1}{2(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1 \lambda & b_1 b_2 \\ b_1 \lambda & b_1^2 + b_2^2 & b_2 \lambda \\ b_1 b_2 & b_2 \lambda & b_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(2N+3)} \begin{pmatrix} N+1 & \sqrt{N+1}\sqrt{2N+3} & \sqrt{(N+1)(N+2)} \\ \sqrt{N+1}\sqrt{2N+3} & 2N+3 & \sqrt{N+2}\sqrt{2N+3} \\ \sqrt{(N+1)(N+2)} & \sqrt{N+2}\sqrt{2N+3} & N+2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{(Y - \lambda_1 I)(Y - \lambda_3 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} = \frac{1}{-(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} -b_2^2 & 0 & b_1 b_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_1 b_2 & 0 & -b_1^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2N+3} \begin{pmatrix} N+2 & 0 & -\sqrt{(N+1)(N+2)} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{(N+1)(N+2)} & 0 & N+1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{(Y - \lambda_1 I)(Y - \lambda_2 I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} = \frac{1}{2(b_1^2 + b_2^2)} \begin{pmatrix} b_1^2 & -b_1 \lambda & b_1 b_2 \\ -b_1 \lambda & b_1^2 + b_2^2 & -b_2 \lambda \\ b_1 b_2 & -b_2 \lambda & b_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(2N+3)} \begin{pmatrix} N+1 & -\sqrt{N+1}\sqrt{2N+3} & \sqrt{(N+1)(N+2)} \\ -\sqrt{N+1}\sqrt{2N+3} & 2N+3 & -\sqrt{N+2}\sqrt{2N+3} \\ \sqrt{(N+1)(N+2)} & -\sqrt{N+2}\sqrt{2N+3} & N+2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

とおくと, Y のスペクトル分解は次で与えられる.

$$\begin{aligned} Y &= \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 \\ &= \lambda P_1 + 0 \cdot P_2 - \lambda P_3. \end{aligned} \tag{4.4}$$

今,

$$Q_1 = U_a P_1 U_a^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{N+1}{2(2N+3)} & \frac{1}{2\sqrt{2N+3}} a & \frac{1}{2(2N+3)} a^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{2N+1}} a^\dagger & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2N+1}} a \\ \frac{1}{2(2N-1)} (a^\dagger)^2 & \frac{1}{2\sqrt{2N-1}} a^\dagger & \frac{N}{2(2N-1)} \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$Q_2 = U_a P_2 U_a^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{N+2}{2N+3} & 0 & -\frac{1}{2N+3}a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2N-1}(a^\dagger)^2 & 0 & \frac{N-1}{2N-1} \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$Q_3 = U_a P_3 U_a^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{N+1}{2(2N+3)} & -\frac{1}{2\sqrt{2N+3}}a & \frac{1}{2(2N+3)}a^2 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2N+1}}a^\dagger & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2N+1}}a \\ \frac{1}{2(2N-1)}(a^\dagger)^2 & -\frac{1}{2\sqrt{2N-1}}a^\dagger & \frac{N}{2(2N-1)} \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda(N) & & \\ & \lambda(N-1) & \\ & & \lambda(N-2) \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = 0, \quad \Lambda_3 = -\Lambda_1 \quad (4.8)$$

であり, 指数関数の計算において, 0-固有値の項が $(\exp 0)Q_2 = Q_2 \neq 0$ であることに注意すると,

$$\begin{aligned} & \exp(-itgB) \\ &= \exp(-itg\Lambda_1)Q_1 + (\exp 0)Q_2 + \exp(itg\Lambda_1)Q_3 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{N+2+(N+1)\cos(tg\lambda(N))}{2N+3} & -i\frac{1}{\sqrt{2N+3}}\sin(tg\lambda(N))a & \frac{1}{2N+3}(-1+\cos(tg\lambda(N)))a^2 \\ -i\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sin(tg\lambda(N-1))a^\dagger & \cos(tg\lambda(N-1)) & -i\frac{1}{\sqrt{2N+1}}\sin(tg\lambda(N-1))a \\ \frac{1}{2N-1}(-1+\cos(tg\lambda(N-2)))(a^\dagger)^2 & -i\frac{1}{\sqrt{2N-1}}\sin(tg\lambda(N-2))a^\dagger & \frac{N-1+N\cos(tg\lambda(N-2))}{2N-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.9)$$

と求まる. これは以前の結果 (2.5) と一致する.

参考文献

- [1] K.Fujii K.Higashida, R.Kato, T.Suzuki, Y.Wada, *Quantum Diagonalization Method in the Tavis-Cummings Model*, quant-ph/0410003.
- [2] K.Fujii K.Higashida, R.Kato, T.Suzuki, Y.Wada, *Explicit Form of the Evolution Operator of Tavis-Cummings Model: Three and Four Atoms Cases*, To appear in Int. J. of Geom. Methods in Mod. Phys.
- [3] K.Fujii and T.Suzuki, *A New Symmetric Expression of Weyl Ordering*, Mod. Phys. Lett. A19 (2004) 827-840.
- [4] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki, A.Yoshioka: *Strange phenomena related to ordering problems in quantizations*, J. of Lie Theory, Vol.13, No.2(2003), 481-510.