

微分体の整数論

モントリオール大 高橋秀一

宮城教育大

国吉秀夫

K : (常)微分体 すなわち, 線形写像

$$\partial: K \rightarrow K, \quad \partial(ab) = \partial a \cdot b + a \cdot \partial b$$

をもつ(可換)体, 標数 0 とする。(記号: $\partial a = a'$)

$$K_c := \{a \in K \mid \partial a = 0\} \quad \text{その定数体}$$

(以下, K_c は閉体と仮定する。)

このとき universal な微分体 $\tilde{K}$ とその定数体 $\tilde{K}_c$ が存在して, 拡大は $\tilde{K}$ の中で考える。

(記号: $K\langle \eta \rangle$ 微分体として $\eta \in \tilde{K}$ を K に添加したもの)

Kolchin の方法

G : 連結代数群で K_c 上定義されたもの

$\mathcal{L}(G)$: その Lie 代数

V : G 上の principal homogeneous K -space ($V_K \neq \emptyset$,
 K 代数閉体)

とすれば, V に對し γ も Lie 代数 $\mathcal{L}(V)$ が K 上定義され,

$\gamma \in V$ に對し $\lambda_\gamma: G \rightarrow V, x \mapsto \gamma x$ とすれば

$$\lambda_{\gamma*}: \mathcal{L}(G) \rightarrow \mathcal{L}(V)$$

さらに, 対数微分

$$l\partial: V \rightarrow \mathcal{L}(V), \quad l\partial(\gamma) \in \mathcal{L}(V)_{K\langle\gamma\rangle}$$

が i) $l\partial(\gamma x) = l\partial(\gamma) + \lambda_{\gamma*}(l\partial x), x \in G, \gamma \in V$

ii) K 上の同形写像 $\sigma: K\langle\gamma\rangle \rightarrow \widetilde{K}$ に對し

$$l\partial(\sigma\gamma) = \sigma l\partial(\gamma)$$

iii) $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ に對し

$$l\partial(\gamma_1) = l\partial(\gamma_2) \Leftrightarrow x = \gamma_1^{-1}\gamma_2 \in G_{\widetilde{K}_c}$$

(これは $\gamma_1 x = \gamma_2$ とする $x \in G$)

となるように定義できる。

例 $V = G \subset GL(n)$ のとき

$$l\partial(\gamma) = \gamma' \gamma^{-1} = a \in \mathcal{L}(G)_K$$

となる $\gamma \in V$ とすれば, K 上の iso. σ に對し

$$\gamma^{-1} \sigma \gamma = c(\sigma) \in G_{\widetilde{K}_c}$$

Galois 拡大 (strongly normal) L/K :

L/K finitely generated $\bar{K}$,

任意の K 上の iso. $\sigma: L \rightarrow \sigma L \subset \widetilde{K}$ に對し

$$\sigma L \subset L \cdot \widetilde{K}_c, \quad L \subset \sigma L \cdot \widetilde{K}_c$$

となるものとする。

そのとき, σ は $L\tilde{K}_c/K\tilde{K}_c$ の automorphism に一意に延長され, σ 全体の集合は $L\tilde{K}_c/K\tilde{K}_c$ の automorphism group と同一視できる. これを L/K の Galois 群といい, $\text{Gal}(L/K)$ と記す.

例 1) $L = K\langle \gamma \rangle$ γ は $\gamma' = a (a \in K)$ の解, $\gamma \notin K$

このとき, $\text{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{G}_a$

2) $L = K\langle \gamma \rangle$ γ は $\gamma' = a\gamma (a \in K)$ の解.

γ K 上超越, $L_c = K_c$

このとき, $\text{Gal}(L/K) \simeq \mathbb{G}_m$

3) Picard-Vessiot 拡大 $L = K\langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$

$\gamma_1, \dots, \gamma_n$ は $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, a_i \in K$
の基本解系, $L_c = K_c$

このとき, $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ に対し

$$\sigma(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) C(\sigma), \quad C(\sigma) \in GL(n, \tilde{K}_c)$$

となり, $\text{Gal}(L/K) \subset GL(n, \tilde{K}_c)$

定理

a) V は G 上の principal homogeneous K -space,

$\eta \in V \in K$ 上 generic 系

$$\text{let } \gamma \in \mathcal{L}(V)_K$$

とする. もし, $L = K\langle \gamma \rangle = K(V)$ の定数体 L_c が
 K_c と一致する ($L_c = K_c$) ならば

$K\langle \gamma \rangle / K$ は Galois 拡大

$$\text{Gal}(K\langle\gamma\rangle/K) \cong G_{K_c} \quad (K_c \text{ 同形})$$

$$\sigma \longmapsto c(\sigma) = \gamma^{-1} \cdot \sigma \gamma$$

b) 逆に $L/K \in \text{galois 拡大}$, K_c 同形

$$c: \text{Gal}(L/K) \cong G_{K_c}$$

が存在するとき,

G 上のある principal homogeneous K -space V と

K 上 generic な点 $\gamma \in V$ かつ

$$\text{ld}(\gamma) \in \mathcal{L}(V)_K$$

となるものが存在して

$$L = K\langle\gamma\rangle = K(V)$$

かつ, 任意の $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ に対して

$$\sigma\gamma = \gamma c(\sigma)$$

が成立する。

([2] Ch VI, §10, Th 9; a) によりては, このとき

$$\text{trans. deg } K\langle\gamma\rangle/K = \dim G$$

註) galois cohomology set $H^1(K, G)$ は G 上の principal homogeneous K -space の K -同形類の集合と 1対1に対応する

([2] Ch V, §13) から, $H^1(K, G) = 1$ ならば $V \simeq G$ かつ, 上

の定理は G のみ考えればよい。

$G = \mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m, \text{GL}(n), \text{SL}(n)$ のときは $H^1(K, G) = 1$ である。

Galois 理論 (Kolchin - Lang [3])

以上の線に沿えば, galois 拡大 L/K に関する Galois の基本定理は次の形になる。

$$\begin{array}{ccccc}
 L = K(V) & \longleftrightarrow & V & \longleftrightarrow & 1 \\
 | & & | & & | \\
 B = K(V/H) & \longleftrightarrow & V/H & \longleftrightarrow & H \\
 | & & | & & | \\
 K = K\langle 1 \rangle & \longleftrightarrow & 1 = V/G & \longleftrightarrow & G = \text{Gal}(L/K)
 \end{array}$$

Ritt の方法

$U \supset V$ を複素球面 $\mathbb{C}$ 上の connected open set, $\mathcal{M}$ を有理形関数の層とする。そのとき, U, V 上の有理形関数全体の集合をそれぞれ $K = T(U, \mathcal{M})$, $L = T(V, \mathcal{M})$ とすれば

$$\text{Res} : K = T(U, \mathcal{M}) \hookrightarrow L = T(V, \mathcal{M})$$

により, L は K の微分拡大となる。(K, L において, $\partial = \frac{d}{dz}$)

(3) $U = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$ とすれば

$$\log z \notin K = T(U, \mathcal{M}), \quad \log z \in L = T(V, \mathcal{M})$$

∴ $\log z$ は $y' = \frac{1}{z}$ の解である。

Kummer 理論

K を微分体, $\tilde{K}, K_c, \tilde{K}_c$ は上述の通りとする。(K_c 種数 0, 代数閉体)

L/K は galois 拡大 Γ , $\text{Gal}(L/K)$ が連結線形可換とする。

このとき, 構造定理より, injective K_c -hom

$$\text{Gal}(L/K) \hookrightarrow (\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a)^N$$

が存在する。

$$G = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$$

とあけば, $H^1(K, G) = \{1\}$. よって, G 上の principal homogeneous K -space は G と K -同形. また, このとき,

$$\mathcal{L}(G)_K = K \oplus K$$

ここで, $\ell\partial : G_K \rightarrow \mathcal{L}(G)_K$ は

$$\ell\partial(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1' \alpha_1^{-1}, \alpha_2')$$

により定義され, $\alpha, \beta \in G$ に対し

$$\ell\partial(\alpha\beta) = \ell\partial(\alpha) + \ell\partial(\beta)$$

さて,

$$\begin{aligned} A(L/K) &= \{a \in \mathcal{L}(G)_K \mid \exists \alpha \in G_L, \ell\partial \alpha = a\} \\ &= \ell\partial(G_L) \cap \mathcal{L}(G)_K \end{aligned}$$

とおくと, $\mathcal{L}(G)_K$ の部分加群であり

$$\mathcal{L}(G)_K \supset A(L/K) \supset \ell\partial(G_K)$$

である。ここで商(加)群

$$A(L/K) / \ell\partial(G_K) = \underline{A(L/K)}$$

を考える。以下, $a \in A(L/K)$ の代表する coset を $\underline{a}$ Γ 表す。

$\underline{a} \in \underline{A(L/K)}$ と $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ に対し, $\alpha \in G_L$, $\ell\alpha = a$ ととり

$$\langle \underline{a}, \sigma \rangle = \alpha^{-1} \cdot \sigma(\alpha) \in G_{K_c}$$

とすると, $\langle \underline{a}, \sigma \rangle$ は α のとり方によらない。そして,

$$\langle \underline{a+b}, \sigma \rangle = \langle \underline{a}, \sigma \rangle \langle \underline{b}, \sigma \rangle$$

$$\langle \underline{a}, \sigma\tau \rangle = \langle \underline{a}, \sigma \rangle \langle \underline{a}, \tau \rangle$$

$$\langle \underline{a}, \sigma \rangle = 1 \text{ for all } \sigma \in \text{Gal} \iff \underline{a} = \underline{0}$$

$$\langle \underline{a}, \sigma \rangle = 1 \text{ for all } \underline{a} \in \underline{A} \iff \sigma = 1$$

よって,

$$\begin{array}{ccc} \underline{A(L/K)} \times \text{Gal}(L/K) & \longrightarrow & G_{K_c} \\ \underline{a} \times \sigma & \longmapsto & \langle \underline{a}, \sigma \rangle \end{array}$$

は perfect pairing となる。

定理

$$\begin{array}{ccc} \text{a)} & \underline{A(L/K)} & \longrightarrow \text{Hom}_{K_c}(\text{Gal}(L/K), G_{K_c}) \\ & \underline{a} & \longmapsto \langle \underline{a}, \rangle \end{array}$$

は iso. である。

(ここで, 右側の群は $\text{Gal}(L/K)$ の character 群と考えられる。)

b) H を $\text{Gal}(L/K)$ の K_c 部分群とすれば

$$H^{\perp\perp} = H, \quad L_H = K_{H^{\perp}}$$

ここで, $\perp$ は上の pairing による直交集合を表し,

L_H は Galois 理論による H の不変体

$$K_{H^\perp} = K \langle \alpha \mid \alpha \in L, \ell \alpha = a, a \in H^\perp \rangle \quad \text{と表す。}$$

[証明]

1) $\langle a, \rangle : \text{Gal}(L/K) \rightarrow G_{K_c}$ は K_c -hom. である。

([2], Ch VI, Th 6 の証明と同様にして証明できる。)

2) $a \mapsto \langle a, \rangle : \underline{A(L/K)} \rightarrow \text{Hom}_{K_c}(\text{Gal}(L/K), G_{K_c})$

は全射である。

$f : \text{Gal}(L/K) \rightarrow G_{K_c}$ は K_c -hom. とする。 $G = G_m \times G_a$, $\text{Gal}(L/K) \simeq G_m^r \times G_a^s$ だから, f は Gal の直積因子 H_i ($\simeq G_m, G_a$) から G_m または G_a への K_c -hom f_i の積に分解される。よって, 各 f_i が $\underline{A(L/K)}$ の像に入ることを示す。

$H_i \simeq G_m$ のとき, $\text{Hom}_{K_c}(H_i, G_m) \simeq \mathbb{Z}$ だから, f_i が K_c 同形のときに示せばよい。

$H_i \simeq G_a$ のとき, $f_i \neq 0$ ならば, f_i は K_c 同形

H_i の ($\text{Gal}(L/K)$ における) 直積余因子に対応する L/K の中間体を L_i とすれば, $\text{Gal}(L_i/K) \simeq H_i$ であり,

$$f_i : \text{Gal}(L_i/K) \rightarrow (G_m \text{ または } G_a \subset) G$$

は injective K_c -hom.

$H^1(K, G) = 1$ であるから, [2] Ch VI, § 9, Cor 1 より,

$$\exists \alpha \in G_{L_i}; \ell \alpha = a \in \mathcal{L}(G)_K, \quad \sigma \alpha = \alpha f(\sigma) \quad (\sigma \in \text{Gal}(L_i/K))$$

$$\therefore f_i \langle \rangle = \langle a, \rangle$$

3) $H \in \text{Gal}(L/K)$ の K_c 部分群とする。 $H^{\perp\perp} \supset H$ は定義より明。

$\sigma \in \text{Gal}(L/K) - H$ とし, $f \in K_c \text{Hom} : \text{Gal}(L/K) \rightarrow G$ 7", $\text{Ker } f \supset H$, $f(\sigma) \neq 1$ となるものとするれば, 2) より, $f(\sigma) = \langle a, \sigma \rangle$ となる $a \in \underline{A}$ が存在. そのとき, $a \in H^\perp$ $\therefore \sigma \notin H^{\perp\perp}$ $\therefore H^{\perp\perp} = H$.

$L_H = K_{H^\perp}$ はこれから直ちに出来る. □

註 1) 定理を図示すれば

$$\begin{array}{ccccc} L & \longleftrightarrow & \underline{A(L/K)} & \longleftrightarrow & 1 \\ | & & | & & | \\ L_H & \longleftrightarrow & \underline{B} = H^\perp & \longleftrightarrow & H \\ | & & | & & | \\ K & \longleftrightarrow & \underline{0} & \longleftrightarrow & \text{Gal} \end{array}$$

註 2) $\underline{A}$ の $\underline{0}$ の近傍として

$$U(E, F) = \{ a \in \underline{A} \mid \langle a, \sigma \rangle \notin F, \sigma \in E \}$$

E は $\text{Gal}(L/K)$ の有限集合, F は G_{K_c} の有限集合で 1 を含まぬものとする。

E, F をこの条件をみたすもの全体と動かして, $U(E, F)$ により $\underline{A}$ に位相を入れる。 b) において, K_c 部分群 H に対応する $\underline{B} = H^\perp$ は, この位相による $\underline{A}$ の閉部分群として characterize される。

註 3) $y' = ay$, $a \in K$, の形の解 (exponential) のみの場合
 大体に γ は Rosenlicht [5].

附録 定数体 γ について.

1) $L = K\langle y \rangle$, $y' = a \in K$ のとき $L_c = K_c$ ([1] p23)

2) $L = K\langle y \rangle$, $y' = ay$, $a \in K$ のとき,

$$A(L/K) = \{a \mid a \in K, \exists \alpha \in L, \alpha' \alpha^{-1} = a\}$$

とおき, $A(L/K) / \partial(\mathbb{G}_m)_K$ は torsion part がいなければ,

$L_c = K_c$ が 1) と同様に γ で証明できる.

torsion part がいなければ, $L_c = K_c$ は必ずしも成立しない.

例 $K = K_c(X)$, K_c 閉体, $\partial = \frac{d}{dx}$ とする. このとき,
 $L = K\langle y \rangle$, $y' = \frac{1}{2x} y$ の形で $L_c \neq K_c$ となるものが作れる. 実際,

$$c \in \widetilde{K}_c - K_c \text{ として } y = \sqrt{cx} \text{ とおけば}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2x} \quad \text{—} \quad \text{よ} \quad c = \frac{y^2}{x} \in K\langle y \rangle, \text{ 定数}$$

参考文献

- [1] I. Kaplansky, An introduction to differential algebra,
 Hermann, Paris, 1957
- [2] E. Kolchin, Differential algebra and algebraic

groups, Academic Press, New York, 1973

- [3] E. Kolchin - S. Lang, Algebraic groups and the Galois theory of differential fields, Amer. J. Math. 80 (1958), 103-110

- [4] J. F. Ritt, Differential algebra, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., vol 33, New York, 1950

- [5] M. Rosenlicht, Differential extension fields of exponential type, Pacific J. Math. 57 (1975) 289-300