

Double commutant theorem for topological $*$ -algebras

宮城教育大 板垣 芳雄

Hilbert space H では通常 unbounded となるような operators も含むような operator algebra について考える。Powers, R.T. (Comm. math. Phys., 21, 1971) が性質のよい algebra として導入した self-adjoint algebra $\mathcal{O}$ については, von Neumann algebra の double commutant theorem が拡張されることを示すのが主要部分である (Theorem 2)。Powers は commutant として H 上の bounded operators からなるなるべく大きい集合 $\mathcal{O}'$ をとっているが (本講究録, 御園生参照), われわれは $\mathcal{O}$ の元の共通定義空間 $\mathcal{D}$ 上の linear operators からとる。これを $\mathcal{O}'$ と記す。いわゆる rigged Hilbert space (Gelfand triplet) の base space $\mathcal{D}$ 上の連続な operator の algebra として考えようというのがわれわれの立場である。従って commutant $\mathcal{O}'$ は一般に H 上 unbounded となる

operators を含むことになりが、self-adjoint algebra
 のときは、 $\mathcal{O}'$ の i L^2 上 bounded operators であるもの
 ($\mathcal{O}'$)_b は $\mathcal{O}'$ と一致するのである (Lemma 1, ← Powers).
 次に $\mathcal{O}$ が commutative self-adjoint のとき $\mathcal{O}$ の元が全て
 essentially self-adjoint であることを示す (Proposition
 6).

くわしく定義を述べる前に、われわれの設定が自然に現わ
 れているような具体例を一つあげておく。

実軸 $\mathbb{R}$ 上ユニタリトポをもつ無限回可微分関数の空間 $\mathcal{O}$,
 $\mathcal{O}$ 上の translation $x(s) \mapsto x(s-t)$ を $\tau_t (= \delta_t^*)$ と
 する。 $\mathcal{O} = \{\tau_t; t \in \mathbb{R}\}$ と可換な $\mathcal{O}$ から $\mathcal{O}$ への連続な線型
 作用素はユニタリトポをもつ超関数 $f(t, t')$ によつて
 $x \mapsto f * x$ と表わされる。 $\mathcal{O}' = \mathcal{O}^*$ は $f(s) \mapsto \bar{f}(-s)$ を
 involution として可換な $*$ -algebra である。 $\mathcal{O}'$ は L^2
 ($\cap \mathcal{O}$) 上 unbounded となる operators を含む。

一対 $\{\tau_t\}$ は連続な 1 径数半群を作り、その generator
 は $\frac{d}{ds}$ である。

τ_t は L^2 上 unitary operator であるが $\frac{d}{ds}$ は L^2 上 連
 続でない。しかし $\mathcal{O}$ 上では連続である。

$\frac{d}{ds}$ on $\mathcal{O}$ ($= \delta^*$) と可換な $\mathcal{O}$ から $\mathcal{O}$ への連続な線型作
 用素全体は $\tau_t \mathcal{O}' (\cap \mathcal{O})$ である。

§ 1. 定義と記号

簡単のため Φ は reflexive Fréchet space とし, 連続な内積 $(\cdot, \cdot)$ をもつとする. H を Φ の内積に $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と整備化した Hilbert space, Φ' を Φ の dual space とし, これら triplet を identification

$$\Phi' \supset H' = H \supset \Phi$$

の Φ と Φ' にあてはまる. Φ' には Φ による polar topology を導入すると, 上の $\supset$ は densely embedding である. 以下 Φ には $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とあてはまる, Φ' , H または Φ 上の operators 同士で, Φ に restrict したとき一致するものは同一視する.

Φ 上の (Φ から Φ への) continuous linear operators 全体からなる algebra を $L(\Phi)$, Φ' 上でのものを $L(\Phi')$ で表わす. $L(\Phi)$ には次の semi-norms 系で topology (weak topology と呼ぶことにする) を導入する.

$$|(Ax, y)|, \quad x, y \in \Phi.$$

明かには, $L(\Phi)$ は weak topology に関して separately continuous である. 次に, $L(\Phi)$ の元 A に対し, A の transpose $A' \in L(\Phi')$ (Φ への restriction $A|_{\Phi}$) がまた $L(\Phi)$ の元であるとき, それを $A^\#$ と記す. $L(\Phi)$ の subalgebra $\mathcal{O}$ に対し $\{A \in \mathcal{O}; A' \in \mathcal{O}\}$ を $\mathcal{O}_s$ で表わす.

involution : $A \mapsto A^\#$ で与えられた subalgebra $\mathcal{O}_s$ を

($\mathcal{O} = \mathcal{O}_s$), symmetric algebra と"う"と"い"ふ。以下
 下で symmetric algebra と"う"と"き"

(i) $\mathcal{O} \ni I$ (恒等作用素), (ii) $\mathcal{O}_b = \mathcal{O} \cap \mathcal{B}(H)$ ($\mathcal{O}$
 の元で H 上 bounded な operator 全体) が $\mathcal{O}$ で dense,
 を仮定する。symmetric algebra $\mathcal{O}$ に τ なる τ 形式が等
 号で成立するとき, $\mathcal{O}$ は self-adjoint であるといふ。

$$\Phi \subset \bigcap_{A \in \mathcal{O}} \mathcal{D}(\bar{A}) \subset \bigcap_{A \in \mathcal{O}} \mathcal{D}(A^*)$$

ただし, $\bar{A}$ は A の H に与えられた closure, $\mathcal{D}(\bar{A})$ は $\bar{A}$ の domain,
 A^* は A の H での adjoint で $\mathcal{D}(A^*) = \{x \in H; A^*x \in H\}$ 。

algebra $\mathcal{O} \subset L(\Phi)$ の commutant $\mathcal{O}'$ は次のように定
 義する。

$$\mathcal{O}' = \{C \in L(\Phi); CA = AC, \forall A \in \mathcal{O}\}$$

$\mathcal{O}'$ は weakly closed な algebra であるが, 必ずしも
 symmetric でない。

また, $L(\Phi)$ の subsets $\mathcal{O}, \mathcal{B}$ に対し, $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}$ ならば
 $\mathcal{O}' \supset \mathcal{B}'$, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}''$. (ただし, τ

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O}''' = \mathcal{O}^{(v)} = \dots$$

$$\mathcal{O}'' = \mathcal{O}^{(v')} = \mathcal{O}^{(v'')} = \dots$$

§2. 定理と証明

Lemma 1. $\mathcal{O}$ が self-adjoint algebra のとき,
 $(\mathcal{O}')_0$ は, $\mathcal{O}_0$ の $B(H)$ での commutant $\mathcal{O}_0^c$ と一致し, 従って von Neumann algebra である。

Proof. $(\mathcal{O}')_0 \subset \mathcal{O}_0^c$ は AAS が成り立つ。以下逆を示す。
 $\mathcal{O}_0^c$ の任意の $\bar{C} \in \overline{\mathcal{O}'}_0$ に対し

$$(CAx, y) = (A(x, y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{D}, \quad \forall A \in \mathcal{O}_0.$$

$$\text{従って } (CAx, y) = (Cx, A^*y), \quad \forall A \in \mathcal{O} \quad (1)$$

$$\text{ゆえに } \exists k > 0; |(Cx, A^*y)| \leq k \|y\|, \quad \forall y \in \mathfrak{D}.$$

$\therefore Cx \in \mathcal{D}(A^{**})$. これが任意の $A \in \mathcal{O}$ について成立するのだから, 仮定より

$$Cx \in \bigcap_{A \in \mathcal{O}} \mathcal{D}(A^{**}) = \bigcap_{A \in \mathcal{O}} \mathcal{D}(A^*) = \mathfrak{D}.$$

従って C は $\mathfrak{D}$ から $\mathfrak{D}$ への operator であり, $C^* \in \mathcal{O}_0^c$ で $C^* \in \mathfrak{D}$ 上の operator であるから, C は closed operator である。 $\mathfrak{D}$ は Fréchet space としたから, closed graph theorem が適用でき $C \in L(\mathfrak{D})$ 。また, $x \in \mathfrak{D}$ に対し $CAx = A^{**}Cx = ACx$, よって $C \in \mathcal{O}'$ が示された。

Remark. 一般には, (1) を満たす $B(H)$ の $\bar{C}$ 全体は, 積について閉じていない。

Theorem 2. $\mathcal{O}$ is self-adjoint algebra and

$$(\mathcal{O}')_b' = \mathcal{O}'' = \mathcal{O}^{\sim} \quad (\mathcal{O} \text{ is weak closure}).$$

Proof. $(\mathcal{O}')_b' \supset \mathcal{O}'' \supset \mathcal{O}^{\sim}$ is obvious. For $\mathcal{O}_b$ is $(\mathcal{O}')_b'$ is dense is to be shown. It is enough to show that $\mathcal{O}_b$ is dense. Let $x \in \mathbb{H}$ be arbitrary, $\mathcal{M} = \{Ax; A \in \mathcal{O}_b\}$ and H is its closure. $\mathcal{O}_b$ is arbitrary element A is added, $A \in H$ is an operator and A is continuous. $Am \subset \mathcal{M}$ and $A^*m \subset \mathcal{M}$. Therefore, H is $\mathcal{M}$ is a projection E and

$$EA = AE, \quad EA^*E = A^*E.$$

Therefore, E is adjoint and $EA = AE$, and

$$AE = EA.$$

A is $\mathcal{O}_b$ is arbitrary element, and $E \in \mathcal{O}_b' = (\mathcal{O}')_b$.

Let $(\mathcal{O}')_b'$ is arbitrary element $B \in \mathcal{B}$ and

$$N_\epsilon = \{A \in L(\mathbb{H}) ; |(A-B)x, y| < \epsilon, x, y \in \mathbb{H}\}$$

and $\epsilon > 0$, then $I \in \mathcal{O}$ and $I \in N_\epsilon$ is to be shown.

$$Bx = BEx = EBx \in \mathcal{M}$$

$$\text{Therefore, } \exists A \in \mathcal{O}_b ; \|Ax - Bx\| < \frac{\epsilon}{\|y\|}.$$

Therefore, $\mathcal{O}_b \cap N_\epsilon \neq \emptyset$.

Next, B is arbitrary element

$$N = \{A \in L(\mathbb{H}) ; |(A-B)x_i, y_i| < \epsilon, i=1, 2, \dots, n\}$$

に於て $\exists A \in N \cap \mathcal{O}_b$ が示す。

$H^+ = H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$, $\overline{H}^+ = \overline{H} \oplus \overline{H} \oplus \cdots \oplus \overline{H}$ は direct sum of n -copies として, $A \in L(\overline{H})$ に於て, $\overline{H}^+$ 上の operator A^+ は

$$A^+(x_1, x_2, \dots, x_n) = (Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n)$$

で定義する。 $\mathcal{O}^+ = \{A^+; A \in \mathcal{O}\}$ は $H^+ \times \overline{H}^+$ に作用する self-adjoint algebra であり, $(\mathcal{O}^+)'$ は

$$B(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n B_{1i} x_i, \sum_{i=1}^n B_{2i} x_i, \dots, \sum_{i=1}^n B_{ni} x_i \right),$$

$$B_{ij} \in \mathcal{O}'$$

なるような $B \in L(\overline{H}^+)$ 全体からなる。従って, 先の議論より

$$(\mathcal{O}^+)'_b = (\mathcal{O}^+)'_b \quad \text{で, 更に}$$

$$\forall B^+ \in (\mathcal{O}^+)'_b, \quad \exists A^+ \in (\mathcal{O}^+)_b;$$

$$\begin{aligned} \|(A^+ - B^+)(x_1, x_2, \dots, x_n)\| &= \sum_{i=1}^n \|(A - B)x_i\| < \\ &< \varepsilon / \max \|y_i\| \end{aligned}$$

と ε で容易に確かめられるように

$$(\mathcal{O}^+)'_b = (\mathcal{O}')_b^+, \quad (\mathcal{O}^+)_b = (\mathcal{O}_b)^+$$

であるから $A \in N \cap \mathcal{O}_b$ 。

Remark. 証明から知られるように, この定理は Lemma 1 の結論 $(\mathcal{O}')_b = \mathcal{O}_b'$ が成立するような symmetric algebra について成立する。

Corollary 3. weakly closed algebra $\mathcal{O}$ with dense $\mathcal{O}_b \Rightarrow \mathcal{O}_s$ is self-adjoint if & only if $\mathcal{O} = \mathcal{O}''$.

$B(\mathfrak{H}) = L(\mathfrak{H}) \cap L(\mathfrak{H}')$ is the system of semi-norms & topology $\mathfrak{E}$ is defined.

$$| \langle Ax, y \rangle |, | \langle A^*x, y' \rangle |, \quad x \in \mathfrak{H}, y' \in \mathfrak{H}'.$$

is, commutant is $\mathcal{O}'$

$$\mathcal{O}' = \{ C \in B(\mathfrak{H}) ; CA = AC, \forall A \in \mathcal{O} \}$$

is, $\mathcal{O}' \supset \mathcal{O}' \supset (\mathcal{O}')_b$ is the double commutant theorem of von Neumann algebra is extended, the next is established.

Corollary 4. $\mathcal{O}$ is $B(\mathfrak{H})$ -closed, self-adjoint algebra if & only if $\mathcal{O} = \mathcal{O}''$.

Theorem 2 of the conditions is $(\mathcal{O}')_b' = \mathcal{O}''$ is, $(\mathcal{O}')_b$ is $\mathcal{O}'$ is dense is, the problem is $\mathcal{O}'$ is dense is, $(\mathcal{O}')_b$ is

Proposition 5. $\mathcal{O}$ is self-adjoint algebra is, (if $\mathcal{O}_b$ is von Neumann algebra is, $(\mathcal{O}')_b$ is $\mathcal{O}'$ is dense is von Neumann algebra is).

Proof. Theorem 2 of Remark 1, $\mathcal{O}$ is self-adjoint

でなくとも, $(\mathcal{O}')_b = \mathcal{O}_b^c$ ならば $\mathcal{O}_b$ は $\mathcal{O}'$ で dense であり, $\Gamma =$. 仮定より $(\mathcal{O}')_b = \mathcal{O}_b^c$. 両辺の $B(H)$ での commutant をとると $(\mathcal{O}')_b^c = \mathcal{O}_b^{cc} = \mathcal{O}_b = (\mathcal{O}'')_b$. 従って上に注意 ($\Gamma =$ とから), $(\mathcal{O}')_b$ は $(\mathcal{O}')'' = \mathcal{O}'$ で dense である。

Proposition 6. $\mathcal{O}$ は commutative self-adjoint algebra ならば

- (i) $A^* = \overline{A}$, for $\forall$ symmetric operator $A \in \mathcal{O}$,
- (ii) $A^* = \overline{A^*}$, for $\forall A \in \mathcal{O}$.

Proof. (i). $A \in \mathcal{O}$ は symmetric operator である。

$\overline{A+iI}$ の polar decomposition を UP とする。 U は H から $\overline{R(A+iI)}$ への isometry である。 すると $U \in (\mathcal{O}')_b^c$ を示す。 任意の unitary operator $V \in (\mathcal{O}')_b$ に対し, $\perp$ 上で

$$(A+iI)V = V(A+iI). \quad \text{従って}$$

$$V^*(A+iI)V = A+iI.$$

両辺の closure をとると

$$V^*(\overline{A+iI})V = \overline{A+iI}$$

$$\therefore (V^*UV)(V^*HV) = UH.$$

polar decomposition の一意性より

$$V^*UV = U, \quad \text{すなわち} \quad UV = VU.$$

従, $U \in (\mathcal{O}')_b^c = \mathcal{O}_b^{cc}$.

$\mathcal{O}_b^{cc}$ は仮定より commutative であるから,

$$UU^* = U^*U.$$

ゆえに $H = \overline{\mathcal{R}(A + iI)}$ であり, A a positive deficiency は 0 である.

同様にして $H = \overline{\mathcal{R}(A - iI)}$ が示されるから, A は essentially self-adjoint である.

(ii) 任意の $A \in \mathcal{O}$ に対し

$$H_1 = A^{\#*} \bar{A}^{\#} \supset A A^{\#}$$

$$H_2 = \bar{A} A^{\#} \supset A A^{\#}.$$

上を示したことは, $A A^{\#}$ は essentially self-adjoint である

$$\text{から } H_1 = \overline{A A^{\#}} = H_2.$$

$$\text{ゆえに } \mathcal{D}(\bar{A}^{\#}) = \mathcal{D}(H_1^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{D}(H_2^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{D}(A^{\#}).$$

$$\therefore \bar{A}^{\#} = A^{\#}.$$

Remark. 逆に, symmetric algebra $\mathcal{O}$ に対して (ii) が成立すれば

$$\bigcap_{A \in \mathcal{O}} \mathcal{D}(\bar{A}) = \bigcap_{A \in \mathcal{O}} \mathcal{D}(A^{\#})$$

であるから, これを満たす $\mathcal{O}$ とすれば, $\mathcal{O}$ は self-adjoint である.