

A new generalization of Verma modules,
and b -functions.

京大教養 行者明彦 (Akihiko Gyoja)

はじめに. 記号を用意する.

G : 複素 reductive Lie 群 $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$

B : Borel 部分群 $\mathfrak{b} = \text{Lie}(B)$

$T \subset B$: 極大トーラス $\mathfrak{t} = \text{Lie}(T)$

$\mathfrak{t}^\vee = \text{Hom}(\mathfrak{t}, \mathbb{C})$

$R \subset \mathfrak{t}^\vee$: ルート系

$\mathfrak{g}(\alpha)$: ルート空間

$R_+ = \{\alpha \in R \mid \mathfrak{g}(\alpha) \subset \mathfrak{b}\}$ $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$

$\Pi \subset R_+$: 基

s_α ($\alpha \in R$): 鏡映

$S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$

$W = N_G(T)/T$: ワイル群

$\ell: W \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ length function

これから, $I \subset S$ を ひとつ, 固定する.

W_I : I から生成される W の部分群

$\Pi_I: \{\alpha \in \Pi \mid s_\alpha \in I\}$.

R_I : Π_I から生成される R の部分ルート系.

$(W/W_I)_\ell = \{x \in W \mid x \text{ は } xW_I \text{ の中で最長元}\}$

w_I : W_I の最長元.

$$\underline{\ell} = \underline{\ell}(I) = \underline{t} + \sum_{\alpha \in R_I} \varphi(\alpha)$$

$$\underline{u}_\pm = \underline{u}_\pm(I) = \sum_{\alpha \in R_+ \setminus R_I} \varphi(\pm \alpha) \quad (\text{複号同順})$$

$$\underline{p} = \underline{p}(I) = \underline{\ell} + \underline{u}_+$$

$$\underline{t}_I^\vee = \{W_I\text{-不変指標 } \lambda \in \underline{t}^\vee\}$$

$$\underline{\pi}_\pm = \sum_{\alpha \in R_+} \varphi(\pm \alpha)$$

$\underline{L}, \underline{U}_\pm, \underline{P}$ etc. : $\underline{\ell}, \underline{u}_\pm, \underline{p}$ etc. に対応する部分群

$$Y = G/P$$

$y_0 \in Y$: $e \in G$ に対応する Y の点.

以上の記号を用いる.

$(\lambda, \mathbb{C})$ を $\underline{p}$ の一次元表現 (指標) とする. この時

$$M(\lambda, \underline{p}) = \bigsqcup_{\underline{U}(\underline{p}), \lambda} (\varphi) \otimes \mathbb{C}$$

とおき. これを generalized Verma module とよぶ. 特に $\underline{p} = \underline{b}$ の時, $M(\lambda, \underline{b})$ を Verma module とよぶ. (ここで, $\bigsqcup(\cdot)$ は, $\mathbb{C}$ 上の enveloping algebra.)

Brylinski-Kashiwara 及び Beilinson-Bernstein による Kazhdan-Lusztig 予想の証明において.

$$(*) \quad \{\text{Verma modules}\} \longleftrightarrow \{B\text{-orbits in } G/B\}$$

という対応が、重要な役割をはたした。同様の意味で、

「 G/P 上の、 B -orbits に対応する $\mathfrak{g}$ -module は、何か？」
 という問題を考えよう。最初に思いつく解答は、generalized
 Verma module であろうが、実は、これでは足りない。

$$(**) \quad \{\text{generalized Verma modules}\} \subsetneq \{?\} \leftrightarrow \{B\text{-orbits in } G/P\}.$$

我々の、次のテーマは、上の $\{?\}$ を構成し、その諸性質を
 調べることである。(定理1~4)

簡単なことであるが、 $\bigcup \mathcal{Y}_0$ は、 $Y = G/P$ の open dense な
 部分集合であり、すべての B -orbits と、交わる。また、この
 open set $\bigcup \mathcal{Y}_0$ は、 L -stable であり、 L の作用する空間とし
 て $(L, \text{ad}, \mathcal{U}_-)$ と、同一視できる。後者は、かなり深い意
 味で、概均質ベクトル空間と似ている。たとえば、

- $(L, \text{ad}, \mathcal{U}_- / [\mathcal{U}_-, \mathcal{U}_-])$ は、概均質ベクトル空間。(Vinberg)
- “ b -函数が、具体的に求まる。” (Kashiwara) 等。

従って、対応(**)を通じて、generalized Verma module や、
 その一般化に関する研究は、かなりの程度まで。

$$(L, \text{left action}, \sqcup\text{-}y_0) \simeq (L, \text{ad}, \sqcup\text{-})$$

の研究に帰着できるはずであり、その研究には、概均質ベクトル空間の理論における手法が有効になると期待される。我々の才二のテーマは、generalized Verma module 等の submodules にかかわる研究が、完全に $(L, \text{ad}, \sqcup\text{-})$ の研究に帰着できることを示すことである。(定理 5.) この直接の応用として、generalized Verma module の既約性と、b-函数の関係が得られる。この結果は、Suga: 数理研講究録 718 (commutative parabolic case) の一般化になっている。実際、この研究をはじめた動機は、Suga の結果を、統一的な視点から理解したい、ということであった。

次に、正確な結果を述べる。まず、(**) の $\{?\}$ を、どのように構成するか、というところから始める。

$$\begin{aligned} A &= \sqcup(\mathfrak{t}) / \sum_{H \in \mathfrak{t}, w \in W_I} \sqcup(\mathfrak{t})(H - w(H)) \\ &= \sqcup(\mathfrak{t}) / \sum_{\alpha \in \Pi_I} \sqcup(\mathfrak{t}) \alpha^\vee \end{aligned}$$

$c: \mathfrak{t} \rightarrow A$ 自然な写像

とし、 c から誘導される準同型

$$A \otimes \sqcup(\mathfrak{b}) =: \sqcup_A(\mathfrak{b}) \rightarrow A$$

も、同じ文字 c であらわす。 c を universal W_I -invariant

character of $\pm$ と呼ぶ。

$$M_A(w(c-p)-p, \underline{b}) := \bigcup_A(\mathfrak{g}) \otimes_{\bigcup_A(\underline{b}), w(c-p)-p} A$$

とおくと、 $\bigcup_A(\mathfrak{g})$ -module $M_A(w(c-p)-p, \underline{b})$ は、 $| \otimes |$ から生成される自由 $\bigcup_A(\mathfrak{n}_-)$ -加群になる。

$$M_A(w(c-p)-p, \underline{b})_+ := \bigcup_A(\mathfrak{n}_-) \mathfrak{n}_- \cdot (| \otimes |)$$

とし、 $J_A(w)$ を $M_A(w(c-p)-p, \underline{b})_+$ に含まれる最大の $\bigcup_A(\mathfrak{g})$ -submodule とする。

$$M_A(w, c, p) = M_A(w(c-p)-p, \underline{b}) / J_A(w)$$

とする。 $\lambda \in \pm_I^\vee$ は、 $\text{Hom}(A, \mathbb{C})$ の元を定める。これも、同じ文字 λ であらわし

$$M(w, \lambda, p) = M_A(w, c, p) \otimes_{A, \lambda} \mathbb{C}$$

とおく。この $M(w, \lambda, p)$ が、この研究の対象である。特に、 $w \in (W/W_I)_\ell$ の場合が、興味を中心である。

次に、 $M(w, \lambda, p)$ の性質について述べる。大すじとしては、その性質は、通常の Verma module と、よく似ている。

ただし、その証明には、今のところ D-module の一般論が、不可欠であり、以下の定理 1 に対応する結果が Verma module の場合には、ごく初等的に証明できたことと、著しい対照を

なす。以下、 $\lambda \in \mathfrak{t}_1^\vee$, $w \in (W/W_I)_e$ とする。

$$\text{定理 1} \quad \text{ch } M(w, \lambda, \rho) = e^{w(\lambda - \rho) - \rho} \prod_{\alpha \in R_+ \setminus wR_I} (1 - e^{-\alpha})^{-1}.$$

但し, ch は (formal) character.

$$\text{定理 2} \quad \langle \lambda - \rho, \alpha^\vee \rangle \neq 1, 2, \dots \quad \forall \alpha \in R_+$$

であれば, $\mathfrak{g}$ -module として.

$$M(w, \lambda, \rho)^* \cong H_{Bw y_0}^{\text{codim}_Y Bw y_0}(Y, \mathcal{O}_Y)$$

但し, $\alpha^\vee$ は coroot, $*$ は dual $\mathfrak{g}$ -module をあらわす。また、右辺の local cohomology は、

$$H_{Bw y_0}^{\text{codim}_Y Bw y_0}(wU \cdot y_0, \mathcal{O}_Y|_{wU \cdot y_0})$$

と同一視し, $\mathcal{O}_Y|_{wU \cdot y_0}$ は、自然な仕方で, $\mathcal{D}_Y(\lambda)$ -module と
思う。ここで, $\mathcal{D}_Y(\lambda)$ は, λ でひねった twisted ring of
differential operators. (cf. Beilinson-Bernstein : C.R. Acad.
Sci. Paris 292, Ser. I (1981), 15-18. Kashiwara :
Representation theory and $\mathcal{D}$ -modules の記号を用いると
 $\mathcal{D}_Y(\lambda) = \underline{A}_Y(\lambda)$.)

定理 3 (1) $M(w, \lambda, \rho(I))$ が, generalized Verma module
であるための必要十分条件は、

$$J := w I w^{-1} \subset S.$$

(2) 上の条件が、みたされたとすると、 $w(\lambda - \rho) - \rho$ は、 W_J -不変で、 $M(w, \lambda, \rho(I))$ は、generalized Verma module $M(w(\lambda - \rho) - \rho, \rho(J))$ に、等しい。

(3) 逆に、generalized Verma module $M(\lambda, \rho(I))$ は、かならず

$$M(\lambda, \rho(I)) = M(w_s, w_s \lambda, \rho(w_s I w_s))$$

とあらわせる。

定理4 $W_I^{(i)} = \{ x \in W_I \mid \ell(x) = i \}$

$$C_i = \bigoplus_{x \in W_I^{(i)}} M(w x (\lambda - \rho) - \rho, \underline{b})$$

: Verma modules の直和

$$n = \ell(w_I)$$

とすると、

$$0 \leftarrow M(w, \lambda, \rho) \leftarrow C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \cdots \leftarrow C_n \leftarrow 0.$$

という形の $M(w, \lambda, \rho)$ の resolution が、得られる。特に、

$$\dim \operatorname{Tor}_i^{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, M(w, \lambda, \rho)) = \operatorname{card} W_I^{(i)}.$$

以上は、結果を見る限り、Verma module の場合と、たいして、差はなかった。

最後に、 $M(w, \lambda, \rho)$ の submodules と、b-函数の関係について述べる。

定理 5

$$L_1 = \{ \mathcal{U}(\mathcal{G})\text{-submodules of } M(w, \lambda, \mathcal{P}) \}$$

$$L_1^* = \{ \mathcal{U}(\mathcal{G})\text{-submodules of } M(w, \lambda, \mathcal{P})^* \}$$

$$L_2 = \{ \text{coherent } \mathcal{D}_X(\lambda)\text{-submodules of } \mathcal{G}^* \mathcal{Y}(w) \}$$

$$L_3 = \{ \text{coherent } \mathcal{D}_Y(\lambda)\text{-submodules of } \mathcal{Y}(w) \}$$

$$L_4 = \{ \text{coherent } (\mathcal{D}_Y(\lambda)|_{\mathcal{U} \cdot y_0})\text{-submodules of } \mathcal{Y}(w)|_{\mathcal{U} \cdot y_0} \}.$$

とする。但し、

$$X = G/B \xrightarrow{\mathcal{G}} Y = G/P \quad \text{natural projection}$$

$$\mathcal{Y}(w) = \mathcal{H}_{Bw y_0}^{\text{codim}_Y Bw y_0} (\mathcal{O}_Y|_{w \mathcal{U} \cdot y_0})$$

$$\mathcal{O}_Y|_{w \mathcal{U} \cdot y_0} : \mathcal{D}_Y(\lambda)\text{-module}$$

とし

$$\langle \lambda - \rho, \alpha^\vee \rangle \neq 0, 1, 2, \dots \quad \forall \alpha \in R_+$$

であれば、包含関係による順序集合として、

$$L_1^{op} \simeq L_1^* \simeq L_2 \simeq L_3 \simeq L_4.$$

注意 $\mathcal{D}_Y(\lambda)|_{\mathcal{U} \cdot y_0} \simeq \mathcal{D}_Y|_{\mathcal{U} \cdot y_0}$ であり、同型も具体的に記述できるので、 L_4 はさらに、

$$L_5 = \{ \text{coherent } (\mathcal{D}_Y|_{\mathcal{U} \cdot y_0})\text{-submodules of } 1_{-\lambda} \otimes (\mathcal{Y}(w)|_{\mathcal{U} \cdot y_0}) \}$$

と同型になる。($1_{-\lambda}$ の定義は省く。) このようにして、

$M(w, \lambda, \mathcal{P})$ の submodule に関する研究は、 $(L, \text{ad}, \underline{u})$ 上
 $\mathcal{P}$.

の、通常の $\mathcal{O}$ -module の研究に帰着した。このような $\mathcal{O}$ -module の単純性が、 b -函数を用いて判定できるということは、目新しいことではない。また、その b -函数の具体形は、Kashiwara: Adv. Studies in Pure Math. 6 (1985), 67-81. に与えられている。(但し、 $w = w_S$ の場合.)

注意. 有限次元既約 $U(\mathfrak{g})$ -module F に対して、 $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{h})} F$ も、generalized Verma module とよばれる。しかし、 $\dim F > 1$ なら、決して、 $M(w, \lambda, P(J))$ と、同型にならないことが、示せるので、ここでは扱わなかった。