

アレンジメントの特性多項式と

logarithmic multi vector fields

国際基督教大学 (ICU) 理

奇尾光明

先に、筆者は、1981年に free arrangement について、その特性多項式 (characteristic polynomial) と、arrangement に沿った logarithmic forms との間に、次の関係を得た。

定理 ([2])。 $\mathcal{A}$ を free arrangement で、 $(d_1, \dots, d_\ell)$ をその exponents とするとき、 $\mathcal{A}$ の特性多項式 $\chi(\mathcal{A}; t)$ は、 $\prod_{i=1}^{\ell} (t - d_i)$ で与えられる。

ここでは、この公式を、全く一般の arrangement に拡張した公式を得たことを報告したい。これは、筆者が、P. Orlik-L. Solomon の好意により、1985年の夏を、米国の Wisconsin 大学で過ごすことができた折りの、彼らとの共同研究の中から生まれたものであり、ここで、彼ら両方から感謝したい。

さて、用語の解説から始めよう。 K を体として、 V を K 上の vector space とし、その次元を n とする。 V の hyperplane とは、 V の余次元 1 の subspace のことをいう。 V の arrangement とは、 hyperplanes の有限集合のことである。 ここで、 $L(\mathcal{A})$ ($\mathcal{A}$ は V の arrangement) とは、 $\mathcal{A}$ の元たちのすべての組み合わせの intersection の集合を指す。記号で書くと、

$$L(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcap_{H \in B} H \mid B \subseteq \mathcal{A} \right\}$$

となる。特に、 $\bigcap_{H \in \emptyset} H = V$ と解釈して、 $V \in L(\mathcal{A})$ と約束する。 さて、 $L(\mathcal{A})$ に、 inclusion の逆による partial order を入れる、

$$X \leq Y \Leftrightarrow X \supseteq Y.$$

すると、 $L(\mathcal{A})$ は、 lattice になるが、この lattice を ($\mathcal{A}$ の) intersection lattice とよぶ。 さて、 $L(\mathcal{A})$ 上の Möbius 函数 μ を考える。 μ は、 $\mu: L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$ であって、

$$\sum_{X \leq Z \leq Y} \mu(Z, Y) = \begin{cases} 1 & \text{if } X=Y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が、勝手な $X, Y \in L(\mathcal{A})$ について成立することである。特徴づけられる。 $\mathcal{A}$ の 特性多項式 $\chi(\mathcal{A}; t)$ は、

$$X(\mathcal{A}; t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(V, X) \cdot t^{\dim X}$$

によ, Z 定義される。これは, arrangement の組み合わせ論的研究において, 最も中心的な役割をする多項式である。

我々の新公式は, この $X(\mathcal{A}; t)$ を, ある種の graded modules $D^p(\mathcal{A})$ の Poincaré series を用いて表すものにも他ならない。この $D^p(\mathcal{A})$ に関して説明しよう。

$p=1$ の場合は, これは, " $\mathcal{A}$ による t -logarithmic vector fields の t -module" に他ならない。一般の p については, 次のように定義する。まず, $S = S(V^*)$ を, V の dual space V^* の対称代数とする。ここで,

$$\text{Der}^p(S) = \left\{ \theta : \underbrace{S \times \cdots \times S}_p \rightarrow S \mid \theta \text{ は } \mathbb{K}\text{-multi-linear } \right. \\ \left. \text{derivation} \right\}$$

と定義する。もちろん, $p=1$ のときは, 通常の derivation である。すると, $\text{Der}^p(S)$ は, 自然に graded- S -module になる。 $Q \in S$ を, $\mathcal{A}$ の定義式とする:

$$Q = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H, \quad \alpha_H \in V^*, \quad \ker(\alpha_H) = H.$$

ここ2.

$$D^p(\mathcal{A}) = \{ \theta \in \text{Der}^p(S) \mid \theta(Q, f_2, \dots, f_p) \in QS \\ \text{for any } f_2, \dots, f_p \in S \}$$

と定義すると、これは $\text{Der}^p(S)$ の graded S -submodule になる。我々の新しい公式は、次の通りである:

定理. 勝手な arrangement $\mathcal{A}$ について、

$$X(\mathcal{A}; t) = (-1)^{\ell} \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{p \geq 0} \text{Poin}(D^p(\mathcal{A}); x) \{t(x-1)-1\}^p$$

但し、 $\text{Poin}(D^p(\mathcal{A}); x)$ は、 $D^p(\mathcal{A})$ の Poincaré series を与える。

簡単のため、

$$\Psi(\mathcal{A}; x, t) = \sum_{p=0}^{\ell} \text{Poin}(D^p(\mathcal{A}); x) (t(x-1)-1)^p$$

を定義しよう。すると、上の新公式は、

$$X(\mathcal{A}; t) = (-1)^{\ell} \lim_{x \rightarrow 1} \Psi(\mathcal{A}; x, t)$$

と書ける。

free arrangement に関する公式 $X(\mathcal{A}; t) = \prod_{i=1}^{\ell} (t-d_i)$

との関係は次の通りである。 $\mathcal{A}$ の exponents とは、 free module $D^1(\mathcal{A})$ ($\mathcal{A}$ が free とは、 $D^1(\mathcal{A})$ が free module であることにより定義される) の基底の degrees に他ならなかったことを想起すれば、 $\text{Poin}(D^1(\mathcal{A}); x)$ は、 $(d_1, \dots, d_\ell)$ で完全に記述される。同様に、 $\text{Poin}(D^p(\mathcal{A}); x)$ ($p \geq 2$) も、実は、 $(d_1, \dots, d_\ell)$ で完全に記述されることが示せて、具体的には、

$$\Psi(\mathcal{A}; t) = \prod_{i=1}^{\ell} (1 + x + x^2 + \dots + x^{d_i-1} - x^{d_i} t)$$

となる。従って、ここで、 $x \rightarrow 1$ とすれば、新公式より

$$\chi(\mathcal{A}; t) = \prod_{i=1}^{\ell} (t - d_i)$$

を得、これが、 free arrangement に関する旧公式に他ならないという訳である。従って、新公式は、旧公式の一般化であると言える。

新公式の証明は、かなり複雑であるが、その道具として用いられる complexes について、少し述べる。2種類の complexes があるが、そのうちのひとつは、次のように作る。まず、 $\mathcal{A}$ は non-empty とし、 $H \in \mathcal{A}$ とする。 $\alpha = \alpha_H \in V^*$ を、 H の定義式とする。

$$\partial : D^p(\mathcal{A}) \rightarrow D^{p-1}(\mathcal{A})$$

を、 $(\partial\theta)(f_2, \dots, f_p) = \theta(\alpha, f_2, \dots, f_p)/\alpha$ ($\theta \in D^p(\mathcal{A})$)
と定義する ($f_2, \dots, f_p \in S$). この map ∂ は、

homogeneous of degree -1 であり、 $\partial \circ \partial = 0$
を満たす。我々は、complex

$$0 \rightarrow D^l(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} D^{l-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} D^0(\mathcal{A}) = S \rightarrow 0$$

を得る。実は、これが acyclic になるのである、 $\mathbb{Z}$ 。これが証明の u となるポイントである。もう u となる complex

は、次のように作る。 $h \in S$ を "generic" にとり、
、 $\deg h = d+1$ (h は同次式) としておく。

$$\partial_h : D^p(\mathcal{A}) \rightarrow D^{p-1}(\mathcal{A})$$

を、 $(\partial_h \theta)(f_2, \dots, f_p) = \theta(h, f_2, \dots, f_p)$ ($\theta \in D^p(\mathcal{A})$)
により、 $\mathbb{Z}$ 定義する ($f_2, \dots, f_p \in S$). この map ∂_h
は、homogeneous of degree d であり、 $\partial_h \circ \partial_h = 0$
であるので、complex

$$0 \rightarrow D^l(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial_h} D^{l-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\partial_h} \dots \xrightarrow{\partial_h} D^0(\mathcal{A}) = S \rightarrow 0$$

を得る。実は、この homology group が、 $\mathbb{K}$ 上有限次元になる。そのことから、上で定義した $\Psi(\mathcal{A}; x, t)$ が、 x について多項式になることがわかり (a priori には、

$\alpha=1$ で pole をもつ可能性がある) , 他の情報とうまく組み合わせで新公式を得る、というのが、きわめて大雑把な証明の荒筋である。

$K=\mathbb{C}$ のときには、Orlik-Solomon [1] の結果とあわせると、 $\mathbb{C}^l$ 内の超平面族の complement の Poincaré polynomial ~~は $t^l + \dots + 1$ である~~ ^が、それが、

$$t^l \Psi(A; 1, -t^{-1})$$

で表わされ、結局、Betti 数が、 $D^0(A), D^1(A), \dots, D^l(A)$ 等の、代数的情報で決まり、2 になることになる。

また、上記の complex

$$0 \rightarrow D^l(A) \xrightarrow{\partial_h} D^{l-1}(A) \xrightarrow{\partial_h} \dots \xrightarrow{\partial_h} D^0(A) = S \rightarrow 0$$

については、0 次 homology 以外は、すべて 0 ではないかと思われるが、— いくつかの仮定のもとでは証明可能 — 一般の場合の証明はできていない。

References

- [1] Orlik, P., Solomon, L.: Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Inventiones math.* 56, ~~167~~¹⁶⁷–189 (1980).

- [2] Terao, H.: Generalized Exponents of a free

- arrangement of hyperplanes and Shephard-Todd-Brieskorn formula. Ibid. 63, 159-179 (1981).