

安定過程と Dirichlet 空間 (II)

阪大理 岡部 靖憲

§1. 序

空間 D を R^n の 有界領域 D の 境界 ∂D は 充分に滑らかとする。

福島正俊氏が L^2 -Dirichlet space の理論を用いて、反射壁ブラウン運動 (さき、一般に、symmetric Brownian resolvent) を構成したことは (I) で説明したが、実は、J. Elliott も、Beurling-Selberg の意味の Dirichlet space の理論を用いて、 D が convex のときには、反射壁安定過程を構成していた。

そこで、私は 次のことを考えた。

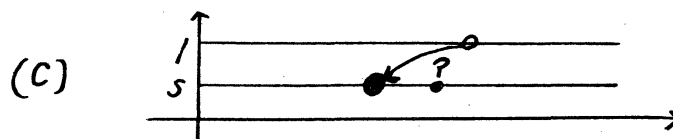
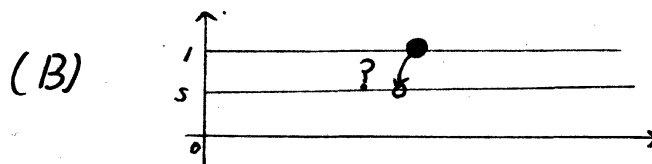
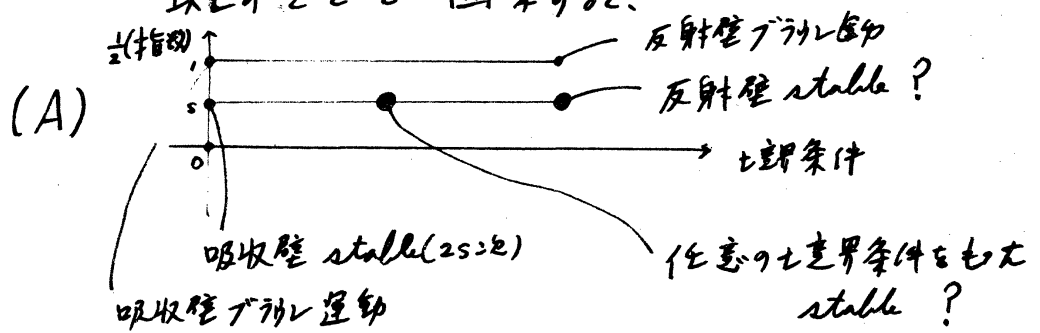
(A) “反射壁安定過程” そのものの正当化に重集をおき、吸収壁安定過程につけ加えうるすべての境界条件をもとめるのに、 L^2 -Dirichlet space の枠組の中へ行えないか？ 行えるとすれば、“反射壁安定過程” とは、“函数空間が一番大きく、norm が一番小さい” という意味において正当化される

のではないか？

(B) 全空間上の安定過程は、ブラウレ運動を subordination することによって得られることに注意して、(I)で考えた“任意の境界条件をもったブラウレ運動”を subordination することによって、(A)で考えた“ある境界条件をもった安定過程”が構成されるのか？

(C) 逆に、(A)で考えた“任意の境界条件をもった安定過程”は、(I)で考えた“ある境界条件をもったブラウレ運動”を subordination することによって得られるのか？

以上のことを図示すると、



この short communication では、
 問題(A)における“反射壁安定過程”を構成する
 のに、J. Elliott が用いた Dirichlet space を述
 べるにせよ、問題(B), (C) に対しては、また
 完成していないので省くが、藤原大輔氏が、
 Δ の分数中の定義域を具体的に決定した仕
 事を L^2 -Dirichlet space の枠組で解釈する
 ことは重要であると思われる。

§2. 反射壁安定過程

$n \geq 2$ とし、 D は convex する。

$$(2.1) \quad m(x, \xi) = -\frac{\partial}{\partial \eta_\xi} \left(\frac{1}{|x-\xi|^{n+2s-2}} \right), \quad x \in D, \xi \in \partial D$$

とすると、 D の convexity より

$$(2.2) \quad m(x, \xi) \geq 0$$

が成り立つ。

但し、 $0 < s < 1$ は固定されている。

次に、次の L^2 -Dirichlet space を考える。

$$(2.3) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}^{(\infty)}(u, u) = \int_D \int_{\partial D} (u(x) - u(\xi))^2 m(x, \xi) dx d\hat{\xi} + \\ \quad + \frac{C_s}{2} \int_D \int_D \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{\pi + 2s - 2}} dx dy \\ C_s = 2s(\pi + 2s - 2) \\ \mathcal{F}^{(\infty)} = \{u \in L^2(\bar{D}); \mathcal{E}^{(\infty)}(u, u) < \infty\} \end{array} \right.$$

注意 D の convexity は bilinear form が positive であることに用いられる。

何故、この L^2 - D -space $(\mathcal{F}^{(\infty)}, \mathcal{E}^{(\infty)})$ が “反射壁安定過程” を構成していることに着目するかを考えるとしよう。

$$(2.4) \quad \int_{\partial D} m(x, \xi) d\hat{\xi} = C_s \int_{D^c} \frac{1}{|x - y|^{\pi + 2s}} dy = m(x)$$

に注意すると、 $\forall u \in C_0^\infty(D)$ には、

$$(2.5) \left\{ \begin{array}{l} C_0^\infty(D) \subset \mathcal{F}^{(\infty)} \\ \mathcal{E}^{(\infty)}(u, u) = \int_D u(x)^2 m(x) dx + \frac{C_s}{2} \int_D \int_D \frac{(u(x) - u(y))^2}{|x - y|^{\pi + 2s - 2}} dx dy \end{array} \right.$$

が成り立つ。さらに、

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad & \int_D u(x)^2 m(x) dx + \frac{C_s}{2} \iint_D \frac{(u(x)-u(y))^2}{|x-y|^{\pi+2s-2}} dx dy \\
 & = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 |\xi|^{2s} d\xi \quad (u \in C_0^\infty(D))
 \end{aligned}$$

に注意すると、 $C_0^\infty(D)$ を この norm で 完備化して
 得るものは L^2 -Dirichlet space $(\mathcal{F}^{(0)}, \mathcal{E}^{(0)})$ とすると、
 これは、吸収型安定過程 (25.2) の作る L^2 -Dirichlet
 space と一致する。従って、(2.5) は (I) で述べた
 定理 2.1 に 対応している。

次に、 L^2 -Dirichlet space $(\mathcal{F}^{(\infty)}, \mathcal{E}^{(\infty)})$ に 対応する
 L^2 -resolvent を $\{G_\alpha^\infty; \alpha > 0\}$ とすると、

$$\begin{aligned}
 & \forall f \in L^2(\bar{D}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}^{(\infty)} \\
 (2.7) \quad & \mathcal{E}_\alpha^{(\infty)}(G_\alpha^\infty f, \varphi) = (f, \varphi)_D
 \end{aligned}$$

が 成り立つので、

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad B_\alpha u & \equiv \operatorname{div}_x \int_D \frac{\operatorname{grad}_y u(y)}{|x-y|^{\pi+2s-2}} dy = \Delta_x \int_D \frac{u(y)}{|x-y|^{\pi+2s-2}} dy + \\
 & + \int_D m(x, y) u(y) d\mu_y
 \end{aligned}$$

と (2.5), (2.6) に 注意すると、

$$u \equiv G_\alpha^\infty f \quad \text{とかくとき、}$$

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha - B_\alpha)u = f \quad \text{in } D \end{array} \right.$$

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_D (u(x) - u(y)) m(x, y) dx = 0 \quad \text{in } D \end{array} \right.$$

が成り立つ。

この最後の条件 (2.10) が “反射壁” なる境界条件を表わしていると J. Elliott が主張しているのであるが、1次元の場合に、以前 J. Elliott が、一般に J. Watanabe が構成した 反射壁安定過程 と比較することは必要であるが、この symposium における田中洋氏の講演の中にある どの構成法 (1) 折返しによるもの (2) infimum process を用いるもの (3) Skorohod の確率微分方程式によるもの) にも入らない様に見える。更なる追求と問題 (A), (B) (C) については次回にしたいと思う。

参考文献

Joanne Elliott ; Dirichlet spaces associated with integro-differential operators, I, II,

Illinois J. Math., 9 (1965), 87-98; 10 (1966), 66-89